

Untersuchungen zur Verminderung störender Rüttelschwingungen an Kreiselgeräten.

Von K. Magnus in Göttingen.

Bericht des Institutes für angewandte Mechanik der Universität Göttingen¹⁾.

1. Einleitung. Jeder Kreisel besitzt restliche Unwuchten, die beim Lauf Zentrifugalmomente und damit störende Schwingungen hervorrufen. Es soll untersucht werden, wie die Trägheitsmomente eines Kreiselgerätes zu wählen sind, damit die durch die Zentrifugalmomente erregten Schwingungen möglichst klein bleiben.

Die Untersuchungen wurden angeregt durch das Verhalten eines Kreiselhorizontes, der in der Werkstatt des Institutes für angewandte Mechanik der Göttinger Universität hergestellt worden war. Der Horizont bestand aus einem elektrisch angetriebenen Kreisel mit senkrechter Drehachse, der durch Kardanringe Bewegungsfreiheit um die waagerechten Achsen bekam. Das System hatte eine geringe Schwerpunkstieferlage.

Obwohl der Kreisel bei fest eingespannter Kappe ruhig lief und nur die üblichen kritischen Drehzahlen zeigte, war der Lauf bei frei beweglich aufgehängter Kappe so unruhig, daß der Kreisel nicht auf volle Drehzahl gebracht werden konnte. Die überaus starken Rüttelschwingungen ließen eine Überbeanspruchung des Materials und damit eine Zerstörung des Apparates befürchten.

Man hat es hier offenbar mit erzwungenen Schwingungen des Kreiselpendels zu tun, deren erregende Kraft die durch restliche Wuchtfehler erzeugte umlaufende Zentrifugalkraft ist. Nun sind zwar die durch Unwuchten erzeugten Schwingungen sowie die damit zusammenhängende Selbsteinstellung elastischer Wellen in der Literatur sehr ausführlich behandelt worden.²⁾ Die meisten Verfasser rechnen jedoch, entsprechend ihrer etwas anderen Problemstellung, mit festen Lagern. Lediglich Den Hartog berücksichtigt die Nachgiebigkeit der Lager, nimmt jedoch deren Masse so groß an, daß die Köpplung mit den Lagermassen vernachlässigt werden kann.

Im folgenden soll nun das Problem für den speziellen Fall des Kreiselpendels behandelt werden. Der Kreisel soll mit elastischer Welle in einer Kappe liegen. Kreisel und Kappe erhalten durch Lagerung in einem Kardanring Bewegungsfreiheit um zwei zueinander senkrechte horizontale Achsen. Wenn der Kreisel läuft, so entstehen durch die vorhandenen Unwuchten Zentrifugalmomente. In der folgenden Rechnung wird nun ein durch die elastische Kreiselwelle gekoppeltes System von Kreiselkörper und den Massen des Kardangehänges betrachtet, das durch die Zentrifugalmomente zu erzwungenen Schwingungen erregt wird.

Die Untersuchungen werden zeigen, daß das Trägheitsmoment der Kreiselkappe eine bestimmte Größe haben muß, damit Resonanzerscheinungen mit der Eigenfrequenz der Nutation des Kreisels vermieden werden. Es bleibt jedoch stets die Resonanz mit der durch die elastische Welle verursachten Querschwingung des Kreiselkörpers bestehen.

2. Die erregende Zentrifugalkraft. Die die Schwingungen verursachenden Unwuchten können dynamischer oder statischer Natur sein. Statische Unwuchten, die durch einen kleinen Fehlerabstand des Schwerpunktes von der Drehachse hervorgerufen werden, sollen nicht berücksichtigt werden. Sie sind zudem bei technischen Kreiseln durch Auswuchten fast restlos beseitigt. Die durch statische Unwuchten bedingten Schwingungen sind in der Literatur ausführlich behandelt worden; sie sind im wesentlichen Translationsschwingungen, die sich den durch die dynamischen Unwuchten hervorgerufenen Drehschwingungen überlagern und so das durch die letzteren erzeugte Bild der Schwingungserscheinungen etwas verändern.

Die dynamischen Unwuchten sind durch einen Fehlerwinkel zwischen der Drehachse und der Hauptträgheitsachse gekennzeichnet. Die Größe der dadurch hervorgerufenen Zentrifugalmomente soll für einen symmetrischen Kreiselkörper bestimmt werden. Es sei in einem kreiselfesten Koordinatensystem A, B, C die Achse C die ausgezeichnete Hauptträgheitsachse. Sie bilde mit der Drehachse den Fehlerwinkel ε (Bild 1). Die Achse B sei senkrecht auf der durch Drehachse und Hauptträgheitsachse bestimmten Ebene. Dann können wir das Zentrifugalmoment aus den Eulerschen Gleichungen der Kreisellehre bestimmen. Diese lauten im allgemeinen Fall:

¹⁾ Diese Untersuchungen wurden auf Anregung von Herrn Prof. Schuler durchgeführt, dem auch an dieser Stelle für viele wertvolle Hinweise gedankt sei.

²⁾ Z. B. Pöschl: Z. angew. Math. Mech. Bd. 3 (1923), S. 297. Karas: Ing.-Arch. Bd. 1 (1930), S. 84 und 158. Ferner die Bücher: Stodola: Dampfturbinen, 3. Aufl. Berlin 1905. Klein-Sommerfeld: Theorie des Kreisels, Heft IV, Leipzig 1910. Den Hartog: Mechanische Schwingungen, deutsch von G. Mesmer, Berlin 1936.

$$\begin{aligned} \Theta_A \dot{\omega}_A &= (\Theta_B - \Theta_C) \omega_B \omega_C - Z_A, \\ \Theta_B \dot{\omega}_B &= (\Theta_C - \Theta_A) \omega_C \omega_A - Z_B, \\ \Theta_C \dot{\omega}_C &= (\Theta_A - \Theta_B) \omega_A \omega_B - Z_C. \end{aligned}$$

Dabei sind $\Theta_A, \Theta_B, \Theta_C$ die Hauptträgheitsmomente, Z_A, Z_B, Z_C die Zentrifugalmomente und $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ die Komponenten der Drehgeschwindigkeit um die kreiselfesten Achsen A, B, C. Im vorliegenden Fall ist nun:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_A &= \dot{\omega}_B = \dot{\omega}_C = 0, \\ \Theta_A &= \Theta_B, \\ \omega_A &= \omega \sin \epsilon, \\ \omega_B &= 0, \\ \omega_C &= \omega \cos \epsilon. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} Z_A &= Z_C = 0, \\ Z_B &= (\Theta_C - \Theta_A) \omega^2 \sin \epsilon \cos \epsilon. \end{aligned}$$

Das Zentrifugalmoment wächst also mit dem Quadrat der Umlauffrequenz, es hat ein Maximum bei einem Fehlerwinkel von 45° . Da in unserem Fall jedoch nur kleine ϵ vorkommen, so können wir für das Moment einfach schreiben:

$$Z_B = (\Theta_C - \Theta_A) \epsilon \omega^2 \dots \dots \dots (1).$$

Da ferner das Zentrifugalmoment die Differenz der Trägheitsmomente als Faktor hat, so könnte man annehmen, daß für einen Kugelkreisel, d. h. für einen Kreisel mit kugelförmigem Trägheitsellipsoid, das Zentrifugalmoment verschwinden müßte. Dem widersprechen jedoch die Ergebnisse der Erfahrungen. Die weitere Rechnung wird nun auch die Erfahrungstatsachen theoretisch bestätigen. Es soll jedoch hier noch eine ganz allgemeine Bemerkung über den Fehlerwinkel ϵ bzw. über das Zentrifugalmoment gemacht werden.

Bei einem Kugelkreisel ist jede Achse gleichberechtigt, jede Drehachse kann als Hauptträgheitsachse aufgefaßt werden. Die geringste Inhomogenität des Kreiselmaterials oder ganz unbedeutende Massenverlagerungen durch Verbeulen können nun bewirken, daß eine Achse als ausgezeichnete Hauptträgheitsachse erscheint, die mit der Drehachse einen beliebig großen Winkel einschließt. Andererseits wird dieselbe Inhomogenität bei einem stark abgeplatteten Kreisel nur eine geringfügige Verlagerung der Hauptträgheitsachse zur Folge haben. Da es also offensichtlich auf das Produkt $(\Theta_C - \Theta_A) \epsilon$ ankommt, so soll dieses für eine vorgegebene Inhomogenität untersucht werden.

Das Trägheitsmoment des jetzt als fehlerfrei angenommenen symmetrischen Kreiselkörpers in einer beliebigen Richtung a ist gegeben durch:

$$\Theta_K = \Theta'_A \cos^2 a + \Theta'_C \sin^2 a.$$

Die durch Materialfehler und schlechte Bearbeitung bewirkten Abweichungen von der idealen Massenverteilung im Kreiselkörper denken wir uns zu einem besonderen Körper zusammengefaßt, dessen Trägheitsellipsoid wir als symmetrisch annehmen wollen. Er habe die Hauptträgheitsmomente Θ_x und Θ_y , deren Achsen gegenüber dem als fehlerlos angenommenen Kreiselkörper um den Winkel φ verdreht sein sollen. Dann stellt sich das Fehlerträgheitsmoment in der Richtung a dar durch:

$$\Theta_F = \Theta_x \cos^2 (a - \varphi) + \Theta_y \sin^2 (a - \varphi).$$

Um das Trägheitsellipsoid des wirklichen Kreiselkörpers zu bekommen, müssen wir Θ_K und Θ_F addieren.

$$\Theta_G = \Theta_K + \Theta_F = \Theta_A \cos^2 a + \Theta_C \sin^2 a + D \sin 2a \dots \dots \dots (2)$$

mit

$$\begin{aligned} \Theta_A &= \Theta'_A + \Theta_x \cos^2 \varphi + \Theta_y \sin^2 \varphi, \\ \Theta_C &= \Theta'_C + \Theta_x \sin^2 \varphi + \Theta_y \cos^2 \varphi, \\ D &= \frac{1}{2} (\Theta_x - \Theta_y) \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Θ_A und Θ_C sind dabei die Trägheitsmomente des fehlerhaften Kreiselkörpers, D ist eine nur von der Inhomogenität abhängige Konstante. Um nun die Hauptträgheitsachsen des wirklichen Kreiselkörpers zu finden, differenzieren wir (2) und bekommen:

$$\frac{d\Theta_G}{da} = (\Theta_C - \Theta_A) \sin 2a + 2D \cos 2a.$$

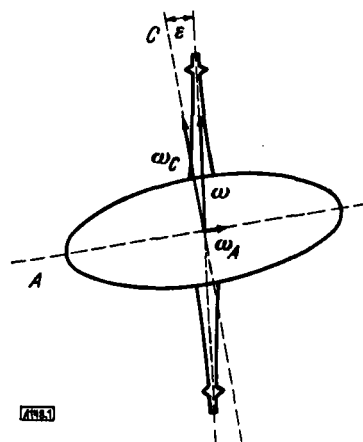


Bild 1. Zerlegung der Drehgeschwindigkeit am Kreisel.

Für eine Hauptträgheitsachse verschwindet dieser Ausdruck. α gibt in diesem Fall die Abweichungen der Hauptträgheitsachsen von idealem und wirklichen Kreiselkörper, also den Fehlerwinkel ε an. Man bekommt:

$$\operatorname{tg} 2\varepsilon = \frac{2D}{(\Theta_A - \Theta_C)}$$

Da wir ε als klein vorausgesetzt hatten, so können wir die Tangente durch den Winkel ersetzen. Multipliziert man dann ε noch mit dem im Zentrifugalmoment Gl. (1) vorkommenden Ausdruck $(\Theta_C - \Theta_A)$, so ergibt sich:

$$\frac{Z_B}{\omega^2} = (\Theta_C - \Theta_A)\varepsilon = -D = -\frac{1}{2}(\Theta_x - \Theta_y)\sin 2\varphi \dots \dots \dots (3).$$

Das bedeutet also, daß das Zentrifugalmoment für eine vorgegebene Inhomogenität eine von der Form des Kreisels unabhängige Größe ist.

Die Gl. (3) zeigt ferner, weshalb für einen Kugelkreisel die Verhältnisse am ungünstigsten liegen. Beim Kugelkreisel ist es seiner Form wegen wahrscheinlicher als beim abgeplatteten oder beim verlängerten Kreisel, daß der Winkel φ den Wert 45° erreicht, daß also der in Gl. (3) auf der rechten Seite stehende Ausdruck ein Maximum wird. Für den abgeplatteten Kreisel ist $\varphi > 45^\circ$, für den verlängerten Kreisel ist $\varphi < 45^\circ$ am wahrscheinlichsten.

Das für das körperfesteste System abgeleitete Zentrifugalmoment (1) läuft vom raumfesten System aus gesehen mit der Drehgeschwindigkeit ω um. Wir wollen es in seine Komponenten in Richtung der raumfesten x - und y -Achsen, die der folgenden Rechnung zugrunde gelegt werden, zerlegen. Dabei können wir statt des Momentenpfeiles selbst dessen Projektion in der waagerechten Ebene nehmen, da nur kleine Winkelausschläge des Kreisels betrachtet werden sollen. Damit bekommen wir die Momentkomponenten:

$$\begin{aligned} Z_x &= Z_B \sin \omega t, \\ Z_y &= -Z_B \cos \omega t. \end{aligned}$$

3. Die Differentialgleichungen der erzwungenen Schwingungen des Kreiselpendels. Wie schon erwähnt wurde, sollen nur kleine Auslenkungen des Kreiselpendels betrachtet werden. Wir können dann in einem raumfesten Koordinatensystem (Bild 2) die Bewegungen des Kreiselpendels durch die Föppl'schen Gleichungen der Kreisellehre beschreiben^{*)}. Als äußere Momente haben wir darin zu setzen:

1. Das Schweremoment des Kreiselkörpers: $G_k s_k a_k$ ($G_k =$ Gewicht des Kreiselkörpers, $s_k =$ Abstand Schwerpunkt-Aufhängepunkt, $a_k =$ Auslenkung aus der Gleichgewichtslage).
2. Das durch die elastische Welle übertragene Kopplungsmoment zwischen Kreiselkörper und Kardangehänge.
3. Das Zentrifugalmoment.

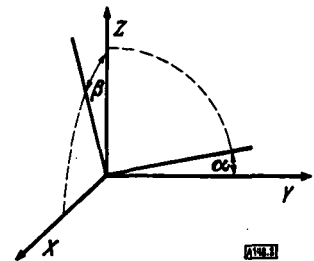


Bild 2. Koordinatensystem.

Zu den beiden Föppl-Gleichungen treten dann noch die Schwingungsgleichungen des Gehänges (Kreiselkappe und Kardanring), in denen als äußere Momente die Schweremomente $G_s s_s a$ bzw. $G_s s_s \beta$ des Gehänges (ohne Kreisel!) in den beiden Ebenen sowie die Kopplungsmomente auftreten. Damit ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} \text{I. } \Theta_A \frac{d^2 a_k}{dt^2} + \Theta_C \omega \frac{d\beta_k}{dt} + G_k s_k a_k + c(a_k - a) &= (\Theta_C - \Theta_A)\varepsilon \omega^2 \sin \omega t, \\ \text{II. } \Theta_A \frac{d^2 \beta_k}{dt^2} - \Theta_C \omega \frac{da_k}{dt} + G_k s_k \beta_k + c(\beta_k - \beta) &= -(\Theta_C - \Theta_A)\varepsilon \omega^2 \cos \omega t, \\ \text{III. } \Theta_{xh} \frac{d^2 a}{dt^2} + G_s s_s a + c(a - a_k) &= 0, \\ \text{IV. } \Theta_{yh} \frac{d^2 \beta}{dt^2} + G_s s_s \beta + c(\beta - \beta_k) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (4).$$

^{*)} Siehe Schuler: Die Föppl'sche Methode zur Lösung von Kreiselproblemen. Z. angew. Math. Mech. Bd. 15 (1935), S. 88 bis 91.

Dabei bedeuten:

- Θ_C = Trägheitsmoment des Kreiselkörpers um seine Drehachse.
- Θ_A = Trägheitsmoment des Kreiselkörpers um eine Querachse.
- Θ_{xh} = Trägheitsmoment des Gehänges um die x -Achse.
- Θ_{yh} = Trägheitsmoment des Gehänges um die y -Achse.
- $G_k s_k, G_3 s_3, G_4 s_4$ die obengenannten Schweremomente.
- c = Kopplungskoeffizient der elastischen Kreiselwelle.
- α = Auslenkung des Gehänges um die x -Achse.
- β = Auslenkung des Gehänges um die y -Achse.
- α_k = Auslenkung der Hauptträgheitsachse des Kreiselkörpers um die x -Achse.
- β_k = Auslenkung der Hauptträgheitsachse des Kreiselkörpers um die y -Achse.

Im Differentialgleichungssystem (4) tritt uns ein Fall entgegen, in dem das in den Föppl-Gleichungen auftretende Moment nicht nur vom Winkel allein abhängig ist, sondern vom Winkel und von der Zeit t . Wir haben ein inhomogenes System vor uns, bei dem I mit II in den Geschwindigkeitsgliedern (durch die Kreiselkräfte), ferner I mit III und II mit IV in den Kraftgliedern (durch die elastische Welle) gekoppelt sind.

Bevor das Gleichungssystem (4) in voller Allgemeinheit behandelt wird, soll noch kurz auf den Fall der starren Kreiselwelle eingegangen werden.

4. Betrachtung der Resonanzfunktionen für eine starre Welle. Im Grenzfall $c = \infty$ wird $\alpha_k = \alpha$ und $\beta_k = \beta$, d. h. der Kreiselkörper macht dieselben Bewegungen wie die Kappe. Wir können dann im Gleichungssystem (4) die Gl. I mit III und II mit IV zusammenfassen und bekommen mit Einführung der Abkürzungen:

- $\Theta_x = \Theta_A + \Theta_{xh}$ = Trägheitsmoment des Gesamtsystems (d. h. Kreisel und Gehänge!) um die x -Achse,
- $\Theta_y = \Theta_A + \Theta_{yh}$ = Trägheitsmoment des Gesamtsystems um die y -Achse,
- $G_1 s_1 = G_k s_k + G_3 s_3$ = Gesamtes Stabilitätsmoment um die x -Achse,
- $G_2 s_2 = G_k s_k + G_4 s_4$ = Gesamtes Stabilitätsmoment um die y -Achse,

zwei Gleichungen, die mit Hilfe des Ansatzes

$$\begin{aligned} \alpha &= A \sin \omega t, \\ \beta &= B \cos \omega t \end{aligned}$$

für A und B die Lösungen ergeben:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{(\Theta_A - \Theta_C) \varepsilon \omega^2 [G_2 s_2 - (\Theta_y + \Theta_C) \omega^2]}{(G_1 s_1 - \Theta_x \omega^2) (G_2 s_2 - \Theta_y \omega^2) - \Theta_C^2 \omega^4} \\ B &= \frac{(\Theta_C - \Theta_A) \varepsilon \omega^2 [G_1 s_1 - (\Theta_x + \Theta_C) \omega^2]}{(G_1 s_1 - \Theta_x \omega^2) (G_2 s_2 - \Theta_y \omega^2) - \Theta_C^2 \omega^4} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5).$$

Der Nenner ist den beiden Resonanzfunktionen gemeinsam. Er ist eine quadratische Form in ω^2 , deren Nullstellen sich sofort angeben lassen. Es läßt sich zeigen, daß stets zwei reelle Lösungen für ω^2 vorhanden sind, da die Diskriminante der quadratischen Form stets positiv ist. Das Vorzeichen dieser Lösungen wird durch den Quotienten:

$$Q = \frac{G_1 s_1 G_2 s_2}{\Theta_x \Theta_y - \Theta_C^2}$$

bestimmt. Da aus Stabilitätsgründen $G_1 s_1$ und $G_2 s_2$ entweder beide positiv oder beide negativ sind, so ist das Produkt beider stets positiv. Das Vorzeichen von Q wird also nur durch den Nenner bestimmt. Wir bekommen: Für

$$\mu^2 = \frac{\Theta_C^2}{\Theta_x \Theta_y} < 1$$

haben wir stets zwei reelle Lösungen für ω , also zwei Unendlichkeitsstellen der Resonanzfunktion. Ist $\mu > 1$, so gibt es nur eine reelle Nullstelle für ω . Im Grenzfall $\mu = 1$ rückt die zweite Nullstelle zu $\omega = \infty$.

Die Nullstellen der Resonanzfunktion lassen sich aus (5) sofort entnehmen. Sie liegen bei $\omega = 0$ sowie bei:

$$\omega = \sqrt{\frac{G_2 s_2}{\Theta_y + \Theta_C}} \quad \text{bzw.} \quad \omega = \sqrt{\frac{G_1 s_1}{\Theta_x + \Theta_y}}$$

Der Verlauf der Resonanzfunktionen ist in Bild 3 für drei typische Werte von μ aufgetragen. Den Kurven sind die an dem vorgenannten Horizont gemessenen Werte zugrunde gelegt. Die Resonanzstellen treten im vorliegenden Fall schon bei sehr niedrigen ω -Werten auf, so daß sie praktisch vollkommen ungefährlich sind, denn bei einer Umdrehung des Kreisels in 2π Sekunden sind die auftretenden Massenkräfte so gering, daß eine Beschädigung des Apparates ausgeschlossen ist. Jedoch können die Resonanzstellen bei entsprechend stärkerer Fesselung des Kreisels auch wesentlich höher rutschen, wie man aus (5) sofort entnehmen kann.

Von Bedeutung ist noch der Grenzwert, dem die Resonanzkurven für wachsendes ω zustreben. Man bekommt z. B. für A_∞ :

$$A_\infty = \frac{(\Theta_C - \Theta_A) \varepsilon (\Theta_C + \Theta_y)}{\Theta_x \Theta_y - \Theta_C^2}$$

Der Grenzwert ist um so kleiner, je weiter wir vom Kugelkreisel entfernt sind, d. h. je mehr das Trägheitsellipsoid des Systemes Kreiselkörper + Kappe von der Kugelgestalt abweicht. Im Sonderfall $\Theta_C^2 = \Theta_x \Theta_y$ bzw. $\mu = 1$ hat die Resonanzfunktion für große ω Parabeleigenschaften, sie geht also mit $\omega \rightarrow \infty$ gegen Unendlich. Das ist klar, wenn man bedenkt, daß dann die Umlauffrequenz stets gleich der Nutationsfrequenz ist. Dieser Fall muß also vermieden werden.

Es zeigt sich jedoch, daß das Verhalten der Resonanzfunktion für große ω -Werte durch die Elastizität der Kreiselwelle ganz erheblich beeinflusst wird.

5. Die Resonanzfunktion für eine elastische Welle. Wir kehren nun zum Gleichungssystem (4) zurück und führen dort dimensionslose Größen ein, um der Rechnung größere Allgemeinheit zu verleihen. Wir nennen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Theta_A}{c} &= \frac{1}{\nu^2}; & \frac{\omega}{\nu} &= \gamma; \\ \frac{G_k s_k}{c} &= a_1; & \frac{G_3 s_3}{c} &= a_2; & \frac{G_4 s_4}{c} &= a_3; \\ \frac{\Theta_C}{\Theta_A} &= \delta; & \frac{\Theta_{y h}}{\Theta_A} &= \mu_1; & \frac{\Theta_{x h}}{\Theta_A} &= \mu_2 = \mu_1 + \mu_r \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6).$$

Dabei ist ν die Eigenfrequenz der Drehschwingung des Kreiselkörpers um eine Querachse bei fest eingespannten Lagern. γ ist als dimensionslose Frequenzgröße ein Maß für die Umlauffrequenz des Kreisels. Das Trägheitsmoment der Hängung um die x -Achse setzt sich zusammen aus dem Trägheitsmoment der Kreiselkappe und dem Trägheitsmoment des äußeren Kardanringes. Nimmt man, was meist der Fall ist, die Kappe als symmetrisch an, so kann man μ_2 zerlegen in $\mu_1 + \mu_r$, wobei μ_r das Verhältnis des Trägheitsmomentes des Kardanringes zu Θ_A bedeutet.

Mit diesen Beziehungen und dem Ansatz:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= A \sin \omega t, & \alpha &= C \sin \omega t, \\ \beta_k &= B \cos \omega t, & \beta &= D \cos \omega t \end{aligned}$$

bekommt man für die gesuchten Amplitudenfunktionen A, B, C, D das Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} A(1 + a_1 - \gamma^2) - C - B\delta\gamma^2 &= (1 - \delta)\varepsilon\gamma^2 \\ -A\delta\gamma^2 + B(1 + a_1 - \gamma^2) - D &= -(1 - \delta)\varepsilon\gamma^2 \\ -A + C(1 + a_2 - \mu_2\gamma^2) &= 0 \\ -B + D(1 + a_3 - \mu_1\gamma^2) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7).$$

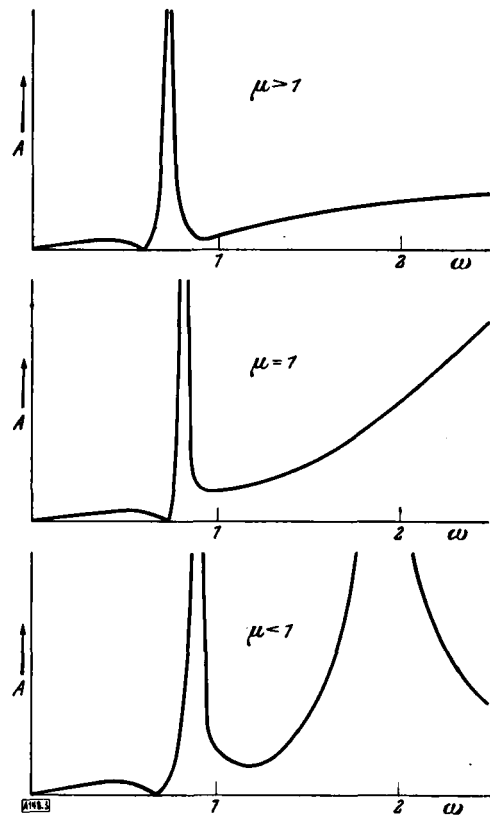


Bild 3. Resonanzfunktion bei starrer Kreiselwelle für verschiedene Werte von μ .

Da es hier nur auf das Verhalten der Resonanzfunktionen für große ω ankommt, d. h. auf Drehzahlen, die in der Größenordnung der Betriebsdrehzahlen liegen, so können wir im System (7) unbedenklich die Größen a_1, a_2, a_3 vernachlässigen, da sie um etwa zwei Zehnerpotenzen kleiner als Eins sind. Das bedeutet praktisch eine Vernachlässigung der Schwere-momente und der durch diese hervorgerufenen langsamen Präzessionen.

Die Lösung des Gleichungssystems (7) ist:

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{1}{N} (1 - \delta) \varepsilon [\gamma^2 \mu_1 (1 + \delta) - (1 + \mu_1 + \delta)] \\ D &= \frac{1}{N} (\delta - 1) \varepsilon [\gamma^2 \mu_2 (1 + \delta) - (1 + \mu_2 + \delta)] \end{aligned} \right\} \text{für die Kappe,}$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{N} (1 - \delta) \varepsilon [\gamma^2 \mu_1 (1 + \delta) - (1 + \mu_1 + \delta)] (1 - \mu_2 \gamma^2) = (1 - \mu_2 \gamma^2) C \\ B &= \frac{1}{N} (\delta - 1) \varepsilon [\gamma^2 \mu_2 (1 + \delta) - (1 + \mu_2 + \delta)] (1 - \mu_1 \gamma^2) = (1 - \mu_1 \gamma^2) D \end{aligned} \right\} \text{für den Kreisel} \quad (8).$$

Dabei ist der Nenner N allen Resonanzfunktionen gemeinsam:

$$N = \gamma^4 \mu_1 \mu_2 (1 - \delta^2) + \gamma^2 [\delta^2 (\mu_1 + \mu_2) - 2 \mu_1 \mu_2 - \mu_1 - \mu_2] + 1 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_1 \mu_2 - \delta^2.$$

Der Verlauf der vier Resonanzfunktionen in Abhängigkeit von der dimensionslosen Umlauffrequenz γ ist in Bild 4 aufgetragen, der Rechnung sind die an dem ausgeführten Horizont gemessenen Werte für die Trägheitsmomente zugrunde gelegt. Die ausgezogenen Kurven stellen die Resonanzkurven C und D , also die Auslenkungen der Kreiselkappe dar, die gestrichelten Kurven entsprechen den Auslenkungen der Hauptträgheitsachse des Kreisels in den beiden Ebenen. Die Betriebsdrehzahl lag bei dem untersuchten Gerät etwa bei $\gamma = 3$, also oberhalb der Resonanzstellen. Der Kreisel muß also beim Anlaufen diese Stellen durchlaufen. Dabei ist eine Resonanzstelle um so gefährlicher, je breiter sie ist, denn eine um so längere Zeit braucht der Kreisel, um sie zu durchlaufen. Es kann sogar der Fall eintreten, daß die Drehgeschwindigkeit nicht über den Wert einer solchen kritischen Drehzahl gesteigert werden kann, nämlich dann,

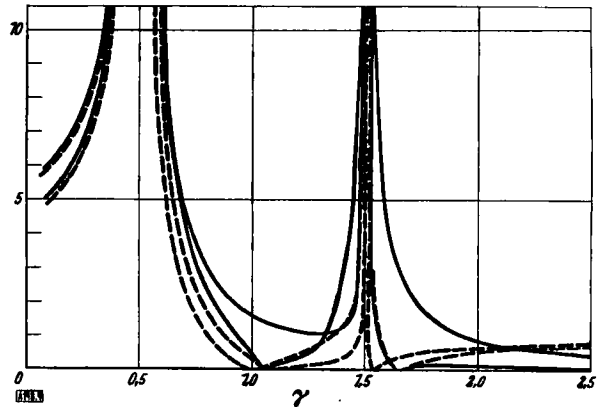


Bild 4. Resonanzfunktionen für Kreiselkörper und Kreiselkappe.

wenn alle von außen durch den Antrieb in das System hineingesteckte Energie durch das Anfachen der Rüttelschwingungen verbraucht wird, so daß dann keine Energie zum Steigern der Drehzahl mehr übrigbleibt. Ein solcher Fall hat bei dem beschriebenen Horizontmodell tatsächlich vorgelegen, denn es gelang zwar ohne Schwierigkeit, den Kreisel bei festgehaltener Kappe auf Betriebsdrehzahl zu bringen, doch bei frei hängendem System war ein Steigern der Drehzahl nicht möglich, wollte man nicht das Gerät zerstören.

An den Resonanzkurven des Bildes 4 interessieren uns

1. die Nullstellen,
2. die Unendlichkeitsstellen,
3. die Grenzwerte, denen die Resonanzfunktionen für große ω zustreben, denn diese entsprechen etwa den Werten der Resonanzfunktionen für die Betriebsdrehzahlen.

Die Nullstellen lassen sich aus den Gl. (8) sofort angeben. Wir erhalten:

$$\left. \begin{aligned} \text{für } C: \gamma_0^2 &= \frac{1}{1 + \delta} + \frac{1}{\mu_1} \\ \text{für } D: \gamma_0^2 &= \frac{1}{1 + \delta} + \frac{1}{\mu_2} \end{aligned} \right\} \text{für die Kappe,}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{für } A: \gamma_0^2 &= \frac{1}{1 + \delta} + \frac{1}{\mu_1} \quad \text{und} \quad \gamma_0^2 = \frac{1}{\mu_2} \\ \text{für } B: \gamma_0^2 &= \frac{1}{1 + \delta} + \frac{1}{\mu_2} \quad \text{und} \quad \gamma_0^2 = \frac{1}{\mu_1} \end{aligned} \right\} \text{für den Kreisel} \quad (9).$$

Die Unendlichkeitsstellen ergeben sich aus den Nullstellen des Nenners von (8):

$$\gamma_{\infty}^2 = \frac{1}{2\mu_1} + \frac{1}{2\mu_2} + \frac{1}{1+\delta} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2\mu_1} - \frac{1}{2\mu_2}\right)^2 + \frac{\delta^2}{(1-\delta^2)^2}} \dots \dots \dots (10).$$

Da sich der Radikand als Summe zweier Quadrate darstellt, so kann eine komplexe Lösung für γ_{∞}^2 nicht vorkommen; dagegen können imaginäre Lösungen für γ_{∞} auftreten, wenn γ_{∞}^2 negativ wird.

Es sei nun die Frage vorgelegt: Wie kann man die Lage der Nullstellen und Unendlichkeitsstellen so beeinflussen, daß sich die Eigenschaften des Kreiselverbandes bessern? Man könnte zunächst eine Nullstelle der Resonanzfunktion in die Betriebsdrehzahl legen. Das ist jedoch aus zwei Gründen abwegig. Einmal tritt eine solche Nullstelle niemals bei allen vier Trägheitsmomenten des Kardanringes stets $\mu_1 \neq \mu_2$ ist. Man könnte also nur eine Beruhigung jeweils in einer Ebene erzielen. Zweitens aber würde man durch ein solches Höherlegen der Nullstellen die Lage der Unendlichkeitsstellen ungünstig beeinflussen.

Man wird versuchen, die Unendlichkeitsstellen zu kleineren Drehzahlen hin zu verschieben, um sie auf diese Weise ungefährlicher zu machen. Das kann durch Verändern von Trägheitsmomenten geschehen. Man kann entweder am Kardanring Zusatzgewichte anbringen und damit μ_r vergrößern, oder man kann das Trägheitsmoment der Kreiselkappe durch Anbringen von Zusatzgewichten vergrößern; damit wird μ_1 und wegen $\mu_2 = \mu_1 + \mu_r$ auch μ_2 geändert. Den Kreisel selbst wollen wir zunächst als gegeben betrachten, so daß eine Änderung seiner Trägheitsmomente vorläufig ausgeschlossen sein soll.

Bild 5 zeigt die Verschiebung der Nullstellen und der Unendlichkeitsstellen mit einer Vergrößerung von μ_r . (N_A bedeutet Nullstelle von A usw. U bedeutet Unendlichkeitsstelle.) Dabei ist zu beachten, daß gemäß Gl. (9) die Nullstellen von C bzw. D gleichzeitig Nullstellen von A bzw. B sind. Bild 5 zeigt, daß die Vergrößerung von μ_r wenig Einfluß auf die Verschiebung der Nullstellen sowie der oberen Unendlichkeitsstelle hat. Dagegen verschwindet die untere Unendlichkeitsstelle für μ_r größer als etwa 1,2 vollkommen, d. h. der Nenner von Gl. (8) hat für größere μ_r nur noch eine reelle Nullstelle.

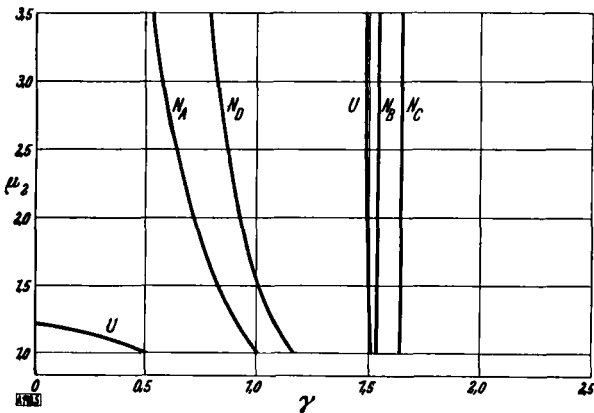


Bild 5.

Bild 5. Verschiebung der Nullstellen und Unendlichkeitsstellen der Resonanzfunktion mit einer Vergrößerung des Kardanringes.

Bild 6. Verschiebung der Nullstellen und Unendlichkeitsstellen der Resonanzfunktion mit einer Vergrößerung der Kreiselkappe.

Bild 7. Resonanzfunktionen für Kreiselkörper und Kreiselkappe für größeres Trägheitsmoment der Kappe.

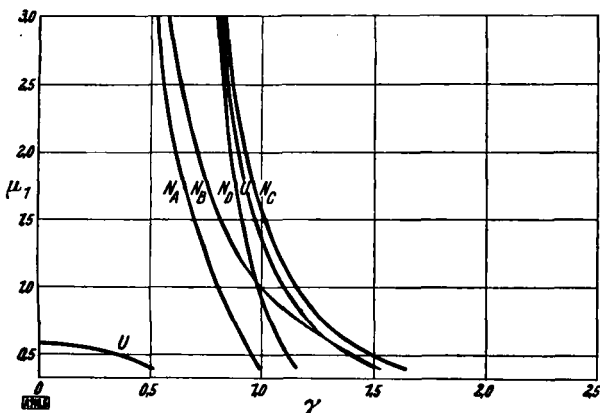


Bild 6.

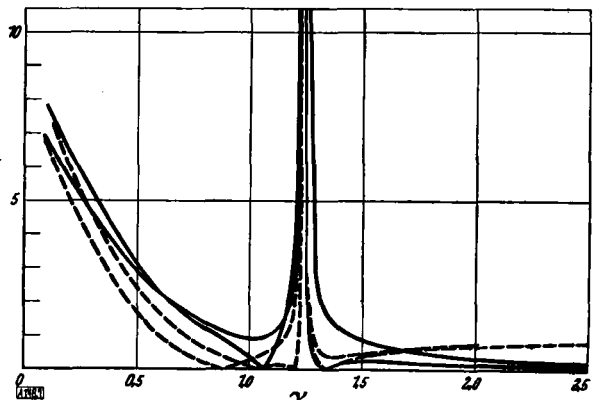


Bild 7.

Bringt man die Zusatzgewichte nicht am Kardanring, sondern an der Kreiselkappe selbst an, so ändern sich die Verhältnisse nach Bild 6. Man sieht durch Vergleich mit Bild 5, daß das Anbringen der Zusatzgewichte an der Kappe sehr viel mehr Einfluß auf die Verschiebung der Null- und Unendlichkeitsstellen hat, als das Vergrößern des Kardanringes. Auch hier verschwindet die untere Unendlichkeitsstelle für genügend großes μ_1 .

Die durch ihre Breite gefährliche untere Resonanzstelle in Bild 4 kann also durch geeignete Wahl der Trägheitsmomente fortgeschafft werden. An dem untersuchten Horizont wurden die dazu notwendigen rechnerisch ermittelten Zusatzgewichte an der Kappe angebracht. Der Versuch zeigte die Richtigkeit der Überlegungen. Der Kreisel ließ sich ohne jede Schwierigkeit auf seine Betriebsdrehzahl bringen und zeigte keinerlei anormales Verhalten. Der Verlauf der vier Resonanzfunktionen für die nunmehr veränderten Werte der Trägheitsmomente ist in Bild 7 aufgetragen. Durch Vergleich mit Bild 4 sieht man, welche Verbesserung erzielt ist. Es tritt nur noch die obere sehr schmale Resonanzstelle auf. Allerdings nehmen die Resonanzkurven für kleines γ ziemlich große Werte an. Das ist aber ungefährlich, da der Kreisel beim Anlaufen dieses Gebiet sehr schnell durchläuft und die Drehenergie noch gering ist. Die Versuche haben auch, vor allem beim Auslauf, merkliche aber ungefährliche Schwingungen gezeigt.

Schließlich sollen noch die Grenzwerte der Resonanzfunktionen für große γ betrachtet werden. An den Gl. (8) kann man diese ablesen. Die Auslenkungen der Kappe (C und D) gehen für $\gamma \rightarrow \infty$ gegen Null. Die Kappe bleibt also ruhig stehen. Dagegen gehen die beiden Resonanzfunktionen A und B gegen den endlichen Grenzwert ϵ , gleichgültig wie groß die Verhältniswerte δ , μ_1 und μ_2 sind. Das bedeutet eine Dauerauslenkung um den Wert ϵ , also eine Verbiegung der Kreiselachse derart, daß die Hauptträgheitsachse mit der Drehachse zusammenfällt. Die Selbsteinstellung der elastischen Kreiselwelle wird also durch die Rechnung bestätigt. Diese Tatsache beweist noch einmal, weshalb ein Kreiselkörper mit kugelförmigem Trägheitsellipsoid ungünstiger ist, als ein solcher mit abgeplattetem Trägheitsellipsoid. Denn für einen gegebenen Materialfehler ist der dadurch entstehende Fehlerwinkel ϵ zwischen Symmetrieachse und Hauptträgheitsachse für einen Kugelkreisel am größten, es werden also auch für ihn die Resonanzfunktionen A und B maximale Werte annehmen.

Welche Bedingungen zwischen δ , μ_1 und μ_2 ziehen nun das Vorhandensein von nur einer reellen Nullstelle des Nenners nach sich? Dazu sei die quadratische Gleichung $N=0$ (Gl. (8)) näher betrachtet. Diese hat die Form:

$$\gamma^4 + a\gamma^2 + b = 0 \dots \dots \dots (11).$$

Die Koeffizienten a und b lassen sich sofort aus (8) entnehmen. Aus der Lösung der Gl. (11):

$$\gamma^2 = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

sieht man, daß zwei reelle Wurzelpaare für γ nur dann auftreten können, wenn beide Lösungen für γ^2 positiv reell werden. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist

$$a < 0; \quad b > 0.$$

Diese Bedingung ist erfüllt für:

1. $\delta^2 < 1$; das entspricht dem verlängerten Kreisel.
2. $\delta^2 > 1 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_1\mu_2$; das entspricht, je nach den Werten der Verhältnisse μ_1 und μ_2 , einem mehr oder weniger stark abgeplattetem Kreisel.

Um diese Verhältnisse besser überblicken zu können, sollen sie an einem Kurvenbild veranschaulicht werden. Bild 8 zeigt die Abszissen der Resonanzstellen γ_R in Abhängigkeit von der Größe δ^2 für verschiedene Werte von μ_2 aufgetragen. Für $\delta^2 < 1$ (verlängerter Kreisel)

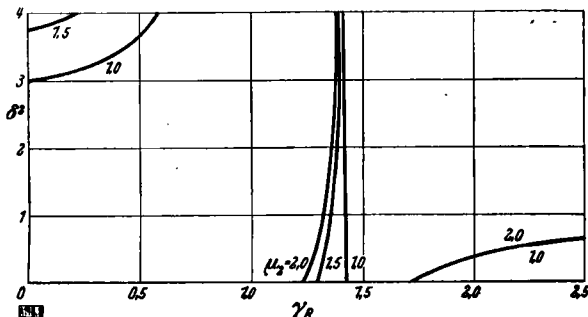


Bild 8. Die Resonanzstellen in Abhängigkeit von δ^2 für verschiedene Werte von μ_2 .

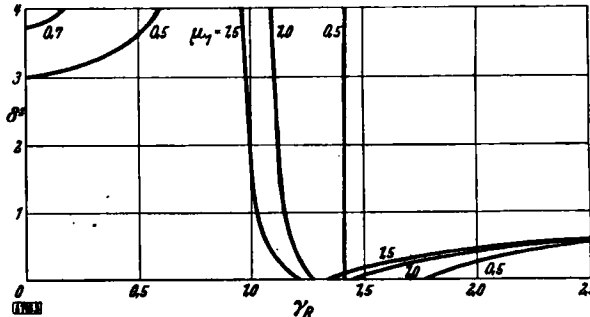


Bild 9. Die Resonanzstellen in Abhängigkeit von δ^2 für verschiedene Werte von μ_1 .

treten zwei Wurzeln auf, deren Lage sich mit einer Veränderung von μ_2 nur unwesentlich ändert. Die obere Nullstelle liegt jedoch sehr ungünstig, da sie in die Nähe der Betriebsdrehzahl kommen kann. Ein verlängerter Kreisel kommt deshalb für die Konstruktion derartiger Kreiselgeräte nicht in Frage. Für den abgeplatteten Kreisel gibt es ein Gebiet, in dem nur eine reelle Wurzel auftritt, die ihre Lage sowohl mit δ^2 als auch mit μ_2 nur wenig ändert. Für den stark abgeplatteten Kreisel treten dann wieder zwei reelle Wurzeln auf, von denen eine jedoch durch entsprechende Wahl von μ_2 ganz zum Verschwinden gebracht werden kann. Der größte Wert, den δ^2 erreichen kann, ist bekanntlich $\delta^2 = 4$. Das entspricht dem ebenen Kreisel. Für den bei den Versuchen benutzten Kreisel (von Anschütz & Co., Kiel) war $\delta^2 = 3,43$ gemessen worden.

Das entsprechende Schaubild für verschiedene Werte von μ_1 zeigt Bild 9 (d. h. Anbringen der Zusatzgewichte an der Kreiselkappe statt am Kardanring). Wieder haben wir für den verlängerten Kreisel zwei sehr ungünstig liegende Wurzeln. Für $\delta^2 > 1$ zunächst nur eine reelle Wurzel, die sich mit δ^2 fast nicht verschiebt, aber durch Vergrößern von μ_1 zu kleineren γ -Werten verschoben werden kann. Der Fall des sehr stark abgeplatteten Kreisels bringt wieder das Auftreten einer weiteren reellen Wurzel, die aber durch Vergrößerung von μ_1 fortgeschafft werden kann.

Aus diesen Betrachtungen kann man ersehen:

1. Der verlängerte Kreisel ist ungünstig.
2. Es muß die Bedingung

$$1 < \delta^2 < 1 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_1 \mu_2 \dots \dots \dots (12)$$

erfüllt sein. Da es aus zuvor klargestellten Gründen zweckmäßig ist, δ^2 möglichst groß zu wählen, so muß man durch eine entsprechende Vergrößerung von μ die Bedingung (12) erfüllen. Bemerkenswert ist, daß die Elastizität der Kreiselwelle in der Bedingung (12) überhaupt nicht auftritt.

Im vorliegenden Fall läßt sich eine sehr anschauliche Deutung der Tatsache geben, daß es durch geeignete Wahl der Trägheitsmomente gelingt, eine Resonanzstelle zum Verschwinden zu bringen. Die untere Resonanzstelle entsteht durch die Übereinstimmung von Umlauffrequenz und Nutationsfrequenz des Kreisels. Das soll näher erklärt werden.

Für die Nutationsfrequenz eines Kreisels mit elastischer Welle gilt für großen Impuls die Näherungsformel*):

$$n^2 = \frac{\Theta_C^2 \omega^2}{\Theta_x \Theta_y + \frac{\Theta_C^2 \omega^2}{c} (\Theta_y h + \Theta_x h)} \dots \dots \dots (13)$$

Führt man darin die hier benutzten dimensionslosen Bezeichnungen ein, so ergibt sich für die bezogene Nutationsfrequenz der Wert:

$$\left(\frac{n}{\nu}\right)^2 = \frac{\delta^2 \gamma^2}{(1 + \mu_1)(1 + \mu_2) + \delta^2 \gamma^2 (\mu_1 + \mu_2)} \dots \dots \dots (14)$$

Trägt man sich über γ als Abszisse die Frequenz als Ordinate auf, so ergibt die Formel (14) für $\frac{n}{\nu}$ die in Bild 10 gezeichnete Kurve. Es ist dies im wesentlichen eine Gerade, die für große γ -Werte etwas abbiegt. Trägt man sich noch dazu die Kurve der Kreisdrehzahl, also eine 45°-Gerade ein, so bekommt man entweder einen Schnittpunkt beider Kurven (Fall a) oder gar keinen Schnittpunkt (Fall b). Die Abszisse des Schnittpunktes erhält man aus (14), wenn man dort $\frac{n}{\nu} = \gamma$ ansetzt:

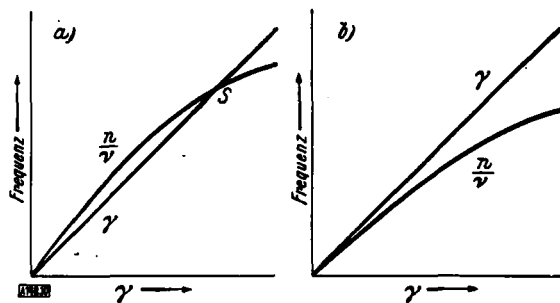


Bild 10. Erklärung der unteren Resonanzstelle.

$$\gamma^2 = \frac{1 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_1 \mu_2 - \delta^2}{\delta^2 (\mu_1 + \mu_2)} \dots \dots \dots (15)$$

Soll kein reeller Schnittpunkt S auftreten, soll also die Umlauffrequenz des Kreisels niemals mit der Nutationsfrequenz zusammenfallen, so muß

$$\delta^2 < 1 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_1 \mu_2 \dots \dots \dots (16)$$

* Siehe Magnus: Schwingungen kraftgekoppelter Kreisel. Ing.-Arch. Bd. 9 (1938), S. 178 bis 204.

gelten. Das deckt sich aber vollständig mit der zuvor abgeleiteten Bedingung Gl. (12). Im Diagramm (Bild 10) bedeutet das, daß die anfängliche Steilheit der $\frac{n}{v}$ -Kurve kleiner als 45° sein soll, denn nur dann ist bei dem vorliegenden Kurventyp kein Schnittpunkt möglich.

6. Zusammenfassung. Jeder Kreisel besitzt restliche Unwuchten, die beim Lauf Zentrifugalmomente hervorrufen. Es ist untersucht worden, wie die Trägheitsmomente eines Kreiselerätes zu wählen sind, damit die durch die Zentrifugalmomente erregten Schwingungen möglichst klein bleiben. Damit keine Resonanz von Kreiseldrehung und Nutationsfrequenz auftritt, muß zwischen den Trägheitsmomenten des Kreiselkörpers und denen der kardanischen Hängung die Beziehung (12) erfüllt sein. Diese Bedingung besagt, daß das Trägheitsmoment der Hängung eine bestimmte Mindestgröße haben muß. Ist das nicht der Fall, so kann man die Bedingung durch Vergrößerung der Trägheitsmomente der Hängung nachträglich befriedigen. Dabei ist ein Vergrößern des Trägheitsmomentes der Kreiselkappe wirksamer, als ein Vergrößern des Trägheitsmomentes des Kardanringes.

Die Resonanzkurve eines Kreiselerätes mit elastischer Kreiselwelle behält mindestens eine Unendlichkeitsstelle, die bei Übereinstimmung der durch die elastische Welle verursachten Querschwingung mit der Umlauffrequenz des Kreisels auftritt. Ihre Lage wird durch die Wirkung der Kreiselkräfte etwas verschoben.

Der verlängerte Kreisel ist ungünstig, da für ihn eine meist sehr hoch liegende zweite Resonanzstelle auftritt. Aber auch Kreiselkörper mit kugelförmigem Trägheitsellipsoid sind unbrauchbar, da für sie die wahrscheinliche Größe des durch Herstellungsfehler hervorgerufenen Fehlerwinkels zwischen Symmetrieachse und Hauptträgheitsachse am größten ist. Dieser Fehlerwinkel ist aber für den Lauf oberhalb der kritischen Drehzahl maßgebend.

Das günstigste Trägheitsmomentenverhältnis für einen symmetrischen Kreiselkörper liegt etwa bei $\sqrt{2}$ und ist unabhängig von der Elastizität der Kreiselwelle. 148

Graphische Statik räumlicher Kräftesysteme mit Hilfe der dualen Kräfteabbildung.

Von Robert Sauer in Aachen.

Unter einer projektiven Kräfteabbildung¹⁾ versteht man eine ebene oder räumliche Abbildung von Kräften, bei der die Wirkungslinien aller Kräfte projektiv transformiert werden und jedes Gleichgewichtssystem wieder in ein Gleichgewichtssystem übergeht. In der vorliegenden Arbeit wird eine besonders einfache projektive Kräfteabbildung, die duale Kräfteabbildung, eingeführt und zur Lösung der Grundaufgaben der graphischen Statik räumlicher Kräftesysteme benutzt. Dabei zeigt sich, daß die duale Abbildung die früher von R. v. Mises²⁾ und von W. Prager³⁾ angegebenen Abbildungen in einer besonderen Weise miteinander verknüpft, indem die Kraftvektoren eines Bündels nach v. Mises und die Momentvektoren eines Bündels nach Prager transformiert werden. Durch diese Verkopplung der Misesschen und Pragerschen Abbildungen, die sich zwangsläufig aus dem Begriff der dualen Kräfteabbildung ergibt, werden die Konstruktionen der graphischen Statik räumlicher Kräftesysteme erheblich vereinfacht.

1. Plücker'sche Kraftkoordinaten. Wir erinnern zunächst an die bekannte Darstellung einer an einem starren Körper angreifenden Kraft (eines „linienflüchtigen“ Vektors) durch Plücker'sche Koordinaten (Bild 1):

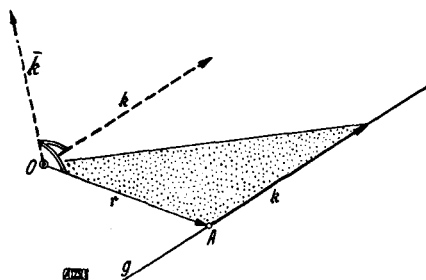


Bild 1.

Der in der Wirkungslinie g angreifende Kraftvektor \mathbf{f} wird bei Annahme eines festen Nullpunktes O in eindeutig bestimmter Weise ersetzt durch den nach O parallel verschobenen Kraftvektor \mathbf{f}' und das Kräftepaar mit dem Momentvektor

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} \dots \dots \dots (1),$$

den wir ebenfalls von O aus antragen wollen; \mathbf{r} ist der Ortsvektor eines beliebigen Punktes A der Wirkungslinie g . Die 2×3 Koordinaten der Vektoren $\mathbf{f}, \bar{\mathbf{f}}$ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit O als Nullpunkt, nämlich $k_1, k_2, k_3, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3$, nennen wir die Plücker-

¹⁾ R. Sauer: Math. Ann. Bd. 110 (1934), S. 464 bis 472 u. Z. angew. Math. Mech. Bd. 14 (1934), S. 193 bis 198.

²⁾ Z. Math. u. Phys. Bd. 64 (1917), S. 209 bis 232 u. Z. angew. Math. Mech. Bd. 4 (1924), S. 212.

³⁾ Z. angew. Math. Mech. Bd. 16 (1926), S. 341 bis 355.