

daß  $D^4$  als gute Näherung für den Grundbogen  $D$  des Kurvenzuges der periodischen Schwingung gelten kann.

Ist eine ausreichende Näherung für  $D$  gefunden, dann muß noch nachgeprüft werden, ob die zugehörige Bewegung wirklich möglich ist, oder ob irgendwo auf  $D$  die Stillstandsbedingungen erfüllt sind. Man wird also auf den Verlängerungen der Zentralen  $\bar{S}_1\bar{S}_1$  bzw.  $\bar{S}_3\bar{S}_3$  die Krümmungsmittelpunkte  $\bar{P}'_1, \bar{P}'_1$ , bzw.  $\bar{P}'_3, \bar{P}'_3$  von  $D$  auftragen. Liegt dann der Mittelpunkt  $O$  nicht zwischen  $\bar{P}'_1$  und  $\bar{P}'_1$  bzw.  $\bar{P}'_3$  und  $\bar{P}'_3$ , dann sind nach einer Bemerkung am Schluß von Ziff. 2 c die Stillstandsbedingungen nirgends erfüllt;  $D$  stellt also eine mögliche Schwingung dar.

Die praktische Durchführung geschieht am vorteilhaftesten, indem man auf durchscheinendes Papier zeichnet und sich von der Grundkurve  $C^0$  des Linienbildes der ungedämpften Schwingung eine Schablone herstellt. Durch Verschieben derselben gewinnt man rasch die Kurvenzüge  $D^1, D^2, \dots$ . Trägt man auf der Schablone bei der Konstruktion von  $C^0$  die verwendeten Krümmungsradien und -mittelpunkte ein, so erleichtert man sich die Konstruktion der Zentralen sowie die Kontrolle hinsichtlich der Stillstandsbedingungen.

(Eingegangen am 26. Februar 1938.)

## Schwingungen kraftgekoppelter Kreisel.

Von K. Magnus in Göttingen.

**Abgrenzung der Aufgabe.** In der vorliegenden Arbeit sollen Schwingungen untersucht werden, die auftreten können, wenn man zwei Kreisel durch Federn so miteinander koppelt, daß sich ihre Schwingungen gegenseitig beeinflussen. Während über die Theorie eines einzelnen Kreisels viele Untersuchungen vorliegen, ist bisher das Verhalten zweier Kreisel, die durch eine irgendwie beschaffene Kopplung miteinander verbunden sind, noch nicht genauer behandelt worden. Lediglich ganz knappe Angaben finden sich in der Literatur. Zum Beispiel bei **Grammel**<sup>1</sup>, der das Verhalten zweier aufeinander rotierender Spielkreisel qualitativ beschreibt, und bei **Routh**<sup>2</sup>, der für Schwingungen einer Kette von Kreiseln die allgemeine rechnerische Methode angibt, aber nicht weiter ausführt oder diskutiert.

Den praktischen Wert der Klärung dieses Problems erkennt man, wenn man bedenkt, daß die Technik tatsächlich Kieselverbände benutzt, so zum Beispiel beim Kieselkompaß. Auch beim Schiffskreisel sowie bei der Einschienenbahn hat man vorgeschlagen, auftretende Fehler durch zwei miteinander gekoppelte Kreisel zu verringern. Schließlich wird sich nachher zeigen, daß die Ergebnisse der Arbeit noch sehr viel verallgemeinert werden können, so daß sich zum Beispiel der Fall der Kopplung eines Kreisels mit einer trägen Masse als Sonderfall der allgemeinen Lösung ergibt und so die Rechnung auf fast alle technischen Kieselprobleme angewandt werden kann. Denn immer ist ein Kiesel mit irgendwelchen Massen gekoppelt, sei es auch nur vermöge der Elastizität des Aufhängemechanismus oder der Kieselwelle mit den Massen der Aufhängung. Im folgenden sollen die Kreisel stets symmetrisch sein und um die Symmetrieachse rotieren. Dagegen können die mit dem Kiesel gekoppelten Massen auch unsymmetrisch sein.

<sup>1</sup> R. Grammel, Der Kiesel, S. 123. Braunschweig 1920.

<sup>2</sup> E. J. Routh, Die Dynamik der Systeme starrer Körper, Bd. 2, S. 309. Leipzig 1898.

## I. Aufstellung und Lösung des Differentialgleichungssystems.

**1. Die Art der Kopplung.** Um zu erkennen, welcher Art die Kopplung zwischen den beiden Kreiseln ist, soll zunächst die fertige Versuchsapparatur (Abb. 1) beschrieben werden.

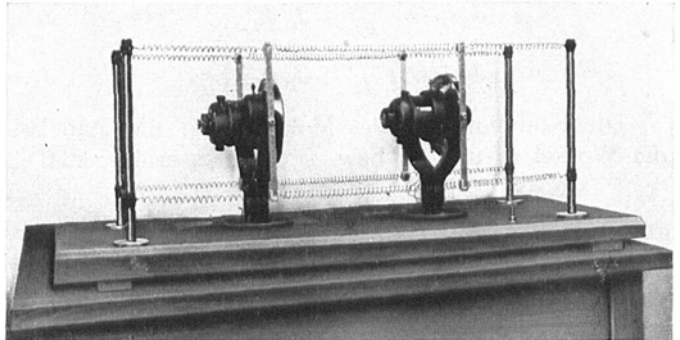


Abb. 1. Ansicht der Kreisel.

Die als Kreisel dienenden Schwungscheiben sind auf die waagrechtliegenden Achsen zweier Elektromotoren aufgesetzt. Die Motoren sind in je einem kleinen Kardanring gefaßt, der seinerseits so in einem großen Kardanring gelagert ist, daß er sich um die waagrechte Achse drehen kann, die senkrecht zur Motorachse ist. Der große Kardanring ist um die lotrechte Achse drehbar. Die Kreisel haben also drei Freiheitsgrade. Um eine Kopplung der beiden Kreisel um die beiden Kardanachsen zu erreichen, sind auf beiden Seiten der Achse des kleinen Kardanringes Aluminiumhebel befestigt, auf denen kleine, mit Ösen versehene Schieber angebracht sind. In diese Ösen werden einerseits zwischen den beiden Kreiseln und zum anderen zwischen den auf dem Bilde sichtbaren raumfesten Stangen und jedem Kreisel Federn eingehängt. Diese letzteren Federn bewirken eine Raumfesselung der Kreisel, da die Kreisel selbst im Schwerpunkt gelagert waren und so die Schwere keine Raumfesselung bewirken konnte. Die Kopplung ist nun so beschaffen, daß die Auslenkung des einen Kreisels um eine Achse ein Moment für den anderen Kreisel um dieselbe Achse erzeugt. Durch Verschieben der Ösenträger an den Hebeln und Stangen kann man die Kopplung und Raumfesselung in der einen Ebene beliebig verändern. Da in der anderen Ebene der Hebelarm unveränderlich ist, so ist hier eine Änderung der Kopplungsstärke durch Einhängen anderer Federn, also durch Änderung der Federkonstanten möglich.

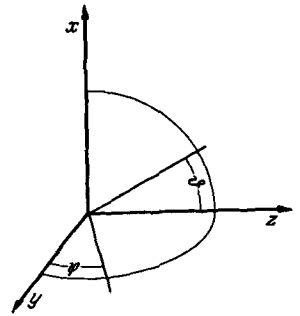


Abb. 2.

**2. Aufstellung der Differentialgleichungen.** Wir legen in das Bild der Abb. 1 ein Koordinatensystem derart hinein, daß die  $z$ -Achse in die Richtung der Gleichgewichtslage der Kreiselspitze fällt. Dann wird die  $x$ -Achse zur Hochachse, um die die großen Kardanringe drehbar sind und die  $y$ -Achse zur Querachse, die im Gleichgewichtsfall mit der Achse des inneren Kardanringes zusammenfällt (Abb. 2). Eine Drehung um die  $x$ -Achse bezeichnen wir mit dem Winkel  $\psi$ , um die  $y$ -Achse mit dem Winkel  $\vartheta$ . Und zwar so, daß die Vektoren  $\dot{\psi}$  und  $\dot{\vartheta}$  in die Richtung der positiven  $x$ - und  $y$ -Achse fallen. Mit dem Zeiger 1 sei jedesmal der Kreisel I, mit dem Zeiger 2 der Kreisel II bezeichnet.

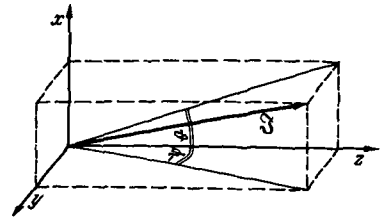


Abb. 3.

Bei der Aufstellung der Gleichungen sollen kleine Winkel vorausgesetzt werden, so daß man nach dem von **A. Föppl** angegebenen Verfahren den Impuls in seine Komponenten in Richtung der Koordinatenachsen zerlegen kann (Abb. 3).

Ist  $J_x$  der Impuls des Kreisels um seine Drehachse,  $\Theta_y$  und  $\Theta_x$  das Trägheitsmoment des Systems um die  $y$ - und  $x$ -Achse, so bekommt man nunmehr für kleine

Winkel  $\psi$  und  $\vartheta$  die Impulskomponenten

$$\begin{array}{ll} \text{des Kreisels I:} & \text{des Kreisels II:} \\ J_z = J_{z_1}, & J_z = J_{z_2}, \\ J_y = \Theta_{y_1} \frac{d\vartheta_1}{dt} - J_{z_1} \psi_1, & J_y = \Theta_{y_2} \frac{d\vartheta_1}{dt} - J_{z_2} \psi_2, \\ J_x = \Theta_{x_1} \frac{d\psi_1}{dt} + J_{z_1} \vartheta_1, & J_x = \Theta_{x_2} \frac{d\psi_2}{dt} + J_{z_2} \vartheta_2. \end{array}$$

Die Komponenten des Moments  $\mathfrak{M}$ , die man bei Auslenkungen der Kreisel um die Winkel  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  bzw.  $\psi_1$  und  $\psi_2$  erhält, sind

$$\begin{array}{ll} M_z = 0, & M_z = 0, \\ M_y = -r_1 \vartheta_1 + c_1 (\vartheta_2 - \vartheta_1), & M_y = -r_2 \vartheta_2 + c_1 (\vartheta_1 - \vartheta_2), \\ M_x = -r_3 \psi_1 + c_2 (\psi_2 - \psi_1), & M_x = -r_4 \psi_2 + c_2 (\psi_1 - \psi_2). \end{array}$$

Dabei bedeuten  $r_1$  bis  $r_4$  die Koeffizienten der Raumfesselung in den entsprechenden Ebenen und  $c_1$  und  $c_2$  die Koeffizienten der Kopplung.

Wir wollen uns auf den Fall beschränken, daß die Lagerreibung vernachlässigbar klein ist, so daß dadurch keine störenden Momente auftreten. Der Einfluß der Reibung wird erst in einem späteren Abschnitt behandelt werden.

Für die weitere Rechnung wenden wir den Impulssatz an:

$$\frac{dJ}{dt} = \mathfrak{M}.$$

Er liefert die Gleichungen:

1. für die  $z$ -Komponente

$$\frac{dJ_{z_1}}{dt} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dJ_{z_2}}{dt} = 0$$

oder integriert

$$J_{z_1} = \text{const} \quad \text{und} \quad J_{z_2} = \text{const}.$$

2. für die  $y$ - und  $x$ -Komponente

$$\left. \begin{array}{l} \text{I.} \quad \Theta_{y_1} \frac{d^2 \vartheta_1}{dt^2} - J_{z_1} \frac{d\psi_1}{dt} + r_1 \vartheta_1 - c_1 (\vartheta_2 - \vartheta_1) = 0, \\ \text{II.} \quad \Theta_{y_2} \frac{d^2 \vartheta_2}{dt^2} - J_{z_2} \frac{d\psi_2}{dt} + r_2 \vartheta_2 - c_1 (\vartheta_1 - \vartheta_2) = 0, \\ \text{III.} \quad \Theta_{x_1} \frac{d^2 \psi_1}{dt^2} + J_{z_1} \frac{d\vartheta_1}{dt} + r_3 \psi_1 - c_2 (\psi_2 - \psi_1) = 0, \\ \text{IV.} \quad \Theta_{x_2} \frac{d^2 \psi_2}{dt^2} + J_{z_2} \frac{d\vartheta_2}{dt} + r_4 \psi_2 - c_2 (\psi_1 - \psi_2) = 0. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Das sind vier lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, die einmal in den Geschwindigkeitsgliedern gekoppelt sind (I mit III und II mit IV) und zum anderen in den Kraftgliedern (I mit II und III mit IV).

**3. Lösungsansatz und Einführung dimensionsloser Größen.** Wir gehen in das Gleichungssystem (1) mit dem Ansatz ein

$$\vartheta_1 = A e^{\lambda t}, \quad \vartheta_2 = B e^{\lambda t}, \quad \psi_1 = C e^{\lambda t}, \quad \psi_2 = D e^{\lambda t}.$$

Damit bekommen wir für die Amplitudenfaktoren  $A, B, C, D$  die Gleichungen

$$\left. \begin{array}{l} A(\Theta_{y_1} \lambda^2 + r_1 + c_1) - B c_1 - C J_{z_1} \lambda = 0, \\ -A c_1 + B(\Theta_{y_2} \lambda^2 + r_2 + c_1) - D J_{z_2} \lambda = 0, \\ A J_{z_1} \lambda + C(\Theta_{x_1} \lambda^2 + r_3 + c_2) - D c_2 = 0, \\ B J_{z_2} \lambda - C c_2 + D(\Theta_{x_2} \lambda^2 + r_4 + c_2) = 0. \end{array} \right\} \quad (2)$$

Um den folgenden Rechnungen größere Allgemeinheit zu verleihen und von der Annahme besonderer Werte für die Größen  $\Theta, J_z, r, c$  frei zu werden, führen wir dimensionslose Konstanten auf folgende Weise ein: Wir dividieren das Gleichungssystem (2)

durch eine Größe  $c_0$ , die die Dimension der Federkonstanten  $c$  und  $r$  haben soll, über deren Betrag wir jedoch vorläufig keine Annahme machen wollen. Man kann  $c_0$  auch als „charakteristische Federkonstante“ bezeichnen. Mit Hilfe der Größe  $\frac{c_0}{\Theta_{y_1}} = \gamma^2$ , die die Dimension des Quadrates einer Frequenz hat, können wir nun folgende dimensionslosen Größen bilden:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \gamma, \\ \frac{\Theta_{y_2}}{\Theta_{y_1}} &= \mu_1^2, & \frac{\Theta_{x_2}}{\Theta_{x_1}} &= \mu_2^2, & \frac{\Theta_{x_3}}{\Theta_{y_1}} &= \delta^2, \\ \frac{J_{z_1} \nu}{c_0} &= k_1, & \frac{J_{z_2} \nu}{c_0} &= k_2, \\ \frac{c_1}{c_0} &= a_1^2, & \frac{c_2}{c_0} &= a_2^2, \\ \frac{r_1}{c_0} &= b_1^2, & \frac{r_2}{c_0} &= b_2^2, & \frac{r_3}{c_0} &= b_3^2, & \frac{r_4}{c_0} &= b_4^2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Die „Frequenzgröße“  $\gamma$  ist ein Maß für die Frequenz einer Schwingung;  $k_1$  und  $k_2$  nennen wir „Impulsgrößen“,  $a_1$  und  $a_2$  „Kopplungsgrößen“,  $b_1$  bis  $b_4$  „Raumfesselungsgrößen“. Die Verhältnisse der Trägheitsmomente, die Kopplungsgrößen und die Raumfesselungsgrößen sind stets positiv und deshalb als Quadrate angesetzt.

Mit diesen neu definierten Konstanten gehen wir in das System (2) ein. Wir haben dort vier lineare homogene Gleichungen für die vier Amplitudenfaktoren  $A, B, C, D$ . Sollen diese Gleichungen eine Lösung haben, so muß die Determinante der Koeffizienten verschwinden. Dies liefert die charakteristische Gleichung

$$\begin{vmatrix} \gamma^2 + b_1^2 + a_1^2 & -a_1^2 & -k_1 \gamma & 0 \\ -a_1^2 & \mu_1^2 \gamma^2 + b_2^2 + a_1^2 & 0 & -k_2 \gamma \\ k_1 \gamma & 0 & \delta^2 \gamma^2 + b_3^2 + a_2^2 & -a_2^2 \\ 0 & k_2 \gamma & -a_2^2 & \mu_2^2 \delta^2 \gamma^2 + b_4^2 + a_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

oder ausgerechnet

$$p_1 \gamma^8 + p_2 \gamma^6 + p_3 \gamma^4 + p_4 \gamma^2 + p_5 = 0 \quad (4)$$

mit den Koeffizienten

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \mu_1^2 \mu_2^2 \delta^4, \\ p_2 &= \mu_1^2 \delta^2 [\mu_2^2 (b_3^2 + a_2^2) + b_4^2 + a_2^2] + \mu_2^2 \delta^4 [\mu_1^2 (b_1^2 + a_1^2) + b_2^2 + a_1^2] + k_1^2 \delta^2 \mu_1^2 \mu_2^2 + k_2^2 \delta^2, \\ p_3 &= \mu_1^2 (b_3^2 + a_2^2) (b_4^2 + a_2^2) + \mu_2^2 \delta^4 (b_1^2 + a_1^2) (b_2^2 + a_1^2) - \mu_1^2 a_1^4 - \mu_2^2 \delta^4 a_1^4 + \\ &\quad + \delta^2 [\mu_1^2 (b_1^2 + a_1^2) + b_2^2 + a_1^2] [\mu_2^2 (b_3^2 + a_2^2) + b_4^2 + a_2^2] + k_1^2 k_2^2 + \\ &\quad + k_2^2 [\delta^2 (b_1^2 + a_1^2) + b_2^2 + a_1^2] + k_1^2 [\mu_1^2 (b_4^2 + a_2^2) + \mu_2^2 \delta^2 (b_3^2 + a_2^2)], \\ p_4 &= [\mu_1^2 (b_1^2 + a_1^2) + b_2^2 + a_1^2] [(b_3^2 + a_2^2) (b_4^2 + a_2^2) - a_2^4] + k_1^2 (b_3^2 + a_2^2) (b_4^2 + a_2^2) + \\ &\quad + \delta^2 [\mu_2^2 (b_3^2 + a_2^2) + b_4^2 + a_2^2] [(b_1^2 + a_1^2) (b_2^2 + a_1^2) - a_1^4] + 2 a_1^2 a_2^2 k_1 k_2 + \\ &\quad + k_2^2 (b_1^2 + a_1^2) (b_2^2 + a_1^2), \\ p_5 &= (b_1^2 + a_1^2) (b_2^2 + a_1^2) (b_3^2 + a_2^2) (b_4^2 + a_2^2) - a_1^4 (b_3^2 + a_2^2) (b_4^2 + a_2^2) - \\ &\quad - a_2^4 (b_1^2 + a_1^2) (b_2^2 + a_1^2) + a_1^4 a_2^4. \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

**4. Die allgemeine Integration des Differentialgleichungssystemes.** Die Gleichung (4) hat acht Wurzeln, von denen je zwei den gleichen Betrag haben, da ja nur gerade Potenzen von  $\gamma$  auftreten. Es läßt sich weiter zeigen, daß die Lösungen rein imaginär sind. Das ist physikalisch einleuchtend, da wir in den Gleichungen keine Reibungen angesetzt haben.

Ohne auf die Diskussion der Lösung näher einzugehen, setzen wir jetzt für die Frequenzen  $\lambda_i = \nu \gamma_i$  mit reellen Zahlen  $l_i$  an

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= +i l_1, & \lambda_2 &= -i l_1, & \lambda_3 &= +i l_2, & \lambda_4 &= -i l_2, \\ \lambda_5 &= +i l_3, & \lambda_6 &= -i l_3, & \lambda_7 &= +i l_4, & \lambda_8 &= -i l_4. \end{aligned}$$

Damit bekommen wir die allgemeine Lösung

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1 &= A_1 e^{+i l_1 t} + A_2 e^{-i l_1 t} + \dots + A_8 e^{-i l_4 t}, \\ \vartheta_2 &= B_1 e^{+i l_1 t} + B_2 e^{-i l_1 t} + \dots + B_8 e^{-i l_4 t}, \\ \psi_1 &= C_1 e^{+i l_1 t} + C_2 e^{-i l_1 t} + \dots + C_8 e^{i l_4 t}, \\ \psi_2 &= D_1 e^{+i l_1 t} + D_2 e^{-i l_1 t} + \dots + D_8 e^{i l_4 t}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Dabei sind jedoch die  $A_j, B_j, C_j, D_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 8$ ) nicht unabhängig voneinander, sondern durch die Gleichungen (2) miteinander verknüpft. Rechnet man die Verhältniswerte aus (2) aus, so kommt man zu sehr unübersichtlichen Ausdrücken, aus denen man jedoch entnehmen kann, daß  $B/A$  reell ist, während  $C/A$  und  $D/A$  imaginär sind. Ohne die genauen Werte hinzuschreiben, setzen wir an

$$\frac{B_j}{A_j} = u_j, \quad \frac{C_j}{A_j} = i v_j, \quad \frac{D_j}{A_j} = i w_j \quad (j = 1, 2 \dots 8).$$

Die Größen  $u_j, v_j, w_j$  sind reell. Da  $\gamma$  in  $B/A$  nur als Quadrat vorkommt, so hat man ferner die Beziehungen

$$u_1 = u_2, \quad u_3 = u_4, \quad u_5 = u_6, \quad u_7 = u_8.$$

Entsprechend ersieht man aus  $C/A$  und  $D/A$  die Beziehungen

$$\begin{aligned} v_1 &= -v_2, & v_3 &= -v_4, & v_5 &= -v_6, & v_7 &= -v_8, \\ w_1 &= -w_2, & w_3 &= -w_4, & w_5 &= -w_6, & w_7 &= -w_8. \end{aligned}$$

Die imaginären  $e$ -Funktionen der Lösung (5) formen wir noch um in die reellen Sinus- und Cosinusfunktionen. Dazu führen wir die neuen Unbekannten  $E_1, E_2, E_3, E_4$  und  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  ein, die durch bekannte Beziehungen mit den bisherigen Unbekannten  $A, B, C, D$  sowie den Verhältniswerten  $u, v, w$ , zusammenhängen. Die Umformung bedeutet ein Zusammenfassen je zweier Glieder der Lösung (5) in ein Sinus- bzw. Cosinusglied. Dadurch treten an Stelle der jeweils acht Verhältniswerte nur noch deren vier auf (zum Beispiel  $u_2, u_4, u_6, u_8$ ), die wir abkürzend mit  $u_{2j}, v_{2j}, w_{2j}$  bezeichnen wollen ( $j = 1, 2, 3, 4$ ). Damit ergibt sich als Lösung

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1 &= \sum_{j=1}^4 E_j \sin(l_j t + \varphi_j), \\ \vartheta_2 &= \sum_{j=1}^4 u_{2j} E_j \sin(l_j t + \varphi_j), \\ \psi_1 &= \sum_{j=1}^4 v_{2j} E_j \cos(l_j t + \varphi_j), \\ \psi_2 &= \sum_{j=1}^4 w_{2j} E_j \cos(l_j t + \varphi_j). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Das sind vier übereinandergelagerte, im allgemeinen elliptische Schwingungen mit den Frequenzen  $l_j$  und den Phasenverschiebungen  $\varphi_j$ .

Die allgemeine Lösung (6) enthält noch die acht Integrationskonstanten  $E_1, E_2, E_3, E_4, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ , die aus den jeweiligen Anfangsbedingungen zu bestimmen sind. Die Rechnung läßt sich für den allgemeinsten Fall von Anfangsbedingungen durchführen und führt im wesentlichen auf die Auflösung zweier Gleichungssysteme mit je vier Unbekannten.

## II. Diskussion der Wurzeln der charakteristischen Gleichung.

**1. Der Sonderfall gleicher Abmessungen.** Die wichtigste Frage ist die nach den Wurzeln der charakteristischen Gleichung (4). Denn diese Wurzeln bestimmen die Eigenschaften des Kreisverbandes. Wir wollen deshalb untersuchen, wie sie von den einzelnen Größen (Impuls, Trägheitsmoment, Kopplung und Raumfesselung) abhängen. Die charakteristische Gleichung (4) ist in diesen Größen jedoch so unübersichtlich, daß

man aus ihr den Verlauf der Wurzeln nicht wohl entnehmen kann. Bezeichnen wir die acht Wurzeln mit  $\pm \gamma_1, \pm \gamma_2, \pm \gamma_3, \pm \gamma_4$ , so liefert lediglich die Formel

$$\gamma_1^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 \gamma_4^2 = \frac{p_5}{p_1}$$

einigen Aufschluß. Da die Koeffizienten  $p_1$  und  $p_5$  von der Impulsgröße  $k$  unabhängig sind, so bedeutet das: Das Produkt der acht Wurzeln ist eine vom Impuls unabhängige Größe.

Dabei sei bemerkt, daß wir die Bezeichnung so wählen wollen, daß  $\gamma_1$  die kleinste und  $\gamma_4$  die größte der Frequenzgrößen ist.

Um den Wurzelverlauf überblicken zu können, behandeln wir zunächst den Sonderfall „gleicher Abmessungen“. Darunter wollen wir verstehen:

1. gleiche Trägheitsmomente beider Kreisel, also  $\Theta_{y_1} = \Theta_{y_2}$  und  $\Theta_{x_1} = \Theta_{x_2}$  und somit

$$\mu_1^2 = \mu_2^2 = 1,$$

2. gleich starke Raumfesselung beider Kreisel in beiden Ebenen, also

$$b_1^2 = b_2^2 = b_3^2 = b_4^2 = b^2,$$

3. gleich starke Kopplung der Kreisel in beiden Ebenen, also

$$a_1^2 = a_2^2 = a^2.$$

Die Impulse beider Kreisel müssen aber nicht gleich groß sein. Jedoch soll dieser Fall vorangestellt werden, da er am leichtesten zu übersehen ist.

a) Gleichgroßer und gleichgerichteter Impuls beider Kreisel. Läßt man beide Kreisel gleich schnell und im gleichen Sinne umlaufen, so wird  $k_1 = k_2$ . Jetzt vereinfachen sich die Koeffizienten (4a) von Gleichung (4) folgendermaßen:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \delta^4, \\ p_2 &= 2 \delta^2 [(b^2 + a^2)(1 + \delta^2) + k^2], \\ p_3 &= b^2(b^2 + 2a^2)(1 + 4\delta^2 + \delta^4) + 4a^4\delta^2 + 2(b^2 + a^2)(1 + \delta^2)k^2 + k^4, \\ p_4 &= 2b^2(b^2 + a^2)(b^2 + 2a^2)(1 + \delta^2) + 2k^2(b^4 + 2b^2a^2 + 2a^4), \\ p_5 &= b^4(b^2 + 2a^2)^2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

In diesem Falle gelingt es durch einen Gedankenversuch zu einer strengen Lösung zu kommen und die Wurzeln explizit anzugeben. Wir betrachten dazu die Grenzfälle verschwindender und starrer Kopplung, während die anderen Größen festbleiben sollen.

Bei verschwindender Kopplung ( $a^2 = 0$ ) hat jeder Kreisel für sich zwei Frequenzen, die wegen der Voraussetzungen über gleiche Abmessungen und gleichen Impuls für beide Kreisel gleich sein müssen; denn man hat ja zwei Kreisel mit gleichem Impuls, gleichen Trägheitsmomenten und gleicher Raumfesselung. Wir können die Frequenzen berechnen, indem wir aus dem System (1) nur die Gleichungen I und III oder II und IV benutzen und außerdem  $c = 0$  setzen. Die Lösung, die sich aus der daraus folgenden charakteristischen Gleichung

$$\delta^2 \gamma^4 + [b^2(1 + \delta^2) + k^2] \gamma^2 + b^4 = 0 \quad (8)$$

ergibt, ist

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1^2 &= -\frac{b^2(1 + \delta^2) + k^2}{2\delta^2} - \sqrt{\frac{[b^2(1 + \delta^2) + k^2]^2}{4\delta^4} - \frac{b^4}{\delta^2}}, \\ \gamma_3^2 &= -\frac{b^2(1 + \delta^2) + k^2}{2\delta^2} + \sqrt{\frac{[b^2(1 + \delta^2) + k^2]^2}{4\delta^4} - \frac{b^4}{\delta^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

und zwar sei  $\gamma_1$  als Präzessions-,  $\gamma_3$  als Nutationsfrequenz bezeichnet.

Beim zweiten Grenzfall ist  $c = \infty$ , d. h. beide Kreisel sind starr miteinander verbunden. Dann kann man das System als einen einzelnen Kreisel mit doppeltem Impuls, doppelten Trägheitsmomenten und doppelter Raumfesselung auffassen. Wählt man auch die charakteristische Federkonstante  $c_0$  doppelt so groß wie zuvor, so sieht

man aus den Definitionen (3), daß jetzt alle dimensionslosen Größen unverändert bleiben. Dieses System muß also auch die beiden Eigenfrequenzen (9) haben, wie sie zuvor jeder Kreisel für sich zeigte. Diese Tatsache legt es nahe, zu untersuchen, ob nicht auch für jede andere Kopplung diese beiden Frequenzen vorhanden sind, ob also die Lösungen (9) für die beiden Grenzfälle auch zugleich Lösungen für die allgemeine charakteristische Gleichung (4) mit den Koeffizienten (7) sind. Das wäre aber gleichbedeutend mit einer Aufspaltung der Gleichung (4) in ein Produkt von zwei Gleichungen zweiten Grades für  $\gamma^2$ .

Wir wollen deshalb die Bedingungen für eine solche Aufspaltung angeben. Die Gleichung (4) soll dargestellt werden in der Form

$$(q_1 \gamma^4 + q_2 \gamma^2 + q_3) (q_4 \gamma^4 + q_5 \gamma^2 + q_6) = 0. \quad (10)$$

Durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich bekommt man

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= q_1 q_4, \\ p_2 &= q_1 q_5 + q_2 q_4, \\ p_3 &= q_1 q_6 + q_2 q_5 + q_3 q_4, \\ p_4 &= q_2 q_6 + q_3 q_5, \\ p_5 &= q_3 q_6. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Anstatt das Gleichungssystem (11) nach den  $q$  aufzulösen, wollen wir annehmen, daß die eine quadratische Gleichung von (10) schon durch (8) gegeben sei. Wir setzen also

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \delta^2, \\ q_2 &= b^2(1 + \delta^2) + k^2, \\ q_3 &= b^4. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Dann bekommt man aus der ersten, zweiten und fünften Gleichung (11)

$$\left. \begin{aligned} q_4 &= \delta^2, \\ q_5 &= (b^2 + 2a^2)(1 + \delta^2) + k^2, \\ q_6 &= (b^2 + 2a^2)^2. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Da man aus (11) und (4) rückwärts rechnend wieder eindeutig zu (10) kommt, so sieht man, daß die Bedingungen (11) notwendig und hinreichend für die Aufspaltung sind. Wir haben jetzt nur noch nachzusehen, ob die Werte (12) und (13) auch noch der dritten und vierten Gleichung von (11) genügen. Man überzeugt sich leicht durch Ausrechnen, daß das tatsächlich der Fall ist.

Wir können nunmehr aus (10) mit den Koeffizienten (12) und (13) die strenge Lösung von (4) für den betrachteten Sonderfall angeben:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= i \sqrt{\frac{b^2(1 + \delta^2) + k^2}{2\delta^2}} - \sqrt{\left[\frac{b^2(1 + \delta^2) + k^2}{2\delta^2}\right]^2 - \frac{b^4}{\delta^2}}, \\ \gamma_2 &= i \sqrt{\frac{(b^2 + 2a^2)(1 + \delta^2) + k^2}{2\delta^2}} - \sqrt{\left[\frac{(b^2 + 2a^2)(1 + \delta^2) + k^2}{2\delta^2}\right]^2 - \frac{(b^2 + 2a^2)^2}{\delta^2}}, \\ \gamma_3 &= i \sqrt{\frac{b^2(1 + \delta^2) + k^2}{2\delta^2}} + \sqrt{\left[\frac{b^2(1 + \delta^2) + k^2}{2\delta^2}\right]^2 - \frac{b^4}{\delta^2}}, \\ \gamma_4 &= i \sqrt{\frac{(b^2 + 2a^2)(1 + \delta^2) + k^2}{2\delta^2}} + \sqrt{\left[\frac{(b^2 + 2a^2)(1 + \delta^2) + k^2}{2\delta^2}\right]^2 - \frac{(b^2 + 2a^2)^2}{\delta^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Hier wollen wir  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  als Präzessionen,  $\gamma_3$  und  $\gamma_4$  als Nutationen bezeichnen. Die Werte  $\gamma_2$  und  $\gamma_4$  gehen für  $a^2 = 0$  in die von der Kopplung  $a^2$  vollkommen unabhängigen Wurzeln  $\gamma_1$  und  $\gamma_3$  über. Wir haben also durch die Kopplung eine Aufspaltung der Nutation und der Präzession in je zwei Schwingungen, von denen die eine ihren Wert beibehält, wie auch immer die Kopplung gewählt sein mag.

Die Kurven in Abb. 4 zeigen die Wurzeln  $\gamma$  abhängig von der Impulsgröße  $k$  für verschiedene Kopplungen. Es sind bei dieser sowie bei allen folgenden Kurvenbildern als Ordinaten die Beträge der Wurzeln  $\gamma$  aufgetragen; denn die Wurzeln selbst sind ja stets imaginär. Gestrichelt gezeichnet sind die Wurzeln  $\gamma_1$  und  $\gamma_3$ , die sich nicht mit der Kopplung verschieben. Die Wurzeln  $\gamma_2$  und  $\gamma_4$  sind von der Kopplungsgröße  $a^2$  abhängig und in der Abbildung für die Werte  $a^2$  von 1 bis 6 ausgezogen. Sie nehmen für wachsende  $a^2$  zu, d. h. die Schwingungen werden schneller. Im Grenzfall  $a^2 = \infty$  gehen auch  $\gamma_2$  und  $\gamma_4$  nach  $\infty$ , so daß dann nur noch  $\gamma_1$  und  $\gamma_3$  bleiben. Mit wachsender Kopplung gehen also sowohl die beiden Nutationsfrequenzen als auch die beiden Präzessionsfrequenzen weiter auseinander. Das entspricht vollkommen den von der Theorie der gekoppelten Pendelschwingungen her bekannten Tatsachen. Der Gang von  $\gamma$  mit der Impulsgröße  $k$  ist in allen Fällen der gleiche: mit wachsendem  $k$  nehmen die Nutationsfrequenzen zu und die Präzessionsfrequenzen ab, und zwar so, daß jedes einzelne der Produkte  $\gamma_1 \gamma_3$  und  $\gamma_2 \gamma_4$  einen von  $k$  unabhängigen Wert beibehält.

Wie sich eine Änderung der Raumfesselung auf die Wurzeln auswirkt, ersieht man leicht aus (14). Mit stärker werdender Raumfesselung, also wachsendem  $b^2$ , nehmen auch alle vier Wurzeln größere Werte an, d. h. die Schwingungen werden schneller.

b) Gleichgroßer, aber entgegengesetzt gerichteter Impuls beider Kreisel. In diesem Falle werden die Koeffizienten (4a)

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \delta^4, \\ p_2 &= 2 \delta^2 [(b^2 + a^2) (1 + \delta^2) + k^2], \\ p_3 &= b^2 (b^2 + 2 a^2) (1 + 4 \delta^2 + \delta^4) + 4 a^2 \delta^2 + 2 (b^2 + a^2) (1 + \delta^2) k^2 + k^4, \\ p_4 &= 2 b^2 (b^2 + 2 a^2) (b^2 + a^2) (1 + \delta^2) + 2 b^2 (b^2 + 2 a^2) k^2, \\ p_5 &= b^4 (b^2 + 2 a^2)^2. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Jetzt gelingt es nicht, eine allgemeine und strenge Lösung der charakteristischen Gleichung anzugeben. Lediglich in einigen Grenzfällen und im Sonderfall  $\delta^2 = 1$  ist das möglich.

Es seien zunächst Grenzfälle betrachtet. Für die Fälle  $k = 0$  und  $a^2 = 0$  sind die Koeffizienten (15) mit (7) identisch. Wir können dann also die strenge Lösung (14) übertragen. Im Grenzfall starrer Kopplung behalten wir von (15) nur die Glieder bei, die  $a^4$  als Faktor haben. Dann fallen die Koeffizienten  $p_1$  und  $p_2$  fort und man kommt zu einer charakteristischen Gleichung zweiten Grades in  $\gamma^2$  mit der Lösung:

$$\gamma_1 = i \frac{b}{\delta}, \quad \gamma_2 = i b, \quad (16)$$

also zwei vom Impuls unabhängige Schwingungen.

Der Grenzfall starrer Raumfesselung ist unwesentlich, da dann die Kreisel ihre Freiheitsgrade verlieren. Im Fall fehlender Raumfesselung ( $b^2 = 0$ ) verschwinden

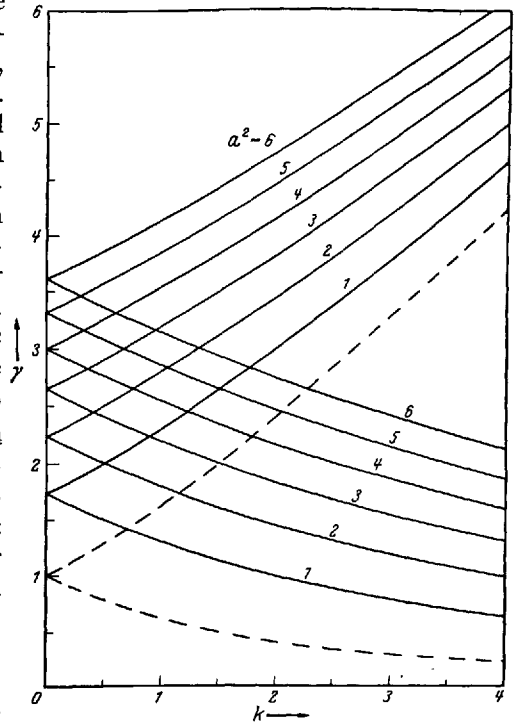


Abb. 4.  $\gamma = f(k)$  für gleich große und gleichgerichtete Impulse der Kreisel ( $k_1 = k_2$ ) bei verschiedenen Kopplungen. Die angeschriebenen Zahlen bezeichnen die Werte von  $a^2$ . Es ist  $\delta^2 = b^2 = 1$  gesetzt.



in (15) die Koeffizienten  $p_4$  und  $p_5$ , so daß wir wieder die strenge Lösung angeben können:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 = 0, & \quad \gamma_3 = i \sqrt{\frac{2a^2 + k^2}{\delta^2}}, \\ \gamma_2 = 0, & \quad \gamma_4 = i \sqrt{\frac{2a^2\delta^2 + k^2}{\delta^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Die Kreisel machen dann also nur Nutationen.

Die Grenzfälle  $\delta^2 = 0$  und  $\delta^2 = \infty$  sind ohne praktische Bedeutung. Dagegen legen es die Lösungen (16) und (17) nahe, zu untersuchen, ob im Falle  $\delta^2 = 1$  eine Vereinfachung der Rechnung zu erzielen ist. Denn in beiden Fällen gehen für  $\delta^2 = 1$  die Lösungen ineinander über, es treten also Doppelwurzeln auf.

Wir wollen deshalb im Falle  $\delta^2 = 1$  versuchen, die charakteristische Gleichung mit den Koeffizienten (15) durch einen Ansatz für Doppelwurzeln zu lösen, suchen also (4) darzustellen in der Form

$$(q_1 \gamma^4 + q_2 \gamma^2 + q_3)^2 = 0.$$

Wir kommen zu den Bedingungen:

$$\begin{aligned} p_1 &= q_1^2, \\ p_2 &= 2 q_1 q_2, \\ p_3 &= 2 q_1 q_3 + q_2^2, \\ p_4 &= 2 q_2 q_3, \\ p_5 &= q_3^2. \end{aligned}$$

Wie zuvor berechnen wir wieder aus der ersten, zweiten und fünften die Koeffizienten  $q_1, q_2, q_3$  und erhalten

$$\begin{aligned} q_1 &= 1, \\ q_2 &= 2(b^2 + a^2) + k^2, \\ q_3 &= b^2(b^2 + 2a^2). \end{aligned}$$

Die dritte und vierte Bedingung sind wieder notwendig und hinreichend für das Vorhandensein von Doppelwurzeln. Wie man

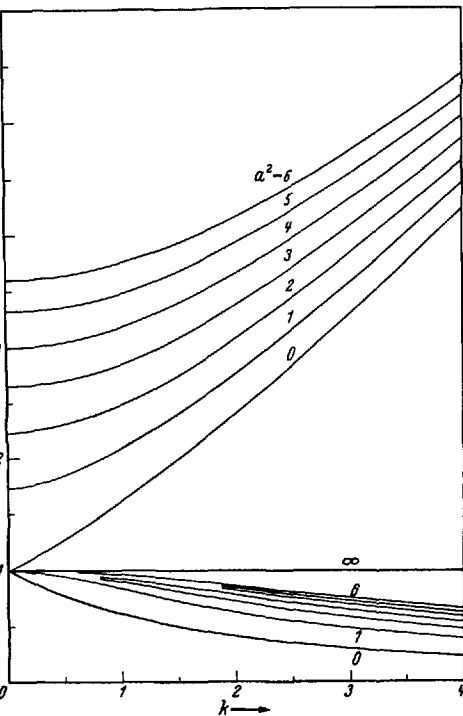


Abb. 5.  $\gamma = f(k)$  für gleich große, entgegengesetzt gerichtete Impulse der Kreisel ( $k_1 = -k_2$ ) bei verschiedenen Kopplungen. Die angeschriebenen Zahlen bezeichnen die Werte von  $a^2$  für  $\delta^2 = b^2 = 1$ .

sich leicht durch Ausrechnen überzeugt, sind sie im vorliegenden Falle erfüllt. Wir können nunmehr die strenge Lösung für den Fall  $\delta^2 = 1$  angeben:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 = \gamma_2 &= i \sqrt{\frac{2(b^2 + a^2) + k^2}{2} - \sqrt{\left[\frac{2(b^2 + a^2) + k^2}{2}\right]^2 - b^2(b^2 + 2a^2)}}, \\ \gamma_3 = \gamma_4 &= i \sqrt{\frac{2(b^2 + a^2) + k^2}{2} + \sqrt{\left[\frac{2(b^2 + a^2) + k^2}{2}\right]^2 - b^2(b^2 + 2a^2)}}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Das Ergebnis ist: Im Fall gleicher Abmessungen und gleichen, aber entgegengesetzt gerichteten Impulsen treten für  $\delta^2 = 1$  Doppelwurzeln auf. Wir haben also nur eine Nutation und eine Präzession.

Der Einfluß der Impulsgröße  $k$  sowie der Raumbesselungsgröße  $b^2$  ist in (18) genau so, wie im vorangehenden Fall der gleichsinnigen Rotation beider Kreisel. Anders jedoch ist diesmal der Einfluß der Kopplung  $a^2$ . Das zeigt Abb. 5, worin  $\gamma$  abhängig von  $k$  für verschiedene  $a^2$  dargestellt ist. Die Nutationskurven haben den gewohnten Verlauf, ihre Frequenzen wachsen mit wachsendem  $a^2$  über alle Grenzen. Die Frequenzkurven der Präzessionen jedoch gehen für alle  $a^2$  vom Punkte ( $k = 0, \gamma = 1$ ) aus

und nehmen dann je nach der Größe von  $a^2$  mehr oder weniger stark ab. Auch hier geht das Anwachsen der Nutationsfrequenzen  $\gamma_3 = \gamma_4$  sowie das Abnehmen der Präzessionsfrequenzen  $\gamma_1 = \gamma_2$  derart vor sich, daß stets  $\gamma_1 \gamma_3 = \gamma_2 \gamma_4$  eine vom Impuls unabhängige Größe ist.

c) Verschiedener Impuls beider Kreisel. Sicht man von den leichter zu behandelnden Grenzfällen z. B. für verschwindende oder starre Kopplung ab, so kann man bei verschiedenem Impuls der Kreisel einen Überblick über den Verlauf der Wurzeln nur dadurch bekommen, daß man die charakteristische Gleichung (4) nach einer numerischen Methode auflöst. Das ist in zwei Fällen auch ausgeführt worden. Abb. 6 zeigt den Verlauf der Wurzeln, berechnet für die Werte  $\delta^2 = 1$ ,  $b^2 = 1$ ,  $k_2 = 0$ , d. h. der zweite Kreisel soll stehen. Dieser Fall ist

überall da von Bedeutung, wo ein Kreisel mit einer trägen Masse gekoppelt ist. Da  $k_1$  für diesen Fall in der charakteristischen Gleichung nur als Quadrat vorkommt, so ist das Kurvenbild symmetrisch zur  $\gamma$ -Achse. Bei nichtgekoppelten Kreiseln ( $a^2 = 0$ ,

gestrichelte Kurve) sind drei Schwingungen vorhanden: für den laufenden Kreisel I eine Nutation und eine Präzession, für den stehenden Kreisel II eine Pendelschwingung, deren Frequenzgröße bei den gewählten Zahlen den Wert 1 hat. Wird die Kopplungsgröße  $a^2 = 1$  (ausgezogene Kurve), so hat das System vier Frequenzen, und zwar eine Nutation und eine Präzession und dazwischen zwei Schwingungen, die für  $k_1 \rightarrow \infty$  gegen denselben Grenzwert gehen. Diese Tatsache beweist, daß bei einem noch so schnell laufenden Kreisel, der mit einer trägen Masse gekoppelt ist, Frequenzen auftreten

können, die die Größenordnung einer Pendelschwingung haben. Wird die Kopplungsgröße  $a^2$  noch größer, so wandert die Nutationsfrequenz zu immer größeren Werten hin, aber auch der Grenzwert der beiden mittleren Frequenzen wird größer. Im Grenzfall  $a^2 = \infty$  (starre Kopplung) sind schließlich zwei Frequenzgrößen unendlich groß geworden. Es bleiben dann nur die strichpunktirt gezeichneten Frequenzgrößen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ , die sich auch leicht formelmäßig aus dem Grenzfall starrer Kopplung ergeben. Man kann aus dem Kurvenbild ohne weiteres die Bezirke herauslesen, die von den

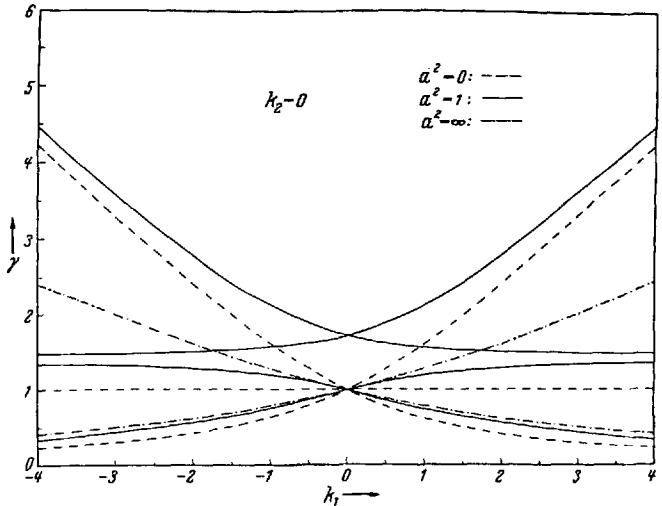


Abb. 6.  $\gamma = f(k_1)$  für den Fall, daß nur ein Kreisel läuft. Die Kurven gehören zu  $a^2 = 0$ ,  $a^2 = 1$ ,  $a^2 = \infty$  sowie  $\delta^2 = b^2 = 1$ .

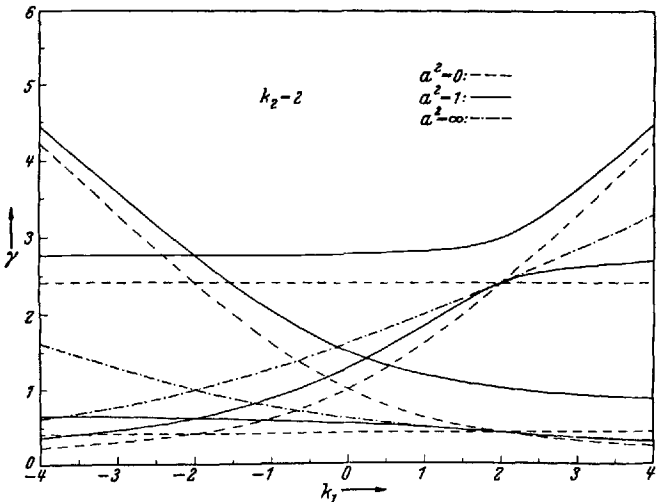


Abb. 7.  $\gamma = f(k_1)$  bei verschiedenen Impulsen der Kreisel. Die Kurven gehören zu  $a^2 = 0$ ,  $a^2 = 1$ ,  $a^2 = \infty$  sowie  $\delta^2 = b^2 = 1$  und  $k_2 = 2$ .

einzelnen Frequenzgrößen  $\gamma$  durchlaufen werden, wenn  $a^2$  alle möglichen Werte von 0 bis  $\infty$  durchläuft.

Läuft auch der Kreisel II, so kommen die Kurven von Abb. 7. Dabei ist für den zweiten Kreisel die Impulsgröße  $k_2 = 2$  gesetzt worden. Sind die Kreisel nicht gekoppelt ( $a^2 = 0$ , gestrichelte Kurve), so hat jeder Kreisel für sich zwei Eigenfrequenzen. Da die Wurzeln über der Impulsgröße  $k_1$  aufgetragen sind, so sind die Frequenzen des Kreisels II natürlich unveränderlich. Für die Kopplungsgröße  $a^2 = 1$  zeigen die ausgezogenen Kurven den Verlauf der Wurzeln. Für  $k_1 \rightarrow \infty$  geht stets eine Wurzel gegen Null, eine andere gegen Unendlich, während die beiden dazwischenliegenden Wurzeln sich bestimmten Grenzwerten nähern, die nur noch von der Kopplungsgröße und der Raumbesselungsgröße abhängen. Die beiden für negative  $k_1$  größeren Wurzeln gehen mit  $a^2 \rightarrow \infty$  auch gegen Unendlich, während die beiden anderen Wurzeln als Grenzkurven für  $a^2 \rightarrow \infty$  die strichpunktiert gezeichneten Kurven haben. Für  $k_1 = -2$  kommen wieder die schon zuvor behandelten Doppelwurzeln der gegenständig laufenden Kreisel.

**2. Verallgemeinerung der strengen Lösung im Fall gleichsinniger Rotation.** Die Lösung (14) gibt zwar schon einen guten Überblick über den Einfluß der einzelnen Größen auf den Gang der Wurzeln. Um sie zu erhalten, sind jedoch viele vereinfachende Annahmen gemacht worden. Es liegt nahe, zu untersuchen, ob durch einen ähnlichen Gedankengang wie den, der zur Gleichung (14) führte, eine Lösung von größerer Allgemeinheit abzuleiten ist. Wir fragen nach den Fällen, in denen eine Aufspaltung der charakteristischen Gleichung (4) in zwei quadratische Gleichungen möglich wird, von denen die eine unabhängig von der Kopplung ist. Die Bedingungen dafür lassen sich durch folgende Überlegung finden: Soll die eine quadratische Gleichung unabhängig von  $a^2$  sein, so lassen sich die ihr entsprechenden Wurzeln aus einer Untersuchung der Grenzfälle  $a^2 = 0$  und  $a^2 = \infty$  bestimmen. Es müssen also dieselben Frequenzen auftreten, wenn einmal jeder Kreisel für sich schwingt ( $a^2 = 0$ ) und zum anderen, wenn beide Kreisel starr miteinander verbunden sind ( $a^2 = \infty$ ). Wir bekommen so die charakteristischen Gleichungen

1. bei ungekoppelten Kreiseln: für Kreisel I

$$\delta^2 \gamma^4 + (\delta^2 b_1^2 + b_3^2 + k_1^2) \gamma^2 + b_1^2 b_3^2 = 0, \quad (19a)$$

für Kreisel II

$$\delta^2 \mu_1^2 \mu_2^2 \gamma^4 + (\mu_2^2 \delta^2 b_3^2 + \mu_1^2 b_4^2 + k_2^2) \gamma^2 + b_2^2 b_4^2 = 0, \quad (19b)$$

2. bei starr gekoppelten Kreiseln:

$$\delta^2 (\mu_1^2 + 1) (\mu_2^2 + 1) \gamma^4 + [(\mu_1^2 + 1) (b_3^2 + b_4^2) + \delta^2 (\mu_2^2 + 1) (b_1^2 + b_2^2) + (k_1 + k_2)^2] \gamma^2 + (b_1^2 + b_2^2) (b_3^2 + b_4^2) = 0. \quad (19c)$$

Sollen die Wurzeln der drei charakteristischen Gleichungen (19) gleich sein, so müssen auch die einzelnen Koeffizienten gleich sein. Man bekommt durch Vergleich die Bedingungen

$$\mu_1^2 = \mu_2^2 = 1, \quad b_1^2 = b_2^2, \quad b_3^2 = b_4^2, \quad k_1 = k_2. \quad (20)$$

Wir haben jetzt nachzuprüfen, ob mit Einführung der Annahmen (20) eine Aufspaltung der Gleichung (4) in ein Produkt von der Form (10) möglich ist. Dazu machen wir den Ansatz

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \delta^2, \\ q_2 &= \delta^2 b_1^2 + b_3^2 + k^2, \\ q_3 &= b_1^2 b_3^2. \end{aligned} \right\}$$

Dann bekommen wir aus der ersten, zweiten und fünften Gleichung (11)

$$\begin{aligned} q_4 &= \delta^2, \\ q_5 &= \delta^2 (b_1^2 + 2 a_1^2) + b_3^2 + 2 a_2^2 + k^2, \\ q_6 &= (b_1^2 + 2 a_1^2) (b_3^2 + 2 a_2^2). \end{aligned}$$

Sind auch noch die dritte und vierte Bedingungen (II) erfüllt, so ist eine Aufspaltung der charakteristischen Gleichung (4) mit dem erwähnten Ansatz möglich. Man überzeugt sich leicht durch Einsetzen, daß das auch tatsächlich der Fall ist. Wir können nun sofort die verallgemeinerte Lösung angeben:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= i \sqrt{\frac{\delta^2 b_1^2 + b_3^2 + k^2}{2 \delta^2} - \sqrt{\left[\frac{\delta^2 b_1^2 + b_3^2 + k^2}{2 \delta^2}\right]^2 - \frac{b_1^2 b_3^2}{\delta^2}}}, \\ \gamma_2 &= i \sqrt{\frac{\delta^2 (b_1^2 + 2 a_1^2) + b_3^2 + 2 a_3^2 + k^2}{2 \delta^2} - \sqrt{\left[\frac{\delta^2 (b_1^2 + 2 a_1^2) + b_3^2 + 2 a_3^2 + k^2}{2 \delta^2}\right]^2 - \frac{(b_1^2 + 2 a_1^2)(b_3^2 + 2 a_3^2)}{\delta^2}}}, \\ \gamma_3 &= i \sqrt{\frac{\delta^2 b_1^2 + b_3^2 + k^2}{2 \delta^2} + \sqrt{\left[\frac{\delta^2 b_1^2 + b_3^2 + k^2}{2 \delta^2}\right]^2 - \frac{b_1^2 b_3^2}{\delta^2}}}, \\ \gamma_4 &= i \sqrt{\frac{\delta^2 (b_1^2 + 2 a_1^2) + b_3^2 + 2 a_3^2 + k^2}{2 \delta^2} + \sqrt{\left[\frac{\delta^2 (b_1^2 + 2 a_1^2) + b_3^2 + 2 a_3^2 + k^2}{2 \delta^2}\right]^2 - \frac{(b_1^2 + 2 a_1^2)(b_3^2 + 2 a_3^2)}{\delta^2}}}. \end{aligned} \right\} (21)$$

Dieses Lösungssystem gilt unter der einschränkenden Voraussetzungen (20). Es darf also diesmal die Kopplung sowie die Raumfesselung der Kreisel in der  $\vartheta$ - und  $\psi$ -Ebene verschieden sein. Jedoch muß Gleichheit der Raumfesselungen der Kreisel in der  $\vartheta$ -Ebene bzw. in der  $\psi$ -Ebene verlangt werden. Außerdem müssen die Trägheitsmomente der Kreisel in der  $\vartheta$ - bzw. in der  $\psi$ -Ebene sowie auch die Kreiselimpulse gleich sein.

**3. Näherungslösungen für großen Impuls.** Die Lösungen der bisherigen Sonderfälle bieten zwar schon einen ganz guten Überblick; sie sind jedoch bei der ungeheuren Vielzahl von Möglichkeiten lange nicht ausreichend. Die charakteristische Gleichung enthält 11 Größen, die unabhängig voneinander ihre Wertebereiche durchlaufen können; die Mannigfaltigkeit der zu erwartenden Erscheinungen ist also außerordentlich groß. In jedem zahlenmäßig gegebenen Fall kann man zwar aus der charakteristischen Gleichung (4) die Frequenzgrößen numerisch ausrechnen; jedoch sind für eine Klärung der allgemeinen Verhältnisse Näherungsformeln wertvoller, die man durch gewisse Vernachlässigungen und Vereinfachungen gewinnt. Da nun in der Technik hauptsächlich schnelllaufende Kreisel verwendet werden, so sollen für sie genäherte Lösungen für die einzelnen Frequenzgrößen angegeben werden. Dabei sei unter „schnelllaufendem Kreisel“ und „großem Impuls“ verstanden, daß die in der charakteristischen Gleichung (4) vorkommenden Größen  $a^2$  und  $b^2$ , auch wenn sie mit den Verhältnisfaktoren  $\delta^2$  und  $\mu^2$  multipliziert sind, dort vernachlässigt werden sollen, wo sie additiv zu den Impulsgrößen  $k^2$  hinzukommen.

a) Näherungen für die Präzessionsfrequenzen. Da  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  für großen Impuls sehr kleine Größen sind, so wollen wir die beiden höchsten Potenzen  $\gamma^8$  und  $\gamma^6$  vernachlässigen und nur  $\gamma^4$ ,  $\gamma^2$  und das konstante Glied beibehalten. Die Koeffizienten wollen wir vereinbarungsgemäß vereinfachen, so daß dann als charakteristische Gleichung übrig bleibt

$$p_3 \gamma^4 + p_4 \gamma^2 + p_5 = 0.$$

Die Lösung ist

$$\gamma_{1,2}^2 = -\frac{p_4}{2 p_3} \pm \sqrt{\left(\frac{p_4}{2 p_3}\right)^2 - \frac{p_5}{p_3}}. \quad (22)$$

Hieraus können für alle Sonderfälle die Näherungen für großen Impuls gewonnen werden. So erhält man zum Beispiel aus (22) für den Fall  $k_1 = k_2$  und „gleiche Abmessungen“ die einfachen Formeln

$$\gamma_1 = i \frac{b^2}{k}, \quad \gamma_2 = i \frac{b^2 + 2 a^2}{k}, \quad (22 a)$$

ein Ergebnis, das man natürlich auch aus der Lösung (14) sofort hätte gewinnen können.

b) Näherungen für die Nutationsfrequenzen. Ganz entsprechend kann man bei der Näherungsrechnung für die beiden Nutationsfrequenzen verfahren. Für

hinreichend großen Impuls sind die Frequenzgrößen  $\gamma_3$  und  $\gamma_4$  sicher so groß, daß man unbedenklich das konstante Glied sowie das Glied mit  $\gamma^2$  in der charakteristischen Gleichung (4) streichen kann. Dann bleibt

$$p_1 \gamma^4 + p_2 \gamma^2 + p_3 = 0$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} p_1 &= \delta^4 \mu_1^2 \mu_2^2, \\ p_2 &= \delta^2 (k_2^2 + k_1^2 \mu_1^2 \mu_2^2), \\ p_3 &= k_1^2 k_2^2. \end{aligned}$$

Die Lösung nimmt die Form an

$$\gamma_3 = i \frac{k_1}{\delta}, \quad \gamma_4 = i \frac{k_2}{\delta \mu_1 \mu_2}. \quad (23)$$

Wegen des einfachen Baues der Formel wollen wir in diesem Fall die ursprünglichen dimensionsbehafteten Größen nach (3) wieder einführen. Wir erhalten dann für die Nutationsfrequenzen

$$n_3 = \frac{J_1}{\sqrt{\Theta_{x_1} \Theta_{y_1}}}, \quad n_4 = \frac{J_2}{\sqrt{\Theta_{x_2} \Theta_{y_2}}}. \quad (23a)$$

Das sind aber genau die Nutationsfrequenzen, die jeder Kreisel für sich haben würde, wenn er nicht gekoppelt wäre. Wir kommen also zu dem Satz: Für großen Impuls und nicht zu starke Kopplung haben gekoppelte Kreisel dieselben Nutationsfrequenzen wie die ungekoppelten Kreisel; jedoch findet durch die Kopplung eine Übertragung der Nutationsfrequenz des einen Kreisels auf den anderen statt, so daß bei jedem Kreisel beide Frequenzen auftreten.

**4. Bemerkung zur Stabilität der Bewegungen.** Die Frage nach der Stabilität der Bewegungen hängt wesentlich von der Gestalt der Wurzeln der charakteristischen Gleichung ab. Offenbar gibt es zwei Möglichkeiten, bei denen Instabilitäten auftreten können, erstens, wenn eine oder mehrere Wurzeln positiv reell oder komplex mit positivem Realteil sind, zweitens, wenn Mehrfachwurzeln auftreten und dadurch die vor den entsprechenden Lösungstermen stehenden Amplitudenfaktoren Polynome der Zeit sind.

Es läßt sich nun ganz allgemein zeigen, daß bei dem betrachteten Differentialgleichungssystem Instabilitäten durch reelle Wurzeln oder positive Realteile der komplexen Wurzeln nicht auftreten können<sup>1</sup>.

Weiter läßt sich zeigen, daß beim Vorhandensein von Doppelwurzeln die Glieder in den Amplitudenfaktoren verschwinden, die die Zeit  $t$  als Faktor haben. Der dadurch entstehende Mangel an verfügbaren Konstanten wird durch eine entsprechende Unbestimmtheit der bleibenden Konstanten ausgeglichen. Lediglich in dem Grenzfall, daß beide Kreisel in derselben Ebene keine Raumbesselung besitzen, brauchen die Faktoren der Zeit vor den Lösungstermen nicht zu verschwinden. Aber dann bedeutet das keine eigentliche Instabilität, sondern nur eine wandernde Gleichgewichtslage, um die dann die anderen stabilen Schwingungen erfolgen.

### III. Die Bahnkurven der Kreiselspitzen.

**1. Allgemeine Diskussion.** Die Bahnkurven, die die Spitzen der Kreiselachsen beschreiben, ergeben sich, wie aus Abschnitt I bekannt, durch Übereinanderlagern von vier elliptischen Schwingungen. Über die Achsenverhältnisse dieser einzelnen Ellipsen soll im folgenden eine Aussage gewonnen werden. Dazu müssen wir aus den Gleichungen (2) die Verhältnisse  $A/B$ ,  $A/C$ ,  $A/D$ ,  $B/D$  berechnen. Aus diesen Verhältnissen, deren Werte wegen ihrer Unübersichtlichkeit nicht erst hingeschrieben werden sollen, kann man folgendes ersehen:

<sup>1</sup> Siehe z. B. E. J. Routh, Essay on the stability of motion.

1. Die Verhältnisse  $A/C$ ,  $A/D$ ,  $B/D$  erscheinen in komplexer Form. Das ist klar, da sie ja Verhältnisse der Amplituden von je zwei zueinander senkrechten Schwingungen darstellen.  $A/B$  ist als Verhältnis der Amplituden  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  reell.

2. Beide Kreisel machen ähnliche Bewegungen, wenn  $A/C = B/D$  ist. Durch Vergleich sehen wir, daß dies eintritt für

$$k_1 = k_2, \quad \mu_1^2 = \mu_2^2 = 1, \quad b_1^2 = b_2^2, \quad b_3^2 = b_4^2,$$

also für zwei Kreisel mit gleichem Impuls, gleichen Trägheitsmomenten und gleichen Rauffesselungen in der  $\vartheta$ -Ebene und in der  $\psi$ -Ebene.

**2. Näherungen für großen Impuls.** Wie bei den Frequenzgrößen, so bringt auch bei den Amplitudenverhältnissen eine Beschränkung auf sehr großen Impuls erhebliche Vereinfachungen.

Wir betrachten zunächst die Amplitudenverhältnisse der Nutationsschwingungen und gehen hierzu mit den zuvor für die Frequenzgrößen errechneten Näherungsformeln in die aus (2) sich ergebenden Verhältniswerte ein und vernachlässigen die Größen  $a^2$  und  $b^2$  dort, wo sie additiv zu den Größen  $k^2$  hinzutreten. So kommt man zu sehr einfachen Formeln, die noch durchsichtiger werden, wenn man wieder mittels (3) die ursprünglichen dimensionsbehafteten Größen einführt, nämlich

$$\begin{aligned} \left(\frac{A}{C}\right)_{\gamma_3} &= \sqrt{\frac{\Theta_{y_1}}{\Theta_{y_1}}}, \\ \left(\frac{A}{C}\right)_{\gamma_4} &= \sqrt{\frac{\Theta_{x_2}}{\Theta_{y_2}}} \frac{c_1 J_2 \Theta_x + c_2 J_1 \Theta_{y_2}}{c_1 J_1 \Theta_{x_2} + c_2 J_2 \Theta_{y_1}}, \\ \left(\frac{B}{D}\right)_{\gamma_3} &= \sqrt{\frac{\Theta_{x_1}}{\Theta_{y_1}}} \frac{c_1 J_1 \Theta_{x_2} + c_2 J_2 \Theta_{y_1}}{c_1 J_2 \Theta_{x_1} + c_2 J_1 \Theta_{y_2}}, \\ \left(\frac{B}{D}\right)_{\gamma_4} &= \sqrt{\frac{\Theta_{x_2}}{\Theta_{y_2}}}. \end{aligned}$$

Da  $\gamma_3$  die Eigennutation des Kreisels I und  $\gamma_4$  die Eigennutation des Kreisels II ist, so sieht man: Jeder Kresel hat für die Frequenz, die ihm eigen ist und die er im ungekoppelten Fall allein zeigen würde, auch das Amplitudenverhältnis, das ihm eigen ist. Die durch die Kopplung übertragene Nutation hat aber ein Amplitudenverhältnis, das wesentlich von der Kopplung und den Impulsen abhängt.

Bei den Amplitudenverhältnissen der Präzessionen kommt man nicht zu so klaren Formeln, da ja schon die entsprechenden Näherungsformeln für die Frequenzgrößen sehr viel verwickelter sind, jedoch sieht man, daß die Trägheitsmomente nicht in die Rechnung eingehen, da die entsprechenden Glieder die Größenordnung  $1/k^2$  haben und so gegen die die Stabilitätsmomente  $b^2$  und  $a^2$  vernachlässigt werden können. Die Amplitudenverhältnisse der Präzessionsschwingungen hängen also nur noch von den Momenten der Rauffesselung und der Kopplung ab.

Rechnen wir im Sonderfall „gleicher Abmessungen“ und gleichen Impulses mit den Näherungsformeln (22a), so nehmen sämtliche Verhältnisse den Betrag eins an, d. h. die Präzessionsschwingungen sind für diesen Fall Kreisschwingungen.

#### IV. Grenzübergänge zu starren Kopplungen.

**1. Allgemeine Näherungslösungen.** Bei den in Abschnitt II, 3. gerechneten Näherungslösungen für großen Impuls ist stets in der charakteristischen Gleichung (4) eine Größe  $a^2$  oder  $b^2$  dort vernachlässigt worden, wo sie additiv zur Impulsgröße  $k^2$  hinzutritt. Diese Vernachlässigungen sind sicher überall erlaubt, wo die Kopplung durch nicht zu starke Zug- oder Torsionsfedern geschieht. Dagegen muß die Rechnung versagen, wenn zum Beispiel eine schwache Welle des Kreisels eine Kopplung mit den Massen der Hängung hervorbringt. Oder, wenn zwei Kreisel zwar in der einen Ebene mit Federn gekoppelt sind, jedoch durch eine starre, in Wirklichkeit aber

immer etwas elastische Verbindung gezwungen werden, in der anderen Ebene stets gleiche Ausschläge zu machen. In diesen Fällen können nämlich die Kopplungsgrößen oder auch die Raumfesselungsgrößen sehr große Werte annehmen. Dann wird man aus einer Abschätzung der Größenordnungen leicht ersehen, welche Vernachlässigungen in der charakteristischen Gleichung gemacht werden dürfen. Liegt eine Kopplung durch eine elastische Kreiselwelle oder durch die unvermeidliche Elastizität der Aufhängung des Kreisels vor, so wird im allgemeinen bei praktischen Problemen der dieser Kopplung entsprechende Koeffizient groß sein gegen die Impulsgrößen, und diese werden wieder groß sein gegen 1.

Für die genäherte Lösung der charakteristischen Gleichung kann man nun die Tatsache ausnutzen, daß die Wurzeln  $\gamma$  oft sehr verschiedene Größenordnungen haben. Sind die  $\gamma$  klein gegen eins, so kann man sicher die beiden höchsten Potenzen in (4) fortlassen und erhält aus der dann zurückbleibenden quadratischen Gleichung für  $\gamma^2$  eine Näherungslösung. Wenn dagegen die Wurzeln  $\gamma$  große Werte annehmen, so sind die beiden letzten Glieder, das Glied mit  $\gamma^2$  und das konstante Glied fortzulassen. Nachträglich muß man sich dann überzeugen, ob die gemachten Vernachlässigungen wirklich erlaubt waren. Man bekommt auf die angegebene Weise aus der charakteristischen Gleichung (4) die Näherungslösungen

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{1,2}^2 &= -\frac{p_4}{2p_3} \pm \sqrt{\frac{p_4^2 - 4p_3p_5}{4p_3^2}}, \\ \gamma_{3,4}^2 &= -\frac{p_2}{2p_1} \pm \sqrt{\frac{p_2^2 - 4p_1p_3}{4p_1^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

In einigen Fällen haben die Wurzeln alle eine verschiedene Größenordnung, so daß man sich dann die Rechnung noch weiter vereinfachen kann, indem man einfach aus der charakteristischen Gleichung je zwei Glieder herausgreift und daraus jede Wurzel einzeln bestimmt. Auf diese Weise kommt man zu der Lösung

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1^2 &= -\frac{p_5}{p_4}, & \gamma_3^2 &= -\frac{p_3}{p_2}, \\ \gamma_2^2 &= -\frac{p_4}{p_3}, & \gamma_4^2 &= -\frac{p_2}{p_1}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Diese Näherungslösungen haben vor allem dort eine Bedeutung, wo es sich darum handelt, den Einfluß der verschiedenen Größen auf den Gang der Wurzeln zu erkennen und um eine allgemeine Übersicht über die Eigenschaften des Kreiselverbandes zu gewinnen.

An zwei Beispielen soll gezeigt werden, wie vielseitig und aufschlußreich das Verfahren sein kann.

**2. Kopplung in einer Ebene starr.** Die Kopplung sei so beschaffen, daß die Kreisel zum Beispiel in der  $\psi$ -Ebene gleiche Bewegungen machen müssen. Dann wird  $c_2$  und damit  $a_2^2$  der Theorie nach unendlich groß sein. Wegen der Elastizität jedoch wird es einen zwar sehr großen, aber doch endlichen Wert haben. Dabei ist es gleichgültig, wo man diese Elastizität lokalisiert, ob in der Kreiselwelle, im Kopplungsmechanismus oder in der Aufhängung; nur muß man beachten, was dann unter den verschiedenen Trägheitsmomenten gemeint ist.

Wegen  $a_2^2 \gg 1$  können wir in der charakteristischen Gleichung (4) setzen

$$b_3^2 + a_2^2 \approx a_2^2, \quad b_4^2 + a_2^2 \approx a_2^2,$$

aber

$$(b_3^2 + a_2^2)(b_4^2 + a_2^2) - a_2^4 \approx a_2^2(b_3^2 + b_4^2).$$

Gegen diese Glieder sollen alle additiven Glieder von der Größenordnung  $a_1^2$ ,  $b_1^2$ ,  $\delta^2$ ,  $\mu^2$  vernachlässigt werden, nicht jedoch die Glieder mit  $h^2$ . Denn wir wollen uns auch hier auf den technisch wichtigen Fall des schnellen Kreisels beschränken, so daß wir auch die schon in Abschnitt II, 3. besprochenen Vernachlässigungen für „großen

Impuls“ gelten lassen dürfen. Wir behalten demnach von der charakteristischen Gleichung (4) die Koeffizienten

$$\begin{aligned} p_1 &= \mu_1^2 \mu_2^2 \delta^4, \\ p_2 &= a_2^2 \mu_1^2 \delta^2 (\mu_2^2 + 1) + \delta^2 (k_2^2 + \mu_1^2 \mu_2^2 k_1^2), \\ p_3 &= a_2^2 (k_2^2 + \mu_1^2 k_1^2) + k_1^2 k_2^2, \\ p_4 &= a_2^2 [(k_1 + k_2)^2 \cdot a_1^2 + k_1^2 b_3^2 + k_2^2 b_1^2], \\ p_5 &= a_2^2 (b_3^2 + b_4^2) [b_1^2 b_2^2 + a_1^2 (b_1^2 + b_2^2)]. \end{aligned}$$

Setzt man diese Koeffizienten in (24) ein, so findet man, daß die Größen  $4 p_3 p_5$  bzw.  $4 p_1 p_3$  ihrerseits klein sind gegen  $p_4^2$  bzw.  $p_2^2$ , so daß man tatsächlich die Rechnung noch weiter vereinfachen kann, indem man (25) benutzt. Durch Einsetzen sieht man nachträglich leicht, weshalb eine solche Vereinfachung der Lösung möglich war. Alle Wurzeln haben nämlich eine verschiedene Größenordnung, und zwar von  $\gamma_1^2$  bis  $\gamma_4^2$  die Größenordnungen  $1/k^2$ ,  $1$ ,  $k^2$ ,  $a_2^2$ .

Ohne das Ergebnis erst in der dimensionslosen Form hinzuschreiben, führen wir wieder die ursprünglichen dimensionsbehafteten Größen ein und geben, um das Ergebnis der Anschauung näher zu bringen, gleich die Schwingungszeiten an:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 2\pi \sqrt{\frac{r_2 J_1^2 + r_1 J_2^2 + c_1 (J_1 + J_2)^2}{(r_3 + r_4) [r_1 r_2 + c_1 (r_1 + r_2)]}}, \\ T_2 &= 2\pi \sqrt{\frac{J_1^2 \Theta_{y_2} + J_2^2 \Theta_{y_1} + \frac{1}{c_2} \cdot J_1^2 J_2^2}{r_2 J_1^2 + r_1 J_2^2 + c_1 (J_1 + J_2)^2}}, \\ T_3 &= 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_{y_1} \Theta_{y_2} (\Theta_{x_1} + \Theta_{x_2}) + \Theta_{x_1} \Theta_{y_1} \frac{1}{c_2} J_2^2 + \Theta_{x_2} \Theta_{y_2} \frac{1}{c_2} J_1^2}{J_1^2 \Theta_{y_2} + J_2^2 \Theta_{y_1} + \frac{1}{c_2} \cdot J_1^2 J_2^2}}, \\ T_4 &= 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{c_2} \Theta_{x_1} \Theta_{x_2}}{\Theta_{x_1} + \Theta_{x_2} + \frac{\Theta_{x_2} J_1^2}{\Theta_{y_1} c_2} + \frac{\Theta_{x_1} J_2^2}{\Theta_{y_2} c_2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Die Größen  $J^2/c_2$  sind hier die Verbesserungsglieder, die für die Elastizität in Rechnung zu setzen sind. Wenn auch  $c_2$  sehr große Werte haben mag, so kann doch  $J^2/c^2$  bei schnellen Kreiseln so groß werden, daß es nicht vernachlässigt werden darf.

Nachträglich kann man in den Formeln (26) den Grenzübergang  $c_2 \rightarrow \infty$  machen und bekommt dann die Formeln der Schwingungszeiten bei absolut starrer Kopplung in der  $\psi$ -Ebene.

Schließlich sei über die Größenordnung der Schwingungen noch folgendes bemerkt.  $T_1$  ist eine typische Präzessionsschwingungszeit, die in dieser Näherung unabhängig von elastischen Wirkungen der Kopplungen ist. Die Schwingungszeit  $T_2$  verdient wohl die meiste Beachtung. Sie liegt in der Größenordnung einer normalen Pendelschwingung und wird für  $J_1 = J_2$  vollkommen unabhängig vom Impuls, wenn man von dem Verbesserungsglied absieht. Das ist durchaus nicht selbstverständlich und zeigt, daß auch bei schnelllaufenden Kreiseln Pendelschwingungen um Achsen, die zur Kreiselachse senkrecht sind, auftreten können. Der Kreiselverband verhält sich also so, als ob die Kreisel gar nicht liefen. Durch das Verbesserungsglied wird die Schwingung langsamer.  $T_3$  ist eine typische Nutationsschwingungszeit, bei der im Zähler und im Nenner Zusatzglieder auftreten, so daß sich die elastischen Wirkungen der Kopplungen teilweise aufheben. Da bei  $T_4$  der Faktor  $1/c_2$  auftritt, so hat  $T_4$  die Größenordnung der bei Schwingungen von elastischen Stäben auftretenden Schwingungszeiten und grenzt schon an das Gebiet der Akustik.

**3. Kopplung in beiden Ebenen starr.** Dieser Fall soll hauptsächlich wegen der Verbesserungsglieder angegeben werden; denn für völlig starre Kopplung in beiden



Ebenen brauchte man nicht das Verfahren über die charakteristische Gleichung (4) anzuwenden, sondern könnte einfach aus dem Gleichungssystem (1) die Lösung herleiten.

Wir geben den Kopplungskoeffizienten  $c_1$  und  $c_2$  und damit auch den dimensionslosen Kopplungsgrößen  $a_1^2$  und  $a_2^2$  sehr große, aber endliche Werte. Dann führen wir wie in dem zuvor besprochenen Fall Vernachlässigungen ein. Man erhält so aus (4a) die Koeffizienten

$$\begin{aligned} p_1 &= \mu_1^2 \mu_2^2 \delta^4, \\ p_2 &= \delta^2 [\mu_1^2 a_2^2 (\mu_2^2 + 1) + \mu_2^2 \delta^2 a_1^2 (\mu_1^2 + 1) + k_2^2 + \mu_1^2 \mu_2^2 k_1^2], \\ p_3 &= k_2^2 (a_2^2 + \delta^2 a_1^2) + k_1^2 k_2^2 + k_1^2 (\mu_1^2 a_2^2 + \mu_2^2 \delta^2 a_1^2) + \delta^2 a_1^2 a_2^2 (\mu_1^2 + 1) (\mu_2^2 + 1), \\ p_4 &= a_1^2 a_2^2 (k_1 + k_2)^2, \\ p_5 &= a_1^2 a_2^2 (b_3^2 + b_4^2) (b_1^2 + b_2^2). \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Frequenzgrößen kann man die Gleichungen (24) und (25) benutzen. Da  $\gamma_1$  die Größenordnung  $1/k$  hat,  $\gamma_2$  aber die Größenordnung  $k$ , so können wir zur Bestimmung dieser beiden Frequenzgrößen die einfachen Formeln (25) anwenden. Für  $\gamma_3$  und  $\gamma_4$  jedoch muß Gleichung (24) genommen werden. Diese beiden Schwingungen sollen nicht erst hingeschrieben werden; doch sieht man schon aus ihrer Größenordnung  $a_1^2$ , daß es zwei sehr schnelle Schwingungen sind, deren Frequenz noch über der der Nutation liegt. Für die beiden anderen Schwingungen bekommen wir nach Einführung der ursprünglichen Größen die Schwingungszeiten

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 2\pi \frac{J_1 + J_2}{\sqrt{(r_1 + r_2)(r_3 + r_4)}}, \\ T_2 &= 2\pi \sqrt{\frac{(\Theta_{x_1} + \Theta_{x_2})(\Theta_{y_1} + \Theta_{y_2}) + J_1^2 \left( \frac{\Theta_{x_2}}{c_2} + \frac{\Theta_{y_2}}{c_1} \right) + J_2^2 \left( \frac{\Theta_{x_1}}{c_2} + \frac{\Theta_{y_1}}{c_1} \right) + \frac{J_1^2 J_2^2}{c_1 c_2}}{J_1 + J_2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Daraus sehen wir, daß die Präzessionsschwingung  $T_1$  in erster Näherung nicht durch elastische Einflüsse gestört wird, wohl aber die Nutationsschwingung  $T_2$ , bei der noch drei Verbesserungsglieder auftreten.

Wir wollen die Formeln (27) noch auf einen besonderen Fall anwenden, nämlich auf ein Kreiselpendel, das in einem Kardanhänge gelagert ist. Die Kreiselachse soll senkrecht stehen und die Kardanringe sollen dem Kreisel Bewegungsfreiheit um die waagerechten Achsen geben. Wir nehmen an, die Kreiselwelle sei etwas elastisch und vermittele so eine Kopplung zwischen den Massen der Aufhängung und dem Kreiselkörper. Mit dem Zeiger 1 wollen wir die Hängung, mit 2 den Kreisel selbst bezeichnen. Dann haben wir in unseren Formeln zu setzen

$$\begin{aligned} J_1 &= 0 \quad (= \text{Impuls der Hängung}), \\ J_2 &= J \quad (= \text{Impuls der Kreiselscheibe}), \\ \Theta_{x_2} &= \Theta_{y_2} = \Theta_k \quad (= \text{Trägheitsmoment der Kreiselscheibe um die Querachse}), \\ \Theta_{x_1} + \Theta_k &= \Theta_x \quad (= \text{Trägheitsmoment des gesamten Systems um die } x\text{-Achse}), \\ \Theta_{y_1} + \Theta_k &= \Theta_y \quad (= \text{Trägheitsmoment des gesamten Systems um die } y\text{-Achse}), \\ r_1 + r_2 &= G_1 h_1 \quad (= \text{Stabilitätsmoment des Systems um die } x\text{-Achse}), \\ r_3 + r_4 &= G_2 h_2 \quad (= \text{Stabilitätsmoment des Systems um die } y\text{-Achse}), \\ c_1 &= c_2 = c \quad (= \text{Kopplungskoeffizient der elastischen Kreiselwelle}). \end{aligned}$$

Damit bekommen wir die Schwingungszeiten

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi J}{\sqrt{G_1 h_1 G_2 h_2}}, \\ T_2 &= \frac{2\pi \sqrt{\Theta_x \Theta_y + \frac{J^2}{c} (\Theta_{x_1} + \Theta_{y_1})}}{J}. \end{aligned} \right\} \quad (27a)$$

Die Präzession bleibt also unbeeinflusst, die Nutation jedoch wird langsamer gegenüber der Nutation bei völlig starrer Welle, und zwar um so mehr, je größer die Trägheitsmomente der Kardanringe sind, und je kleiner  $c$  ist. Außerdem fällt das Verbesserungsglied um so mehr ins Gewicht, je größer der Impuls ist.

Schließlich sei noch das Ergebnis für einen anderen Fall bekanntgegeben ohne Durchführung der Rechnung im einzelnen. Ein Kreisel mit etwas elastischer Welle sei so in einem einzelnen Kardanring aufgehängt, daß er nur noch zwei Freiheitsgrade besitzt. Die Ausrechnung der Schwingungszeit mit starrer Welle ergibt einfach

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_y}{G_1 h_1}},$$

also eine vom Impuls unabhängige Schwingungszeit. Rechnet man dagegen nach der angegebenen Methode, so bekommt man

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_y + \frac{J^2}{c}}{G_1 h_1}}. \quad (27b)$$

Wir haben also eine Abhängigkeit vom Impuls. Das ist aber genau dieselbe Formel, die schon A. Föppl<sup>1</sup> für eine Kreiselpendel mit elastisch nachgiebiger Stützung auf anderem Wege abgeleitet hat.

**4. Allgemeine Bemerkung.** Die in den beiden angeführten Beispielen bei den Koeffizienten  $p_i$  vernachlässigten Glieder könnte man ohne jede Schwierigkeit in der weiteren Rechnung beibehalten. Jedoch werden dadurch die Gleichungen nur unübersichtlicher. Auch würde die dadurch erreichte höhere Genauigkeit wegen der Fehler der genäherten Lösungsmethode ohne Bedeutung sein. Man muß sich jedoch hüten, nachträglich in den Lösungen Grenzübergänge (z. B.  $k \rightarrow 0$ ) zu machen, weil dann in vielen Fällen gerade den vernachlässigten Gliedern die ausschlaggebende Bedeutung zukommt. Es ist deshalb vorteilhafter und führt auch schneller zum Ziel, wenn man in jedem einzelnen Falle von der charakteristischen Gleichung (4) ausgeht und dort die Möglichkeit von Vernachlässigungen in den Koeffizienten  $p_i$  nachprüft.

Als allgemeine Eigenschaft der Wurzeln  $\gamma_i$  können wir feststellen: Mit stärker werdendem Kopplungsgrad nehmen die Wurzeln größere Werte an, d. h. die Schwingungen werden schneller. Und zwar können so die Frequenzen in ganz andere Größenordnungen kommen. Wir bezeichnen die ganz langsamen Schwingungen (bis zu  $10^{-1}$  Hertz) als Präzessionen; das sind Schwingungen, deren Frequenz im wesentlichen durch den Kreiselimpuls und die Stabilitätsmomente bestimmt ist. Schwingungen, deren Frequenz die Größenordnung 1 Hertz hat, wollen wir kurz als Pendelschwingungen bezeichnen; sie sind hauptsächlich durch Stabilitätsmomente und Trägheitsmomente gegeben. Die darauffolgenden, von Impuls und Trägheitsmomenten abhängigen Schwingungen von der Größenordnung etwa 10 Hertz sollen Nutationen heißen. Schließlich seien die ganz schnellen Zitterschwingungen von der Frequenz etwa 100 Hertz und mehr als akustische Schwingungen bezeichnet. Diese sind durch die elastischen Eigenschaften der „starr“ Kopplungen bestimmt.

Tragen wir uns diese Größenordnungen der Schwingungen über dem Grad der Kopplung auf, so kommen wir zu der schematischen Abb. 8. Diese zeigt anschaulich eine wesentliche Eigenschaft der einzelnen Schwingungen. Die auf der Ordinate

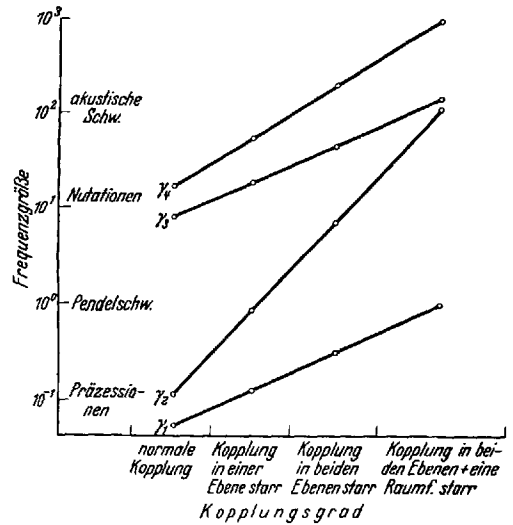


Abb. 8.

<sup>1</sup> A. Föppl, Technische Mechanik, Bd. VI, § 40.

aufgetragenen Zahlen sind nicht Werte in Hertz, sondern Maßzahlen für die dimensionslosen Frequenzgrößen  $\gamma_j$ . Die Größe ist jedoch so gewählt worden, daß sie mit den oben angegebenen Werten übereinstimmt. Es ist sofort ersichtlich, daß mit stärker werdendem Kopplungsgrad alle Schwingungen schneller werden. So durchläuft z. B. die Frequenzgröße  $\gamma_2$  für die der Abbildung zugrunde gelegte Kopplungsskala den ganzen Bereich der Schwingungen von den Präsessionen über die Pendelschwingungen und die Nutationen bis zu den akustischen Schwingungen.

## V. Einfluß der Reibung.

**1. Aufstellung der charakteristischen Gleichung unter Berücksichtigung der Lagerreibung in den Kardanringen.** Das Gleichungssystem (1) ist natürlich ein idealisierter Grenzfall. In Wirklichkeit wird stets etwas Reibung in den Lagern der Kardanringe vorhanden sein, die die Schwingungen in bestimmter Weise beeinflusst. Die Art dieses Einflusses soll im folgenden behandelt werden.

Es sei angenommen, daß beide Kreisel sowohl um die  $x$ -Achse als auch um die  $y$ -Achse Reibungen in den Lagern der Kardanringe besitzen, deren Koeffizienten wir mit  $s_1$  bis  $s_4$  bezeichnen wollen. Die Reibungsmomente selbst werden der Winkelgeschwindigkeit proportional angenommen. Damit geht das Gleichungssystem (1) über in

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{y_1} \frac{d^2 \vartheta_1}{dt^2} - J_1 \frac{d \psi_1}{dt} + s_1 \frac{d \vartheta_1}{dt} + r_1 \vartheta_1 - c_1 (\vartheta_2 - \vartheta_1) &= 0, \\ \Theta_{y_2} \frac{d^2 \vartheta_2}{dt^2} - J_2 \frac{d \psi_2}{dt} + s_2 \frac{d \vartheta_2}{dt} + r_2 \vartheta_2 - c_1 (\vartheta_1 - \vartheta_2) &= 0, \\ \Theta_{x_1} \frac{d^2 \psi_1}{dt^2} + J_1 \frac{d \vartheta_1}{dt} + s_3 \frac{d \psi_1}{dt} + r_3 \psi_1 - c_2 (\psi_2 - \psi_1) &= 0, \\ \Theta_{x_2} \frac{d^2 \psi_2}{dt^2} + J_2 \frac{d \vartheta_2}{dt} + s_4 \frac{d \psi_2}{dt} + r_4 \psi_2 - c_2 (\psi_1 - \psi_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Die Lösung dieses Gleichungssystemes verläuft formal genau so, wie im reibungslosen Fall. Nur sind jetzt außer den dimensionslosen Größen (3) noch vier dimensionslose Reibungsgrößen  $\sigma_j$  bis  $\sigma_4$  einzuführen, definiert durch

$$\sigma_j = \frac{s_j \nu}{c_0} \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

So kommt man zu der charakteristischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} \gamma^2 + \sigma_1 \gamma + b_1^2 + a_1^2 & -a_1^2 & -k_1 \gamma & 0 \\ -a_1^2 & \mu_1^2 \gamma^2 + \sigma_2 \gamma + b_2^2 + a_1^2 & 0 & -k_2 \gamma \\ k_1 \gamma & 0 & \delta^2 \gamma^2 + \sigma_3 \gamma + b_3^2 + a_2^2 & -a_2^2 \\ 0 & k_2 \gamma & -a_2^2 & \mu_2^2 \delta^2 \gamma^2 + \sigma_4 \gamma + b_4^2 + a_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

oder ausgerechnet

$$p_1 \gamma^8 + p_2 \gamma^7 + p_3 \gamma^6 + p_4 \gamma^5 + p_5 \gamma^4 + p_6 \gamma^3 + p_7 \gamma^2 + p_8 \gamma + p_9 = 0. \quad (29)$$

Von einer Angabe der Koeffizienten sei hier abgesehen, da sie sich als sehr lange und äußerst unübersichtliche Ausdrücke erweisen.

**2. Näherungslösung für kleine Reibungen.** Sieht man von dem Fall des absichtlich gebremsten Kreisels (z. B. Schiffskreisel) ab, so wird im allgemeinen die Lagerreibung klein sein gegen die Kreiselkräfte und die Federkräfte. Da es keine Möglichkeit gibt, die Gleichung (29) auf algebraischen Wege zu lösen, so muß man sich durch irgendein Näherungsverfahren die Wurzeln  $\gamma_1$  bis  $\gamma_8$  verschaffen. Das kann für kleine Reibung auf folgende Weise geschehen. Die Frequenzgröße  $\gamma$  sei als Funktion der Reibungsgröße  $\sigma$  aufgefaßt. Dann entwickeln wir  $\gamma = f(\sigma)$  für den Punkt  $\sigma = 0$  in eine Taylorreihe

$$\gamma(\sigma) = \gamma(0) + \sigma \frac{d\gamma(0)}{d\sigma} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2\gamma(0)}{d\sigma^2} + \dots$$

Die Lösung  $\gamma(0)$  für den reibungslosen Fall ist aus dem Vorhergehenden bekannt. Die Differentialquotienten aber können wir uns nach den Regeln der Differentiation von impliziten Funktionen aus der Gleichung (29) bestimmen. Bezeichnen wir diese Gleichung abkürzend mit  $P=0$ , so sind die Differentialquotienten

$$\frac{d\gamma}{d\sigma} = -\frac{\frac{dP}{d\sigma}}{\frac{dP}{d\gamma}},$$

$$\frac{d^2\gamma}{d\sigma^2} = -\frac{\left(\frac{dP}{d\sigma}\right)^2 \frac{d^2P}{d\gamma^2} - 2 \frac{dP}{d\sigma} \frac{dP}{d\gamma} \frac{d^2P}{d\sigma d\gamma} + \left(\frac{dP}{d\gamma}\right)^2 \frac{d^2P}{d\sigma^2}}{\left(\frac{dP}{d\gamma}\right)^3}.$$

Damit können wir schrittweise die Funktion  $\gamma(\sigma)$  aufbauen.

Erster Schritt. Bilden wir aus (29) den Differentialquotienten  $d\gamma/d\sigma$  und setzen darin  $\sigma=0$ , so bleiben nur noch gerade Potenzen von  $\gamma(0)$  stehen. Da aber, wie zuvor bewiesen wurde, die Wurzeln  $\gamma(0)$  stets rein imaginär sind, so ist  $d\gamma/d\sigma$  reell. Der erste Schritt liefert also den Realteil zu den bisher rein imaginären Wurzeln  $\gamma$ , d. h. wir bekommen gedämpfte Schwingungen, deren Frequenz (Imaginärteil von  $\gamma$ ) in erster Näherung ungeändert bleibt.

Zweiter Schritt. Im Ausdruck für  $d^2\gamma/d\sigma^2$  wird, wie man sich durch Ausrechnen leicht überzeugt, der Zähler reell, während der Nenner rein imaginär wird; also ist  $d^2\gamma/d\sigma^2$  auch rein imaginär. Demnach liefert die zweite Näherung keinen Beitrag zur Dämpfung der Schwingungen, sondern lediglich eine Verbesserung der Frequenz.

Wir können nunmehr in zweiter Näherung die Lösungen schreiben

$$\gamma(\sigma) = \sigma \frac{d\gamma(0)}{d\sigma} \pm \left[ \gamma(0) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2\gamma(0)}{d\sigma^2} \right]. \quad (30)$$

Dabei liefert das erste Glied, der Realteil, die Dämpfung und das zweite Glied, der Imaginärteil, die Frequenz. Wir erhalten also jetzt acht komplexe Wurzeln  $\gamma$ , von denen je zwei konjugiert zueinander sind.

## VI. Versuche mit kraftgekoppelten Kreiseln.

**I. Beschreibung der Apparatur.** Um die theoretischen Ergebnisse auch experimentell zu bestätigen, wurden im Institut für angewandte Mechanik der Universität Göttingen Versuche durchgeführt. Es wurde eine Apparatur gebaut, wie sie Abb. I gezeigt hat. An den Kreiseln waren Einrichtungen vorgesehen, die das Festhalten eines oder auch beider Kreisel um eine der beiden Drehachsen gestatten, sowie eine starre Verbindung beider Kreisel in der  $\psi$ -Ebene, so daß stets  $\psi_1 = \psi_2$  sein muß.

Als Antriebsmotoren sind Nebenschlußmotoren verwendet worden. Eine besondere Spannungsteilerschaltung ermöglichte ein bequemes Einstellen sowie eine große Veränderlichkeit der Drehzahlen der Kreisel (von 0 bis 50 in der Sekunde). Außerdem waren noch Umschalter für eine Änderung des Drehsinnes jedes Kreisels angebracht.

Zur Ermittlung der Schwingungen des Systemes wurde ein Schreibgerät angebaud, so daß die Schwingungskurven von den Kreiseln selbsttätig aufgezeichnet wurden. Dazu war an dem um die  $x$ -Achse (Hochachse) drehbaren Kardanring ein Aluminiumwinkel angebracht, der an einer Blattfeder vorn den Schreibstift trägt. Eine Rändelschraube gestattet ein bequemes Einstellen des richtigen Schreibdruckes. Als Schreibstift wurde ein mit Tinte gefülltes Glasröhrchen benutzt, das zu einer sehr feinen Spitze ausgezogen war. Auf diese Weise war es möglich, die störende Reibung zwischen Schreibstift und Papier auf ein Mindestmaß zu beschränken. In gleicher Weise wurden von einem Relais, das von einer Uhr betätigt wurde, Sekundenmarken auf den ablaufenden Papierstreifen geschrieben. Schließlich war noch ein Bleischreibstift vorgesehen, der die Gleichgewichtslage des Systemes auf dem Papier einzeichnete. Das geschah zur Erleichterung des Auswertens der aufgezeichneten Schwingungszüge.

Die Geschwindigkeit des waagrecht auf einem Schreibtischchen vorbeilaufenden Papiers konnte durch verschiedene Übersetzungen sowie durch die Veränderlichkeit der Drehzahlen des Antriebsmotors in sehr weiten Grenzen abgeändert werden. Das war nötig, um einerseits die sehr schnellen Nutationsschwingungen (bis zu  $30 \text{ sec}^{-1}$ ) und andererseits die langsamen Präzessionsschwingungen (bis zu etwa  $1/50 \text{ sec}^{-1}$ ) in gut auswertbarer Weise auf das Papier zu bringen (Abb. 9 zeigt noch einmal die gesamte betriebsfertige Apparatur).

**2. Durchführung der Versuche.** Um einen gleichmäßigen Gang der Kreisel zu bekommen, wurden die Motoren zunächst durch etwa halbstündiges Anlaufenlassen auf Betriebstemperatur gebracht. Dann wurde die zu dem Versuch notwendige Drehzahl an

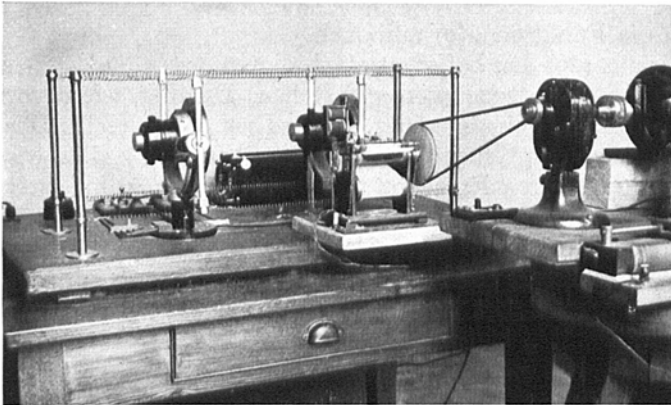


Abb. 9. Gesamtansicht der Apparatur.

dem auf Drehzahl geeichten Spannungsteilerwiderstand eingestellt und schließlich mit einer Stroboskopscheibe und Stoppuhr geprüft.

Je nach den Anfangsbedingungen bekommt man irgendwelche Schwingungen des Systemes. Man kann durch geschickte Art des Anstoßens der Kreisel erreichen, daß nicht alle Schwingungen gleichzeitig auftreten, sondern nur jeweils zwei oder auch nur eine allein. Dadurch wird das Auswerten

der Schwingungsdiagramme erheblich vereinfacht. In manchen Fällen jedoch muß man die Übereinanderlagerung verschiedener Schwingungen mit in Kauf nehmen.

Ist nur je eine Schwingung aufgezeichnet, so gestaltet sich das Auswerten einfach. Treten zwei übereinandergelagerte Schwingungen auf, so kann man in zwei Grenzfällen leicht zu den Ergebnissen kommen. Wenn nämlich erstens die Frequenzen der übereinandergelagerten Schwingungen annähernd gleich sind, also wenn Schwebungen auftreten, und zweitens, wenn die Frequenzen der übereinandergelagerten Schwingungen sehr voneinander verschieden sind, also eine schnelle Schwingung über einer langsamen liegt. Im ersten Falle kann man nach den bekannten Formeln aus der Frequenz der Schwebung und der Frequenz der Schwingung die Einzelfrequenzen bestimmen. Im zweiten Falle aber kann man die schnelle Schwingung als Einzelschwingung mit langsam wandernder Gleichgewichtslage auffassen und so mit guter Genauigkeit ausmessen.

Im allgemeinen Fall hat es sich als zweckmäßig herausgestellt, mit Hilfe von graphischen Methoden die übereinandergelagerten Schwingungen zu trennen, und zwar in der Weise, daß aus den Umkehrpunkten der schnelleren Schwingung unter Berücksichtigung der immer vorhandenen Dämpfung die Durchschlagpunkte konstruiert wurden und aus diesen dann durch Verbinden bzw. Interpolieren die Durchschlagpunkte der langsameren Schwingung durch die auf dem Papier mit aufgezeichnete Gleichgewichtslage. Die so erzielte Genauigkeit reicht vollkommen aus, sie liegt wenigstens innerhalb der Grenzen, die durch die unvermeidlichen Versuchsfehler bedingt sind.

**3. Ergebnisse der Versuche.** Für die ersten Versuche wurden die Verhältnisse so gewählt, daß die Raumfesselungen sowie die Kopplungen unter sich in den verschiedenen Ebenen gleich waren, also

$$b_1^2 = b_2^2 = b_3^2 = b_4^2 = b^2, \quad a_1^2 = a_2^2 = a^2.$$

Dabei wurde bei allen Ausrechnungen zu den Versuchen die charakteristische Federkonstante  $c_0$ , deren Größe ja beliebig angenommen werden kann, so gewählt, daß stets  $b^2 = 1$  wurde. Dieser Wert gilt, wenn es nicht bei den einzelnen Abbildungen ausdrücklich anders erwähnt wird, für alle folgenden Kurvenbilder.

Den einfachsten Fall zeigt Abb. 10, die die Frequenzen  $\gamma = f(k)$  bei verschiedenen Kopplungen  $a^2$  und gleich großen und gleichgerichteten Impulsen der beiden Kreisel darstellt. Nur die langsamen Schwingungen, also die Präzessionen sind wiedergegeben. Für nichtgekoppelte Kreisel, also  $a^2 = 0$  gibt die untere Kurve den theoretischen Verlauf, während die eingezeichneten Kreise den gemessenen Werten entsprechen. Nach den Formeln (14), die wir auf diesen Fall anwenden können, muß diese Kurve auch für alle anderen Werte von  $a^2$  gelten. Das zeigen auch die Versuche. Nur sind die Werte, die sich aus den Messungen bei gekoppelten Kreiseln ergeben, für die langsamere Präzession nicht mit eingetragen, da sie bei dem gewählten Maßstab überhaupt nicht von den bei ungekoppelten Kreiseln gemessenen Werten zu unterscheiden waren. Bei den Kopplungsgrößen  $a^2 = 0,66$  und  $a^2 = 2,12$  kommen zu der Grundpräzession

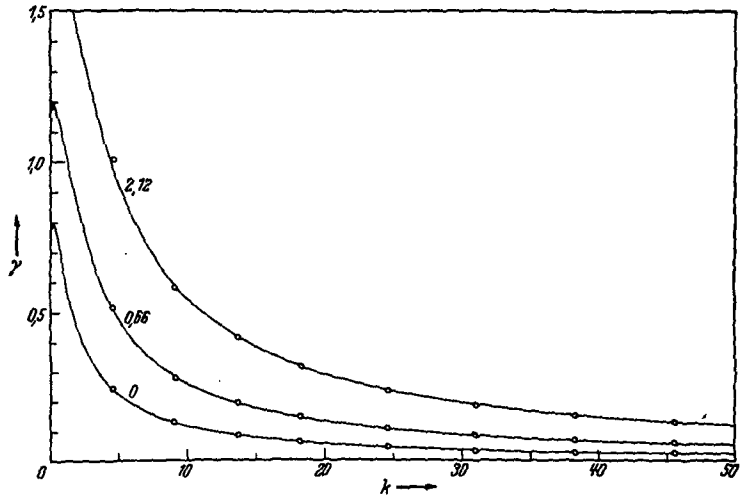


Abb. 10. Präzessionskurven  $\gamma = f(k)$  bei gleich großen, gleichgerichteten Impulsen der Kreisel für verschiedene Kopplungen. Die angeschriebenen Zahlen bezeichnen die Größe  $a^2$ .

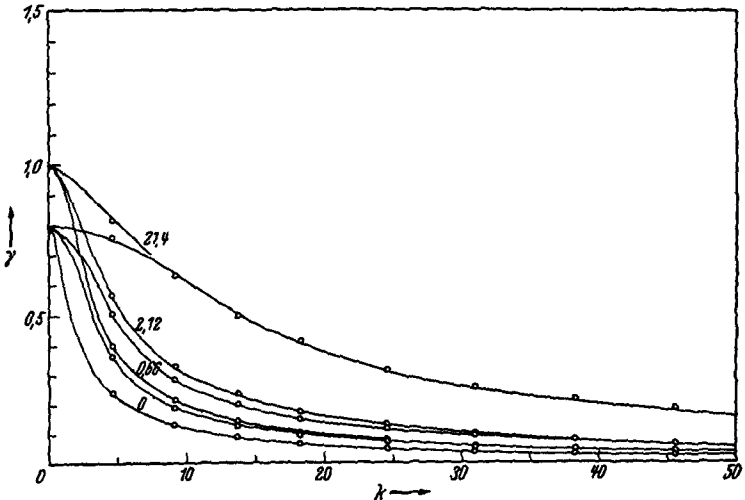


Abb. 11. Präzessionskurven  $\gamma = f(k)$  bei gleich großen, entgegengesetzt gerichteten Impulsen der Kreisel für verschiedene Kopplungen. Die angeschriebenen Zahlen bezeichnen die Größe  $a^2$ .

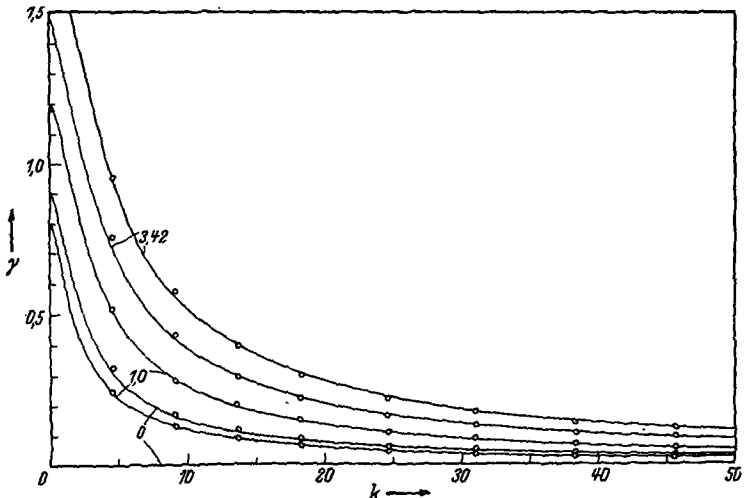


Abb. 12. Präzessionskurven  $\gamma = f(k)$  bei gleich großen, gleichgerichteten Impulsen der Kreisel für verschiedene Raumfassungen. Die angeschriebenen Zahlen bezeichnen die Größe  $b^2$ .

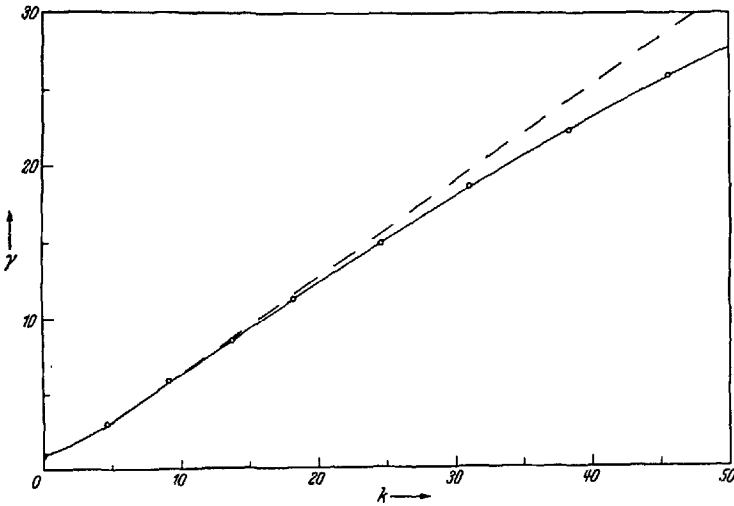


Abb. 13. Kurve der Grundnutation  $\gamma_s = f(k)$ .

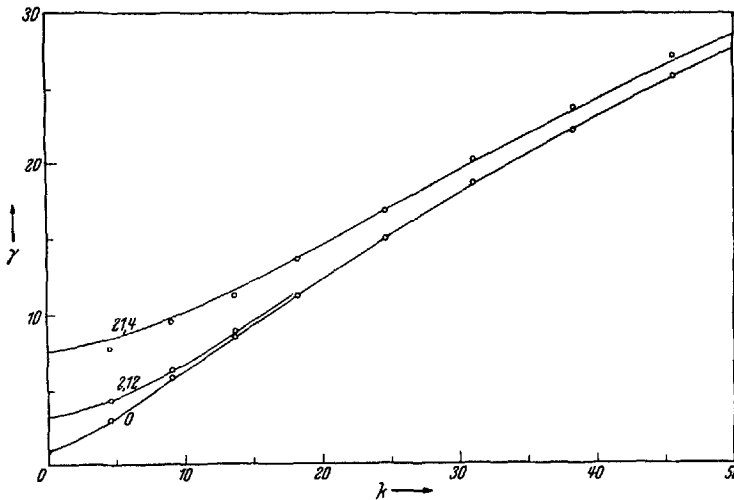


Abb. 14. Nutationskurven bei gleich großen, gleichgerichteten Impulsen der Kreisel für die Kopplungen  $a^2 = 21,4$  und  $a^2 = 2,12$ .

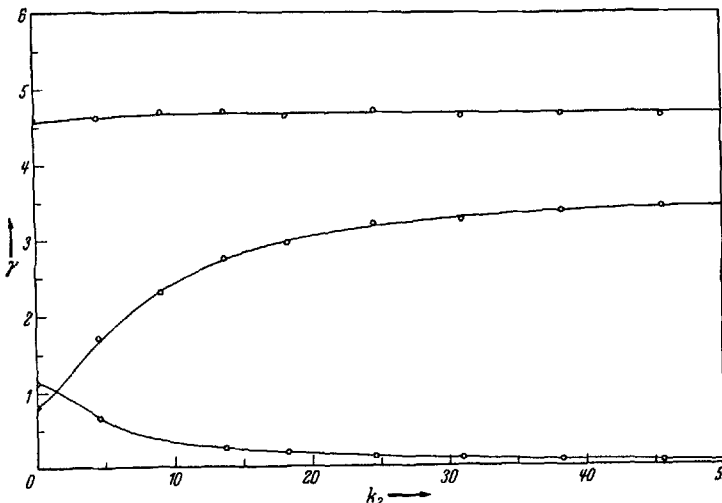


Abb. 15. Frequenzkurven  $\gamma = f(k_2)$  für  $k_1 = 0$  und  $a^2 = 21,4$ .

noch die eingetragenen Oberpräzessionen hinzu. Auch bei diesen besteht gute Übereinstimmung zwischen den Versuchspunkten und den nach Gleichung (14) berechneten theoretischen Kurven. Dabei ist zu bemerken, daß bei der rechnerischen Ermittlung der Kurven Verbesserungen angebracht werden mußten, die durch störende Rückführmomente an der ausgeführten Apparatur bedingt waren. Doch soll darauf hier nicht näher eingegangen werden.

Abb. 11 zeigt die Frequenzgrößen der Präzessionen für den Fall gegenläufiger Kreisel und verschiedener Kopplungsgrößen  $a^2$ . Die untere Kurve ( $a^2 = 0$ ) ist dieselbe, wie in dem zuvor betrachteten Fall, aber diesmal gilt sie nur für die Kopplung  $a^2 = 0$ . Wird  $a^2$  größer, so rückt die Kurve höher und spaltet sich in zwei dicht beieinanderliegende Äste auf, die für großen Impuls wieder zusammenlaufen. Die Präzessionsfrequenzen liegen jetzt so dicht beieinander, daß bei entsprechendem Anstoß Schwebungen auftreten. Dieser Fall wird später noch einmal näher betrachtet werden.

Die Abhängigkeit der Größe  $\gamma$  von der Raumfesselungsgröße  $b^2$  zeigt Abb. 12. Wieder sind die Frequenzen  $\gamma = f(k)$  aufgetragen, aber diesmal für verschiedene  $b^2$ . Die Kopplungsgröße ist für alle Kurven dieselbe,  $a^2 = 0,66$ . Auch hier zeigt sich gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuch.

Für die Nutationsfrequenzen ergeben sich nach der Theorie ähnliche Eigenschaften wie für die Präzessionsfrequenzen. Auch bei den Nutationen bleibt eine Frequenzkurve unabhängig von  $a^2$ . In Abb. 13 zeigt gestrichelt, wie nach Formel (14) die Funktion  $\gamma_3 = f(k)$  verläuft. Dies ist praktisch eine Gerade, die für kleine  $k$  etwas abbiegt. Die Messungen ergaben aber durchweg kleinere Werte, und zwar war die Abweichung um so größer, je größer der Impuls war. Diese Tatsache läßt einen Einfluß der elastischen Eigenschaften des Materials vermuten, und tatsächlich ergibt sich unter Berücksichtigung dieser Elastizität nach Formel (27a) die ausgezogene Kurve. Dabei ist der Elastizitätskoeffizient auf statischem Wege bestimmt worden. Abb. 13 zeigt augenscheinlich den großen Einfluß der elastischen Eigenschaften des Materials. Im vorliegenden Fall zum Beispiel bestand die Motorwelle aus Stahl von 7 mm Durchmesser. Die Kreisscheibe wog etwa 1 kg und hatte einen Hebelarm auf der Motorachse von 1,8 cm. Ihre größte Drehzahl betrug 50/sec.

Die Aufspaltung der Nutationskurven mit wachsender Kopplungsgröße  $a^2$  zeigt Abb. 14. Man muß in diesem Fall, um die Frequenzen bis zu größeren Impulsen noch getrennt nachweisen zu können, starke Kopplungsfedern nehmen. Im vorliegenden Fall ist  $a^2 = 21,4$  gewählt und für die halb ausgezogene Kurve  $a^2 = 2,12$ . Die Frequenzen der Nutationen liegen jetzt so dicht beieinander, daß stets Schwebungen auftreten.

Den Verlauf der Frequenzkurve für den Fall, daß nur ein Kreisel läuft, also ein Kreisel mit einer trägen Masse gekoppelt ist, zeigt Abb. 15. Dabei ist  $k_1 = 0$  gesetzt

worden. Um einen günstigen Maßstab zu bekommen sind in der Zeichnung nur die Frequenzkurven der Präzessionen und der beiden Mittelschwingungen wiedergegeben, nicht aber die der Nutation, die jedoch den bisher üblichen Verlauf zeigt. Auch die Präzessionskurve weicht nicht vom bisher bekannten Verlauf ab. Die Kopplung ist groß gewählt worden, um die beiden mittleren Schwingungen gut voneinander zu trennen. Beide Schwingungen streben für  $k \rightarrow \infty$  einem vom Impuls unabhängigen Grenzwert zu.

Das Verhalten bei verschiedenen Impulsen beider Kreisel erläutert Abb. 16. Diesmal ist als Ordinate die Frequenzfunktion  $\gamma = f(k_2)$  im logarithmischen Maßstab aufgetragen, um so auf einem Bilde Nutationen und Präzessionen zu zeigen. Auf diese Weise kann man die Zuordnung der Kurven zueinander gut erkennen. So geht zum Beispiel die Kurve, die für gleichsinnig laufende Kreisel ( $k_2 > 0$ ) die obere Präzession bildet, für gegensinnig laufende Kreisel in die Nutation über. Und umgekehrt geht eine Nutation bei gleichlaufenden Kreiseln in eine Präzession bei gegenläufigen Kreiseln über. Die ausgezogenen Kurven sind für  $k > 10$  nach den theoretischen Näherungsformeln berechnet, dagegen für  $k < 10$  streng nach numerischen Verfahren. Theorie und Versuch stimmen gut überein.

Der Verlauf der Nutationskurven ist sowohl nach der genäherten Rechnung als auch nach den Versuchsergebnissen für große  $k_2$  identisch, gleichgültig ob  $k_2$  positiv

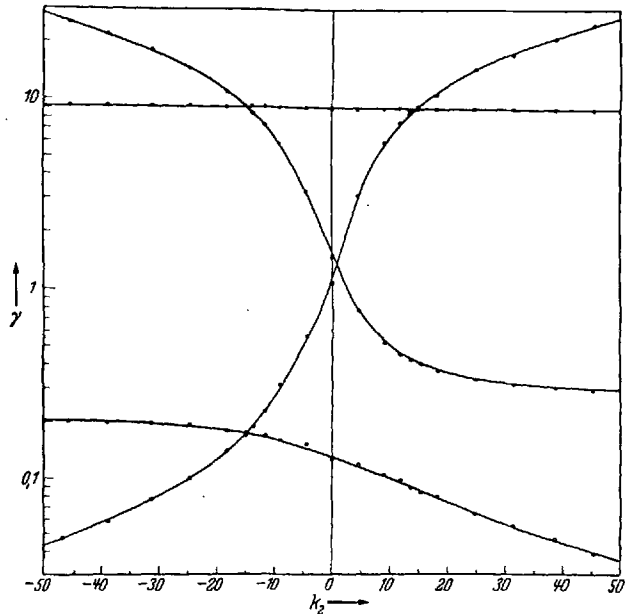


Abb. 16. Frequenzkurven  $\gamma = f(k_2)$  für  $k_1 = 15$  und  $a^2 = 2,12$ .



oder negativ ist. Die eine Nutationskurve ist waagrecht, während die andere monoton ansteigt. Beide Kurven haben in den Resonanzstellen Schnittpunkte. Die strenge Theorie jedoch (vgl. Abb. 6) ergab auch für diesen Fall einen Unterschied, und zwar beim Durchgang durch die Resonanzstelle. Danach dürften keine Schnittpunkte auftreten, es müßten vielmehr die genauen Kurven ohne Schnittpunkte aneinander vorbeilaufen, etwa wie Hyperbeln, die die genäherten Kurven als Asymptoten haben.

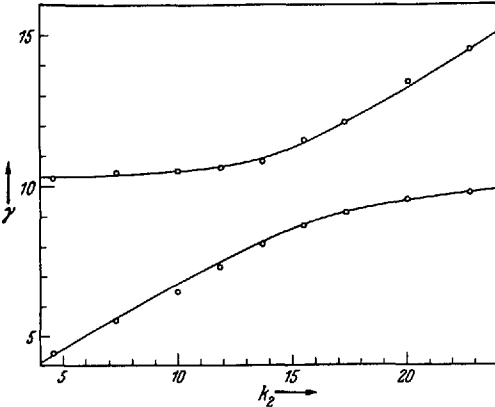


Abb. 17. Nutationskurven  $\gamma = f(k_2)$  für  $k_1 = 15$  und  $a^2 = 21,4$ ,  $k_2 > 0$ .

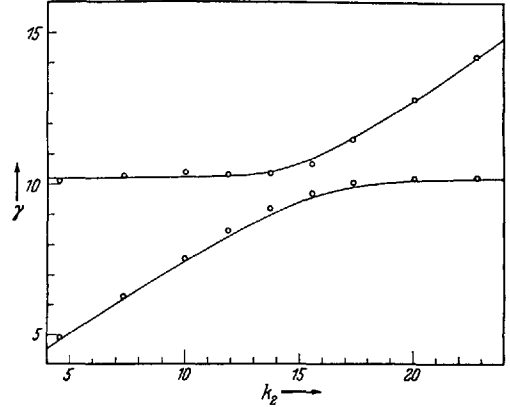


Abb. 18. Nutationskurven  $\gamma = f(k_2)$  für  $k_1 = 15$  und  $a^2 = 21,4$ ,  $k_2 < 0$ .

Um dieses theoretische Ergebnis auch experimentell zu bestätigen, wurden weitere Versuche angestellt. Es wurde eine starke Kopplung gewählt, um die einzelnen Frequenzen möglichst voneinander zu trennen. Nunmehr ergaben sich die Kurven der Abb. 17 und 18, die im Resonanzgebiet aufgenommen sind. Aus ihnen geht auch die geforderte Unsymmetrie bei gleich- und gegensinnig laufenden Kreiseln hervor, und sie beweisen so die Richtigkeit der Rechnung.

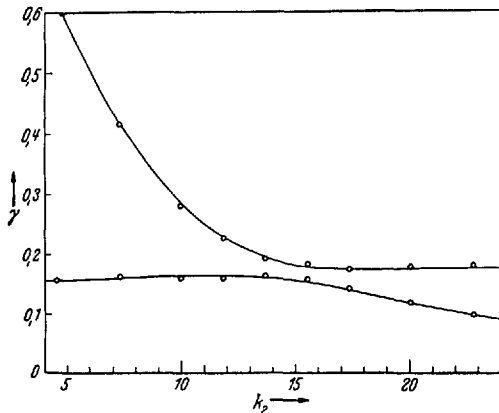


Abb. 19. Präzessionskurven  $\gamma = f(k_2)$  für  $k_1 = 15$  und  $a^2 = 2,12$ ,  $k_2 < 0$ .

$\delta^2 = 1$ , wirklich der Fall ist. Im allgemeinen ergeben sich auch hier hyperbelähnliche Kurven wie die der Abb. 19. Aus dem Versuch allein würde sich diese Tatsache nicht mit Sicherheit erschließen lassen; denn die Ungenauigkeit der Meßwerte kann hier leicht das Maß überschreiten, das man zur eindeutigen Festlegung des Funktionsverlaufes benötigt.

Verbindet man die Kreisel so miteinander, daß sie gezwungen werden, in der  $\psi$ -Ebene gleich große Ausschläge zu machen, so ergibt die theoretische Behandlung des Falles das Auftreten einer Schwingung zwischen Nutation und Präzession. Diese Schwingung ist nach der Theorie unabhängig vom Impuls, wenn beide Kreisel gleich schnell laufen. In Wirklichkeit muß man jedoch die stets vorhandene Elastizität des Materials der Kreiselwelle, der Kardanringe sowie der Kopplung berücksichtigen und die Verbesserungsglieder mitnehmen, die in der Gleichung (26) auftreten. Man hat also in dem Grad der Abhängigkeit der Mittelschwingung vom Impuls ein Maß für die gesamte

Eine besondere Untersuchung erforderte auch die Resonanzstelle der Präzessionen bei gegenläufigen Kreiseln. Die Näherungsformeln ergaben an der Resonanzstelle einfach einen Schnittpunkt der beiden Präzessionskurven. Eine genauere Untersuchung zeigt jedoch, daß das nur in bestimmten Sonderfällen, zum Beispiel für

Elastizität des Mechanismus. Abb. 20 zeigt für diesen Fall die Ergebnisse der Versuche. Nur die Mittelschwingung ist dargestellt; denn die Nutation und die Präzession zeigen den bisher gewohnten Verlauf. Die gestrichelte Kurve gibt den Frequenzverlauf der Mittelschwingung ohne Berücksichtigung der Elastizität. Bei der ausgezogenen Kurve sind diese Glieder mit in Rechnung gestellt. Auch hier zeigt sich befriedigende Übereinstimmung von Theorie und Versuch.

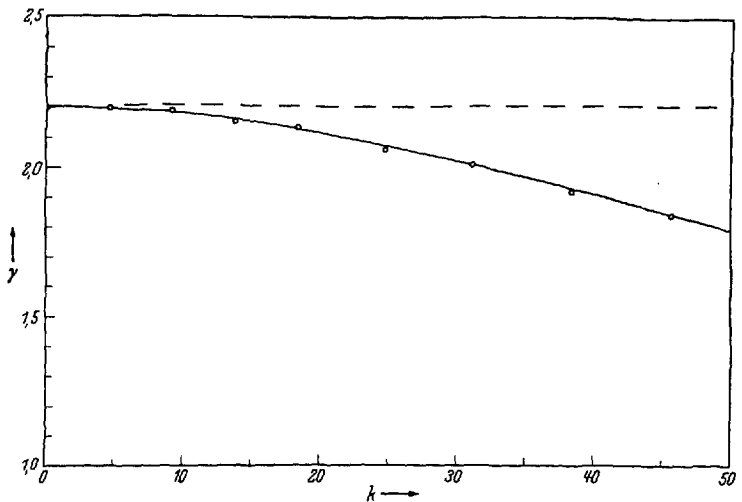


Abb. 20. Frequenzkurve der Mittelschwingung  $\gamma_s = f(k)$  bei starrer Kopplung in der  $\psi$ -Ebene und gleich großen, gleichgerichteten Impulsen der Kreisel ( $a^2 = 2,12$ ).

Zum Schluß zeigen wir noch einige charakteristische Schwingungsbilder, die bei den Versuchen von den Kreiseln

selbsttätig aufgeschrieben wurden. Die Schwingungen sind keine reine gedämpfte Sinusschwingungen, sondern sie sind etwas ausgebeult, da ja der Schreibstift keine gerade Linie, sondern einen Kreisbogen beschreibt. Das mußte natürlich beim Auswerten berücksichtigt werden.

Die Abb. 21 und 22 zeigen Diagramme mit den langsamen Präzessionsschwingungen. Der Zeitmaßstab ist oben auf den Diagrammen zu sehen. Der Abstand des Einsatzes zweier Zacken bedeutet jedesmal eine Sekunde. Sind die Präzessionsschwingungszeiten annähernd gleich, so treten Schwebungserscheinungen auf (Abb. 21). Rücken die Schwingungszeiten auseinander, so kommt das Diagramm Abb. 22, das bei entsprechend stärkerer Kopplung aufgenommen ist.

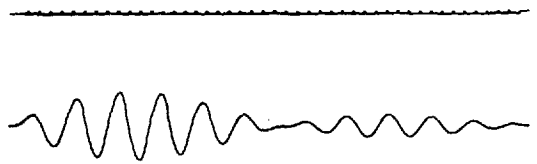


Abb. 21. Schwebungen in den Präzessionsschwingungen.



Abb. 22. Zwei übereinandergelagerte Präzessionsschwingungen.

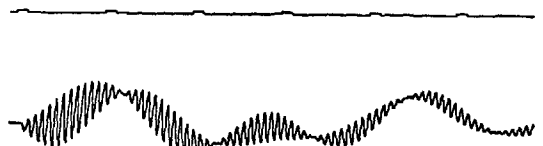


Abb. 23. Schwebungen in den Nutationsschwingungen.



Abb. 24. Vier übereinandergelagerte Schwingungen.

wird das Schwingungsbild, wenn die Nutationen von den Präzessionen in ihrer Frequenz nicht so sehr verschieden sind, wie im Diagramm Abb. 23. Dann bekommt man Schwingungsbilder wie z. B. das Diagramm der Abb. 24. Zwar ist die langsame

Präzession noch deutlich zu erkennen, aber die schnelle Präzession ist infolge der sehr starken Kopplung in die Größenordnung der Nutationen gekommen, so daß hier drei Schwingungen von nicht sehr verschiedener Frequenz überlagert sind.

### Zusammenfassung.

Es sind die kleinen Schwingungen untersucht worden, die bei zwei miteinander gekoppelten Kreiseln auftreten. Als Kopplungsart ist reine Kraftkopplung angenommen. Für einige Sonderfälle sind strenge analytische Lösungen des Problems gegeben. Für den allgemeinen Fall lassen sich nur Näherungslösungen angeben oder die Lösungen durch numerische Verfahren streng herleiten. Es werden Methoden aufgezeigt, wie man sich in besonderen Fällen Näherungslösungen verschaffen kann, insbesondere dann, wenn die Kreiselimpulse groß sind, und wenn bestimmte Kopplungskoeffizienten groß werden. Der Einfluß der Elastizität von Kreiselwelle oder Kardangehänge auf die Schwingungen wird bestimmt. Der Einfluß der Reibung wird für kleine Reibungen behandelt. Durch Versuche werden schließlich die theoretischen Ergebnisse auf ihre Richtigkeit geprüft, was gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuch ergibt. Die wichtigsten Ergebnisse der Untersuchung an kraftgekoppelten Kreiseln sind:

1. Die Kreiselspitzen beschreiben Bahnen, die durch vier übereinandergelagerte elliptische Schwingungen mit raumfesten Achsenrichtungen der einzelnen Schwingungen dargestellt werden können.
2. Nutations- und Präzessionsschwingungen spalten sich durch die Kopplung in je zwei Schwingungen auf, deren Frequenzen um so weiter auseinanderrücken, je stärker die Kopplung ist.
3. Das Produkt der vier Schwingungsfrequenzen ist eine vom Kreiselimpuls unabhängige Größe.
4. Im Sonderfall „gleicher Abmessungen“ (siehe Abschnitt II, 1.) und gleich großen und gleichgerichteten Impulsen der Kreisel behält die kleinere Nutations- und die kleinere Präzessionsfrequenz unabhängig von der Kopplung ihren Wert bei.
5. Bei großem Impuls hängen die Nutationen nur von den Trägheitsmomenten und dem Impuls, die Präzessionen nur von den Raumfesselungen und der Kopplung sowie dem Impuls ab.
6. Für großen Impuls haben gekoppelte Kreisel näherungsweise dieselben Nutationsfrequenzen wie die ungekoppelten Kreisel.
7. Wenn die Nutationsfrequenzen der beiden ungekoppelten Kreisel gleich sind, so treten durch die Kopplung Schwebungen in den Nutationen auf.
8. Sind die Kopplungskräfte groß, so darf man die Elastizität der Kreiselwelle, der Kardangehänge usw. nicht vernachlässigen. Insbesondere sind die elastischen Eigenschaften des Materials dann von erheblichem Einfluß, wenn dem System durch starke Kopplungen oder Raumfesselungen Freiheitsgrade genommen werden.
9. Bei großer Kopplung und großem Impuls können Schwingungen auftreten, deren Frequenz im Gebiet der Pendelschwingungen liegt.
10. Bei beliebig starrer Kopplung gibt es stets eine Präzession, die in erster Näherung unabhängig von den Kopplungskräften ist.
11. Die Nutationsfrequenzen werden durch die Elastizität der Kopplung stets langsamer als im Falle völlig starrer Kopplung.
12. Reibungen in den Lagern der Kardanringe bewirken erstens eine Dämpfung der sonst ungedämpften Schwingungen und zweitens eine geringfügige Vergrößerung der Schwingungszeiten.

Diese Arbeit wurde im Institut für angewandte Mechanik der Universität Göttingen auf Anregung von Herrn Prof. Dr. Ing. Schuler durchgeführt.

(Eingegangen am 27. Februar 1938.)