

# Verfahren und Versuche zur Bestimmung der Reibungsmomente rasch umlaufender Körper

Von K. MAGNUS, Göttingen

Aus dem Institut für angewandte Mechanik der Universität zu Göttingen

*Die Güte der Lagerung von Kreiseln wird gewöhnlich nach der Auslaufzeit bewertet. Diese reicht aber nicht aus, den Reibungsvorgang erschöpfend zu beurteilen, weshalb nachstehend einige Verfahren erläutert und ihre Eignung zur Messung der Lagerreibung erörtert werden. Mit einem neu entwickelten Reibungsapparat wurden Versuche angestellt, auch die bei der Lagerreibung auftretenden Einzeleinflüsse unter den verschiedenen Bedingungen des Druckes, der Temperatur und der Kreiseldrehzahl zu erfassen.*

## I. Einleitung

Die hohen Anforderungen, die an empfindliche Kreiselgeräte gestellt werden müssen, lassen den Wunsch aufkommen, die Güte der Lagerung des Kreisels in Zahlenwerten oder Schaubildern zu erfassen. Bisher hat man sich dazu vor allem der Auslaufzeit bedient, die ja als Maß für die Güte eines Lagers gewertet werden kann. Als Auslaufzeit sei dabei die Zeit bezeichnet, die zwischen dem Abschalten des Antriebes und dem Stillstand des Kreisels liegt. In den vorliegenden Untersuchungen sollen nun einige Verfahren erläutert werden, die eine eingehendere Beurteilung der Kreiselager zulassen, als dies auf Grund der Auslaufzeit möglich ist.

Wenn zwei Kreisel gleicher Größe verschiedene Auslaufzeiten zeigen, so bedeutet das noch nicht, daß der Kreisel mit größerer Auslaufzeit bei der Betriebsdrehzahl geringere Reibungswiderstände zu überwinden hat als der Kreisel mit kürzerer Auslaufzeit. Um diese Verhältnisse zu klären, muß man die Momente selbst bestimmen und ihre Größe für die verschiedenen Drehzahlen angeben können. Drei Möglichkeiten zur Bestimmung dieser Momente und ihrer Abhängigkeit von der Drehzahl werden im folgenden besprochen und die Möglichkeiten ihrer Anwendung sowie die damit zu erreichenden Genauigkeiten behandelt.

## II. Bestimmung der Momentenkurven

Wird bei einem Kreisel vom Trägheitsmoment  $\Theta$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Antrieb abgeschaltet, so wirkt auf ihn ein von den Reibungen in den Lagern sowie den Bewegungswiderständen der Luft abhängiges Moment  $M$ , das sich mit der Winkelgeschwindigkeit ändert. Es gilt dann die Beziehung:

$$\Theta \frac{d\omega}{dt} = -M(\omega) \quad \dots \dots \dots (1).$$

Das Moment ist negativ, da es die Winkelgeschwindigkeit zu verkleinern sucht. Im Falle idealer „Festreibung“ ist  $M$  unabhängig von der Drehzahl, somit  $M = p = \text{konst.}$  Für zähe Flüssigkeitsreibung kann man  $M$  proportional zur Drehzahl, also  $M = k\omega$ , setzen. Für Dämpfung durch Luftwiderstand geht das Moment etwa proportional mit dem Quadrat der Drehzahl, also  $M = q\omega^2$ . Treten alle drei Reibungsarten gleichzeitig auf, so bekommt man aus Gl. 1 eine Differentialgleichung von der Form:

$$\Theta \frac{d\omega}{dt} + p + k\omega + q\omega^2 = 0 \quad \dots \dots \dots (2).$$

Durch geeignete Wahl der drei Konstanten  $q$ ,  $k$ ,  $p$  lassen sich schon sehr allgemeine Reibungsgesetze mit Hilfe des Ansatzes der Gl. 2 beschreiben. Doch kommt dieser Darstellung der Momentenfunktion  $M(\omega)$  nur geringer Wert zu, da sie nur eine analytische Näherung gibt, nicht aber auf physikalischen Gegebenheiten aufbaut. Es ist deshalb sicher besser, die Momentenfunktion in ihrer Abhängigkeit von  $\omega$  graphisch aufzutragen und aus dem Kurvenverlauf die interessierenden Eigenschaften abzulesen. Diese Kurve soll weiterhin als Momentenkurve bezeichnet werden. Der Ansatz der Gl. 2 kann dann als eine nach dem dritten Glied abgebrochene Taylorentwicklung der Momentenkurve angesehen werden. Es wird später an Beispielen noch klar werden, wie weit dieser Ansatz befriedigende Ergebnisse liefert.

**1. Bestimmung der Momentenkurve aus der Auslaufkurve.** In seiner Dissertation hat *Dittmer*<sup>1)</sup> das nachfolgende Verfahren zur Bestimmung der Momentenkurve aus der Auslaufkurve angegeben. Man bestimmt z. B. mit Hilfe von Stroboskop und Stoppuhr die Auslaufkurve eines Kreisels, d. h. die Drehgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit, also  $\omega = f(t)$ . Diese Kurve wird aufgezeichnet, indem man durch die Schar der Meßpunkte eine möglichst glatte Kurve zieht, die nun graphisch differenziert wird. Man bestimmt an einzelnen Punkten der Auslaufkurve den Neigungswinkel und trägt dessen Tangente in geeignetem Maßstab auf. Auf diese Weise bekommt man die Kurve der

<sup>1)</sup> C. H. Dittmer, Das Auslaufverfahren und seine Anwendung zur Bestimmung von Reibungskonstanten, Diss. Univ. Göttingen 1939.

Winkelbeschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit. Gleichzeitig aber stellt die Kurve in anderem Maßstab das auf den Kreisel wirkende Moment  $M$  in Abhängigkeit von der Zeit dar. Will man daraus das Moment in Abhängigkeit von der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ableiten, so hat man nur für jeweils feste Zeiten aus der Auslaufkurve die Winkelgeschwindigkeit, aus der differentiierten Auslaufkurve das dazugehörige Moment abzulesen. Diese Wertpaare kann man in einem  $M, \omega$ -Koordinatensystem auftragen und bekommt so die gesuchte Kurve  $M(\omega)$ .

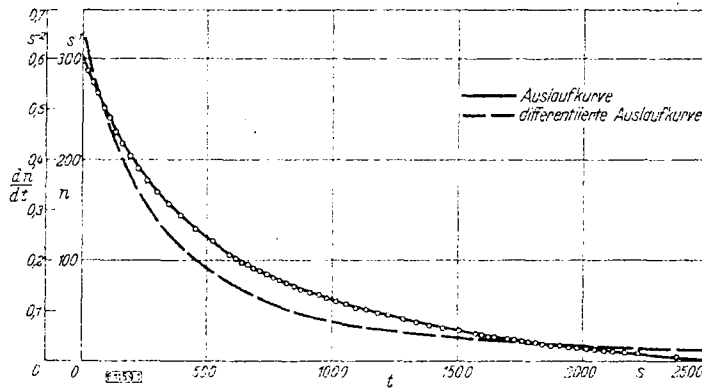


Bild 1. Die Auslaufkurve und ihre erste Ableitung.

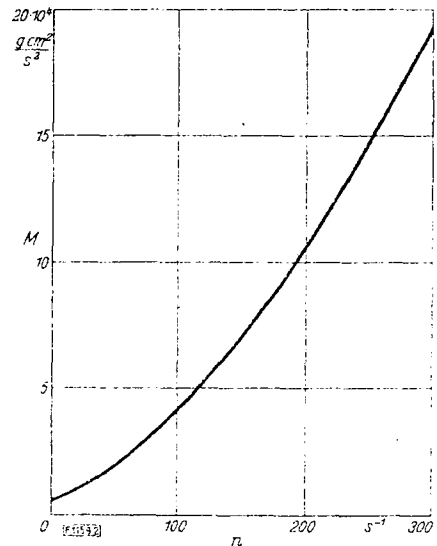


Bild 2 (rechts). Die Momentenkurve.  
Trägheitsmoment des verwendeten Kreisels:  
 $\Theta = 5,10 \cdot 10^4 \text{ g cm}^2$ .

Die Bilder 1 und 2 erläutern dieses Verfahren. Bild 1 zeigt die Auslaufkurve und die daraus durch Differentiation erhaltene Kurve der Winkelbeschleunigung; Bild 2 gibt die daraus gewonnene Momentenkurve wieder. Den Bildern ist ein Auslaufversuch an einem elektrisch angetriebenen Kreisel bei einem Luftdruck von 760 mm QS zugrunde gelegt.

Will man das Moment auch zahlenmäßig bestimmen, so muß man das Trägheitsmoment des Kreisels um seine Drehachse messen. Die Einheit der Momentenskala kann man dann folgendermaßen errechnen. Die Einheit der Drehzahlskala sei  $E_n$ , z. B. entspreche 1 cm der Ordinate einer Drehzahl  $n = 10/s$ . Die Einheit der Zeitskala sei  $E_t$  (z. B. 1 cm = 60 s). Die der Differentiation zugrunde gelegte Basis sei  $a$ . Das ist also diejenige dimensionslose Zahl, mit der der Tangens des Neigungswinkels der Auslaufkurve multipliziert wird, um einen für die Auftragung geeigneten Maßstab zu bekommen. Die Einheit der Kurve der Drehzahländerung  $\frac{dn}{dt}$  ist dann:

$$E_{\frac{dn}{dt}} = \frac{E_n}{a \cdot E_t}$$

Nun ist aber  $2 \pi n = \omega$ , also folgt aus Gl. 1:

$$M(\omega) = -\Theta \cdot 2 \pi \frac{dn}{dt}$$

und für die Einheit der Momentenkurve:

$$E_M = \frac{2 \pi \Theta E_n}{a E_t} \left[ \frac{\text{g cm}^2}{\text{s}^2} \right] \dots \dots \dots (3).$$

Was die Genauigkeit des Verfahrens anbetrifft, so ist zunächst die Genauigkeit der durch den Versuch gewonnenen Auslaufkurve von ausschlaggebender Bedeutung. Die Beobachtungsfehler beeinflussen also das Ergebnis ganz wesentlich. Um diese abzuschätzen, ist vorerst das bei den Versuchen angewandte Verfahren näher zu beschreiben.

Nach Einstellen der Betriebsdrehzahl des Kreisels (z. B. auf 330/s) wurde zu Beginn des Versuches ein Zeiß-Ikon-Stroboskop mit Spezialstrahler auf etwa 310 Lichtblitze je Sekunde eingestellt, der Kreiselantrieb abgeschaltet und die Zeit bis zum stroboskopischen Stillstand des Kreisels bestimmt. Dann wurde das Stroboskop auf kleinere Lichtblitzzahl eingestellt (z. B. 290/s) und wiederum die Zeit bis zum Stillstand gemessen. Da der Geschwindigkeitsabfall im ersten Teil der Auslaufkurve groß ist, müssen die Messungen in diesem Gebiet rasch aufeinander erfolgen. Der letzte Teil der Auslaufkurve läßt sich stroboskopisch nicht mehr gut beobachten, da das Gesichtsfeld bei zu geringer Zahl der Lichtblitze zu flimmern anfängt. Deshalb wurden in diesem Gebiet die Drehzahlen durch Auszählen gemessen und schließlich die Auslaufzeit bestimmt.

Meßfehler können bei diesem Verfahren vor allem durch die Ungenauigkeit des Stroboskopes entstehen. Einerseits war die Anzeige des verwendeten Stroboskopes nur auf etwa 2 bis 3% genau, andererseits sind bei fester Einstellung plötzliche Schwankungen der Lichtblitzzahl bis zu 3% beobachtet worden, die die genaue Feststellung des Kreiselstillstandes stark erschwerten. Man wird deshalb für den einzelnen Meßpunkt mit einem mittleren Fehler von mindestens 1% rechnen müssen. Diese Ungenauigkeit der Meßpunkte macht es unmöglich, nach numerischen Verfahren vorzugehen und z. B. durch Bildung der Differenzenquotienten die Drehzahländerung und damit das Moment zu bestimmen. Es ist vielmehr Aufgabe der zeichnerischen Auswertung, eine möglichst glatte Kurve durch die Meßpunkte hindurchzulegen und an dieser gemittelten Kurve dann die Neigung zu bestimmen. Kleine Unregelmäßigkeiten beim Zeichnen der Kurve, z. B. beim Anlegen eines neuen Kurvenlineals, können ganz erhebliche Fehler der Neigungsbestimmung verursachen. Dennoch können bei einiger Übung die differentiierten Kurven sehr genau werden, da ja durch die bei der Differentiation erhaltene Lage der Meßpunkte wieder eine ausgleichende Kurve hindurchgelegt wird. Lediglich am Anfang und am Schluß der Auslaufkurve lassen sich Ungenauigkeiten nicht vermeiden, da dort die Neigungsbestimmung nicht sicher ist.

**2. Bestimmung der Momentenkurve mit dem Reibungsapparat.** Nach Gl. 1 wirkt auf den Kreisel im Auslauf ein Moment  $M(\omega)$ . Dies ist nur möglich, wenn auch auf das Kreiselgehäuse ein Moment gleicher Größe aber in entgegengesetzter Richtung wirkt, das das Gehäuse herumzudrehen sucht. Bringt man nun das Kreiselgehäuse um die Kreiselachse drehbar an, und fesselt es elastisch an den Raum, so wird der jeweilige Ausschlag des Gehäuses dem Moment verhältnisgleich sein. Man kann also auf diesem Wege die Momente unmittelbar auswiegen.

Bild 3 zeigt einen zur Durchführung der Messungen gebauten Apparat. An Stelle der Verschlußdeckel wurden in das Kreiselgehäuse  $k$  zwei Achsenstücke  $a$  eingeschraubt, die durch zwei Kugellager  $l$  im Rahmen des Reibungsapparates drehbar gelagert waren. Da es bei dem Versuch darauf ankommt, möglichst geringe Festreibung in diesen Lagern zu bekommen, wurden die Achsen sehr dünn und die Lager so klein wie möglich gewählt. Um die Kugellager von dem Gewicht des Systems zu entlasten, wurde im unteren Ende der Achse  $a$  eine Stahlkugel von 2 mm Dmr. eingelassen, die auf der polierten Oberfläche eines gehärteten Stahlblocks  $b$  ruht. Diese Art der Lagerung hatte sich nach umfangreichen Versuchen als die vorteilhafteste erwiesen. Die Torsionsfeder  $t$  lieferte das Rückführmoment des Systems. Bei der guten Reibungsfreiheit würde das System nach einer Störung fast ungedämpfte Schwingungen ausführen, die die eigentlichen Messungen unmöglich machen würden. Deshalb ist noch eine zusätzliche Flüssigkeitsdämpfung angebracht, die aus zwei in einer Ölwanne bewegten Dämpfungsflügeln  $d$  besteht. Ein auf einer Skala spielender Zeiger  $z$  sowie eine Schnurrolle  $s$  zum Eichen der Torsionsfeder vervollständigen die Apparatur. Die Stromzuführungsdrähte sind durch die obere Hälfte der Achse geführt, damit Störungen durch Rückführmomente der Zulieferungsdrähte möglichst vermieden werden.

Beim Anlassen des Kreisels schlägt das Kreiselgehäuse im entgegengesetzten Sinne der Kreisdrehung aus und zeigt einen Ausschlag, der dem Antriebsmoment entspricht. Wenn der Kreisel auf Betriebsdrehzahl kommt, geht der Ausschlag bis auf null zurück, da dann das Antriebsmoment des Motors dem Reibungsmoment des Kreisels das Gleichgewicht hält. Man kann auf diese Weise feststellen, ob der Kreisel noch beschleunigt wird oder ob er bereits mit gleichbleibender Drehzahl läuft. Wird der Antrieb nun abgeschaltet, so schlägt die Kreiselkappe im Sinne der Kreisdrehung aus, da sie durch die Reibungen vom Kreisel mitgenommen wird. Die durch das plötzliche Abschalten erregten Schwingungen der Kappe werden durch die eingebaute Öldämpfung schnell zum Abklingen gebracht. Der Ausschlag der Kreiselkappe wird dann in Abhängigkeit von der Zeit aufgenommen. Bild 4 zeigt eine solche Kurve. Der dem Reibungsmoment proportionale Ausschlag geht im ersten Teil der Kurve stark zurück und nähert sich dann einem konstanten Wert, der unmittelbar dem Betrag der „Festreibung“ des Kreiselagere entspricht. Die Anzeige ist im allerletzten Teil der Kurve unruhig, da dann die Festreibung wegen der bekannten negativen Charakteristik schwingungerregend wirkt. Bleibt der Kreisel stehen, so geht der Ausschlag der Kappe auf null zurück.

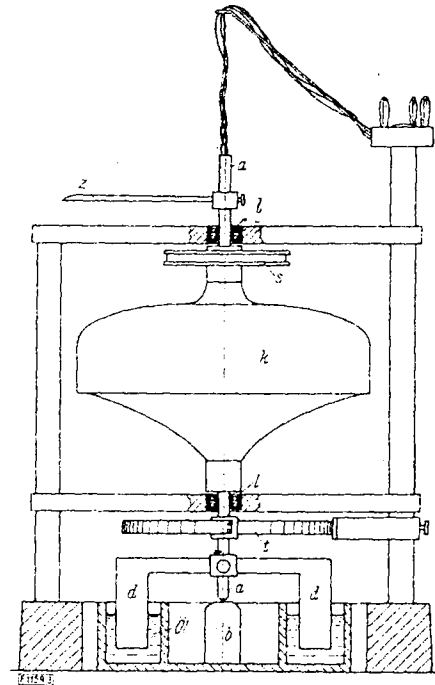


Bild 3. Reibungsapparat zur Bestimmung der Momentenkurve.

Die Kurve des Momentes in Abhängigkeit von der Zeit wird nun in geeignetem Maßstab aufgetragen und graphisch integriert. Dabei beginnt man mit der Integration am Ende der Kurve, damit die eine Randbedingung (Drehzahl = 0 für  $t = T_A$ ) erfüllt ist. Die Integration kann dann in etwa 10 bis 15 Schritten erfolgen. Die Erfüllung der zweiten Randbedingung ( $n =$  Betriebsdrehzahl für  $t = 0$ ) liefert gleichzeitig eine Kontrolle für die Genauigkeit der Integration. Die Betriebsdrehzahl bzw. die Drehzahl zu Beginn des Auslaufversuches läßt sich mit großer Genauigkeit stroboskopisch bestimmen.

Die Einheit der integrierten Kurve, also die Einheit  $E_n$  der Drehzahl je Sekunde läßt sich aus der Einheit des Momentes  $E_m$  und der Einheit der Zeit  $E_t$  sowie aus der Integrationsbasis  $a$  bestimmen. Das Einheitsquadrat der Momentenfläche ist  $E_m E_t$ , demnach ergibt sich für den Beschleunigungsausdruck  $\Theta \frac{d\omega}{dt}$  die Einheit  $E_m E_t a$ . Für die Drehzahl bekommt man also:

$$E_n = \frac{E_m E_t a}{2\pi \Theta} \left[ \frac{1}{s} \right] \dots \dots \dots (4).$$

Durch geeignete Wahl der Integrationsbasis  $a$  kann man erreichen, daß die Einheit  $E_n$  eine gerade Zahl, z. B. 10, wird, so daß man ohne Schwierigkeiten die Drehzahlen aus der integrierten Kurve ablesen kann. Insbesondere wird sich eine geeignete Wahl von  $a$  dann lohnen, wenn zur Integration ein mechanischer Integrator verwendet wird und viele Momentenkurven von Kreiseln mit gleichen Trägheitsmomenten zu integrieren sind.

Hat man auf diese Weise den Verlauf der Drehzahl in Abhängigkeit von der Zeit bestimmt, so kann man wieder für jeweils feste Zeiten die zusammengehörigen Wertepaare von  $M$  und  $n$  aus den beiden Kurven ablesen und in einem  $M, n$ -Koordinatensystem auftragen. So erhält man die Momentenkurve.

Die Fehler dieses Verfahrens liegen vor allem in der Bestimmung des Momentes, denn die nachfolgende Integration kann je nach den zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln beliebig genau durchgeführt werden. Bei dem beschriebenen Aufnahmeverfahren liegt der hauptsächlichste Fehler in den Anzeigefehlern des Reibungsapparates infolge der Festreibung der Gehäuselagerung; denn beim Heruntergehen des Ausschlages wird der Apparat stets einen dieser Festreibung entsprechenden Fehler zeigen. Wenn auch die Festreibung sehr klein ist, so kann doch das Endergebnis stark gefälscht werden, da sich die Einzelfehler bei der Integration summieren. Um den Reibungsfehler zu beseitigen, wurde der Reibungsapparat unmittelbar vor jeder Ablesung durch einen kleinen Elektromotor mit Exzenter in Erschütterungen versetzt. Diese Schwingungen müssen so groß sein, daß die Beschleunigungen die Ruhereibung überwinden, dürfen aber nicht so groß werden, daß Drehmomente dadurch entstehen<sup>2)</sup>. Im ersten Drittel der Auslaufkurve sorgt der Kiesel schon selbst für die notwendigen Erschütterungen, läuft er aber langsam, so sind diese nicht mehr stark genug. Die Genauigkeit der Einstellung läßt sich durch Versuchsreihen feststellen. Es zeigte sich, daß der mittlere Fehler der Einzelmessung mit Erschütterung weniger als ein Drittel des Fehlers der Messungen ohne Erschütterungen betrug.

Eine weitere Fehlermöglichkeit besteht darin, daß aus den Löchern des Kieselgehäuses Luft ausgeblasen wird, deren Reaktionskräfte Fehldrehmomente um die Gehäuseachse hervorrufen. Man kann diesen Fehler durch Schließen der Gehäuselöcher beseitigen. Versuche nach dem Auslaufverfahren hatten gezeigt, daß das Verschließen der Löcher auf den Auslaufvorgang keinen wesentlichen Einfluß hat.

Schließlich können Fehler durch ungeeignete Wahl der Konstanten des Reibungsapparates entstehen. Das zwischen dem Kiesel und seinem Gehäuse übertragene Reibungsmoment ist ja abhängig von der Relativgeschwindigkeit beider, also von der Differenz der Absolutgeschwindigkeiten des Kreisels und des Gehäuses. Da man mit dem Reibungsapparat lediglich die von der Kreiseldrehung verursachten Reibungsmomente erfassen will, so muß man versuchen, die Eigenbewegungen des Gehäuses möglichst klein zu halten, um Rückwirkungen der Gehäusebewegung auf das Auslaufen des Kreisels zu vermeiden. Das geschieht durch Anbringen einer Dämpfungseinrichtung, deren Wirksamkeit so abgestimmt ist, daß die Gehäuseschwingungen fast aperiodisch gedämpft werden. Eine geringere Dämpfung kann zu störenden periodischen Eigenschwingungen des Gehäuses führen, eine stärkere Dämpfung kann unter Umständen Veranlassung zu Schleppfehlern geben, insbesondere dann, wenn die zeitliche Änderung des übertragenen Momentes größere Werte annimmt, wie dies z. B. zu Beginn des Auslaufens eines Kreisels der Fall sein kann.

**3. Bestimmung der Momentenkurve auf unmittelbarem Wege.** Mit dem zuvor beschriebenen Reibungsapparat kann man die Momentenkurve  $M(\omega)$  auch unmittelbar bestimmen, ohne zu den

<sup>2)</sup> s. F. v. Grundherr u. K. Klotter, Über die Fehlweisungen der Bordmeßgeräte bei betriebsmäßiger Erschütterung, Jb. Dtsch. Luftf.-Forsch. 1938, München u. Berlin 1938, S. III 3/5.

Hilfsmitteln der graphischen Differentiation oder Integration greifen zu müssen. Nur muß man dann wieder die Unannehmlichkeiten der Drehzahlbestimmung während des Auslaufens mit in Kauf nehmen. Man braucht jetzt nur bei jedem stroboskopischen Stillstand gleichzeitig den Ausschlag des Reibungsapparates abzulesen und hat dann sofort das Moment in Abhängigkeit von der Drehzahl. Die Genauigkeit des Verfahrens hängt von den Fehlern der stroboskopischen Drehzahlbestimmung sowie der Anzeige des Reibungsapparates ab.

**4. Vergleich der drei Verfahren zur Bestimmung der Momentenkurve.** Die Frage nach der Anwendbarkeit der drei Verfahren läßt sich leicht beantworten. Ist der Kreisel so in einem Gehäuse eingebaut, daß die Art der Lagerung in dem Reibungsapparat nicht anwendbar ist, so kann nur das Auslaufverfahren in Frage kommen. Das ist also stets dann der Fall, wenn die mit dem Kreisel verbundenen Massen so groß sind, daß eine genügend reibungsfreie Lagerung nicht zu erreichen ist. In vielen Fällen könnte man durch Aufhängen an einem Torsionsdraht eine reibungsfreie Lagerung herstellen.

Das Auslaufverfahren ist nicht anwendbar, wenn der Kreisel in einer undurchsichtigen Kappe eingeschlossen, also die Drehzahl nicht zu bestimmen ist. In vielen Fällen läßt sich diese Schwierigkeit durch den Einbau eines Fensters umgehen, doch wird das für Reihenuntersuchungen nicht in Frage kommen. Ferner bereitet das Auslaufverfahren Schwierigkeiten bei Kreiseln mit besonders kurzer Auslaufzeit, also vor allem bei sehr kleinen Kreiseln. Es ist dann meist nicht möglich, eine genügende Anzahl von Meßpunkten zu bekommen.

Das Verfahren mit dem Reibungsapparat ist stets dann von Vorteil, wenn eine Lagerung im Reibungsapparat möglich ist; läßt sich außerdem die Drehzahl messen, dann kann man auch das

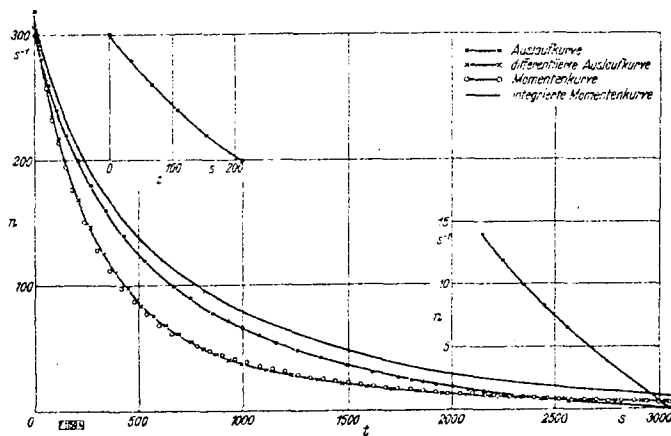


Bild 4. Die aus der Auslaufkurve abgeleitete Momentenkurve; integrierte Momentenkurve.

unmittelbare Verfahren der Bestimmung der Momentenkurve anwenden. Welches Verfahren am vorteilhaftesten ist, muß von Fall zu Fall entschieden werden.

An einem Beispiel soll die Genauigkeit der drei Verfahren verglichen werden. Es wurden bei einem Auslaufversuch gleichzeitig alle drei Verfahren angewandt, indem sowohl die Drehzahl als auch das Moment in Abhängigkeit von der Zeit aufgenommen wurden. Der Auslaufversuch wurde mit einem elektrisch angetriebenen Kreisel der Firma Anschütz & Co. bei normalem Luftdruck und normaler Temperatur durchgeführt. Die Betriebsdrehzahl betrug 330/s, das Trägheitsmoment des Kreisels war  $5,4 \cdot 10^4 \text{ g cm}^2$ . Bild 4 zeigt das Ergebnis. Es sind aufgetragen:

1. Die Auslaufkurve (ihr Anfang und ihr Ende sind nochmals in verändertem Maßstab aufgetragen, damit die Bestimmung des Differentialquotienten sicherer ist).
2. Die differenzierte Auslaufkurve.
3. Das Moment in Abhängigkeit von der Zeit. Der Maßstab ist dabei so gewählt worden, daß die Momentenkurve möglichst mit der differenzierten Auslaufkurve zusammenfällt. Auf diese Weise ist ein Vergleich möglich.

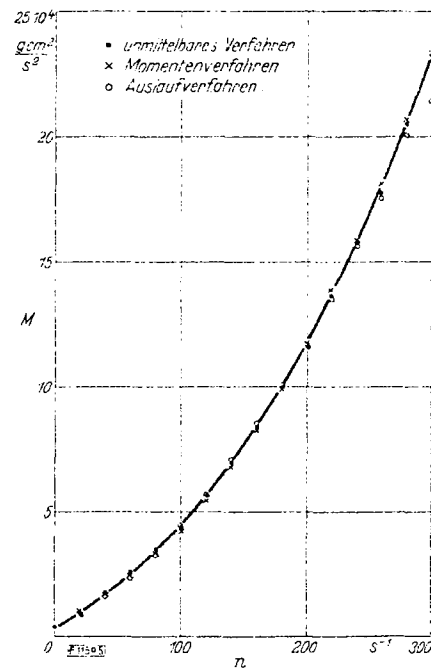


Bild 5. Vergleich der nach verschiedenen Verfahren erhaltenen Momentenkurven.

Zahlentafel 1. Momente, bestimmt nach dem Auslauf-, dem Momenten- und dem unmittelbaren Verfahren für verschiedene Drehzahlen.

Drehzahl $n$ $s^{-1}$	Moment in $g\text{cm}^2/s^2$		
	Auslaufverf.	Momentenverf.	Unmittelbares Verf.
0	$0,39 \cdot 10^4$	$0,34 \cdot 10^4$	$0,34 \cdot 10^4$
20	$0,92 \cdot 10^4$	$0,97 \cdot 10^4$	$1,01 \cdot 10^4$
40	$1,62 \cdot 10^4$	$1,68 \cdot 10^4$	$1,76 \cdot 10^4$
60	$2,30 \cdot 10^4$	$2,44 \cdot 10^4$	$2,56 \cdot 10^4$
80	$3,26 \cdot 10^4$	$3,30 \cdot 10^4$	$3,50 \cdot 10^4$
100	$4,42 \cdot 10^4$	$4,22 \cdot 10^4$	$4,38 \cdot 10^4$
120	$5,69 \cdot 10^4$	$5,45 \cdot 10^4$	$5,65 \cdot 10^4$
140	$7,08 \cdot 10^4$	$6,80 \cdot 10^4$	$6,92 \cdot 10^4$
160	$8,54 \cdot 10^4$	$8,25 \cdot 10^4$	$8,39 \cdot 10^4$
180	$10,05 \cdot 10^4$	$9,90 \cdot 10^4$	$9,96 \cdot 10^4$
200	$11,62 \cdot 10^4$	$11,70 \cdot 10^4$	$11,68 \cdot 10^4$
220	$13,50 \cdot 10^4$	$13,90 \cdot 10^4$	$13,63 \cdot 10^4$
240	$15,60 \cdot 10^4$	$15,88 \cdot 10^4$	$15,72 \cdot 10^4$
260	$17,50 \cdot 10^4$	$18,10 \cdot 10^4$	$17,71 \cdot 10^4$
280	$20,00 \cdot 10^4$	$20,70 \cdot 10^4$	$20,70 \cdot 10^4$
300	$21,40 \cdot 10^4$	$23,40 \cdot 10^4$	$23,20 \cdot 10^4$

4. Die integrierte Kurve des Momentes. Die Integration ist in 15 Schritten durchgeführt. Die Kurve ist in der Ordinate etwas verschoben, damit ein Zusammenfallen mit der Auslaufkurve vermieden wird. Man erkennt auf diese Weise schon qualitativ eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Auslaufverfahren und Momentenverfahren.

Die Bestimmung der Kurve  $M(\omega)$  nach den drei Verfahren gestattet einen guten Vergleich und eine Abschätzung der erreichbaren Genauigkeiten. Es ergaben sich die in Zahlentafel 1 angegebenen Werte.

In Bild 5 sind die nach den drei Verfahren gewonnenen Momentenkurven  $M(\omega)$  aufgetragen. Die Messungen nach dem Momentenverfahren

und dem unmittelbaren Verfahren stimmen am besten miteinander überein; das sieht man auch aus der Zahlentafel 1, da für diese beiden Verfahren die prozentualen Abweichungen der Meßwerte am geringsten bleiben. Das Auslaufverfahren gibt für große Drehzahlen etwas zu kleine Werte.

### III. Ergebnisse einiger Momentenbestimmungen<sup>3)</sup>

Diese nach dem Auslaufverfahren gewonnenen Momentenbestimmungen wurden an einem Kreisel des Kreiselkompasses der Firma Anschütz & Co. ausgeführt, dessen Trägheitsmoment  $\Theta = 5,40 \cdot 10^4 \text{ g cm}^2$  betrug. Die in Abschn. 4 beschriebenen Versuche sind mit Hilfe des Reibungsapparates an verschiedenen Kreiseln der genannten Firma durchgeführt.

In jedem Falle war es das Ziel der Versuche, das Reibungsmoment in Abhängigkeit von der Drehgeschwindigkeit des Kreisels zu bestimmen. Deshalb wird bei den folgenden Ergebnissen nur diese Momentenkurve  $M(\omega)$  gebracht und nicht die Kurven der zeitlichen Abhängigkeiten des Momentes und der Drehgeschwindigkeit, aus denen ja erst die  $M(\omega)$ -Kurve gewonnen wird. Die Auslaufzeit wird jedesmal bei den Kurven vermerkt werden.

1. **Vorversuche.** Vor Beginn der eigentlichen Versuche sollte der Einfluß verschiedener Faktoren auf den Gang der Messungen bestimmt werden.

a) Reproduzierbarkeit der Werte unter gleichen äußeren Bedingungen. Es wurden fünf Versuche bei gleicher Temperatur, gleichem Luftdruck und gleicher Anlaufzeit durchgeführt, die in ihren Auswertungen Abweichungen bis höchstens 3,6% ergaben. Die mittlere Abweichung liegt etwa bei 1,4%. Mit diesem Fehler muß man also bei den Versuchen rechnen.

b) Einfluß der Anlaufzeit bzw. der Betriebsdauer des Kreisels vor dem Versuch. Bei längerer Betriebsdauer erwärmen sich die Lager des Kreisels, so daß eine Beeinflussung des Auslaufverhaltens eintritt. Die Wirkungen der Lagertemperatur werden im Abschn. 3 eingehender besprochen werden. Bei den durchgeführten Versuchen mit Betriebszeiten bis zu zwei Stunden war die Erwärmung so gering, daß eine Änderung der Momentenkurve nicht festzustellen war, der Einfluß liegt also innerhalb der Fehlergrenze der Versuche.

c) Versuche mit verschlossenen Gehäuselöchern. Beim Lauf bläst der Kreisel durch die im Gehäuse befindlichen Löcher Luft aus. Diese Luft erzeugt Momente, die die Versuche bei Messungen mit dem Reibungsapparat erheblich stören würden; deshalb muß dabei die Kappe ganz verschlossen werden. Nach dem Auslaufverfahren kann man feststellen, ob dieses Verschließen wesentlichen Einfluß auf die Luftreibung des Kreisels hat. Die Versuche zeigten, daß das nicht der Fall war. Infolge des Fehlers der Lüftung wurde jedoch die Erwärmung größer und deshalb der Temperatureinfluß etwas stärker. Die Abweichungen blieben aber auch hier innerhalb der Fehlergrenze.

d) Versuche mit lotrechter und waagerechter Kreiselachse. Die Versuche a bis c sind durchweg mit waagrecht liegender Kreiselachse durchgeführt. Bei den Versuchen mit dem Reibungsapparat stand die Kreiselachse senkrecht. Dabei hat das untere Kreiselager das gesamte

<sup>3)</sup> Die in den nachfolgenden Abschnitten 1 bis 3 beschriebenen Versuche sind gemeinsam mit Herrn Dr. C. H. Dittmer durchgeführt worden.

Gewicht zu tragen, so daß sich die Lagerreibungen erheblich ändern. Es ergaben sich die Momentenkurven des Bildes 6. Bei senkrechtstehender Kreiselachse sind die Reibungsmomente für alle Drehzahlen größer als bei waagrecht liegender Achse. Das macht sich auch in einer um fast 17% kürzeren Auslaufzeit bemerkbar. Die den Kurven angeschriebenen Zahlen geben die Auslaufzeit in Minuten an. Nähert man die  $M(\omega)$ -Kurven durch einen quadratischen Ansatz an von der Form:

$$M(\omega) = q\omega^2 + k\omega + p \dots \dots \dots (5),$$

so kann man feststellen, daß durch das Senkrechtstellen der Achse vor allem der Koeffizient  $p$ , also die „Festreibung“, vergrößert wird. Aber auch  $k$ , die lineare Reibung, wird größer; die quadratische Reibung bleibt ungeändert.

e) Versuche mit verschiedener Lage der Kreiselachse zum magnetischen Meridian. Bremsversuche an Kreiseln mit Wirbelstromdämpfung hatten einen guten Erfolg und ergaben vor allem die Abhängigkeit der Wirbelstromdämpfung von der Drehgeschwindigkeit des Kreisels mit guter Genauigkeit. Es erhebt sich danach die Frage, ob die magnetischen Kraftlinien des Erdfeldes eine dämpfende Wirkung auf einen auslaufenden Kiesel haben können, ob also die Momentenkurven bei Lagen eines Kreisels senkrecht oder parallel zum magnetischen Meridian verschieden sind. Die Versuche zeigten, daß auch hier die Einflüsse innerhalb der Meßgenauigkeit liegen, also nicht feststellbar waren.

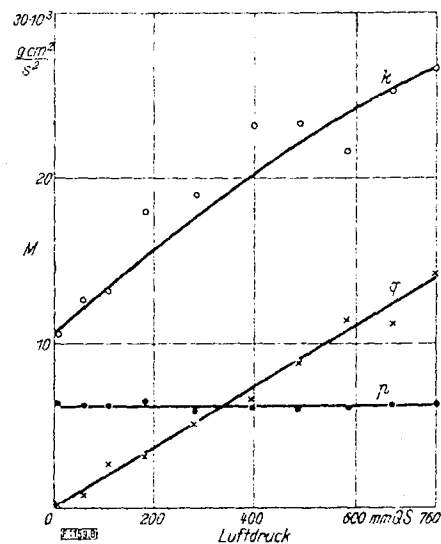
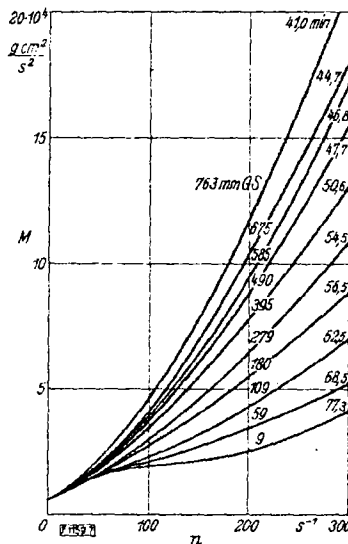
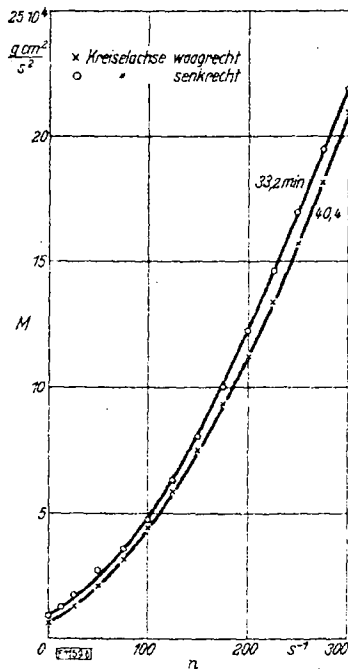


Bild 7. Momentenkurven für verschiedene Werte des Luftdruckes.

Bild 8. Verlauf der zu den Reibungsbeiwerten  $q, k, p$  gehörigen Momente (für  $n = 100 \text{ s}^{-1}$ ) in Abhängigkeit vom Luftdruck.

Bild 6 (links). Momentenkurven bei waagrecht und senkrecht stehender Kreiselachse. Bei waagrecht stehender Kreiselachse ist die Auslaufzeit größer als bei senkrechter.

**2. Versuche bei verschiedenem Atmosphärendruck.** Um die Abhängigkeit der Luftreibung vom Druck festzustellen, wurden Auslaufversuche unter einem Rezipienten bei den verschiedensten Luftdrücken durchgeführt. Die auf diese Weise gewonnenen Momentenkurven zeigt Bild 7. An den Kurven sind einmal die dazugehörigen Drücke in mm QS und zum anderen die Auslaufzeiten in Minuten angeschrieben. Da sich die Lagerreibung mit dem Luftdruck nicht oder nur ganz geringfügig ändert, so ist für die Verringerung des Gesamtreibungsmomentes ausschließlich die Luftreibung verantwortlich zu machen. Es gelingt auf diesem Wege auch, eine Trennung von Luft- und Lagerreibung durchzuführen, indem man einmal einen Versuch bei normalem Luftdruck und dann einen Versuch im Vakuum anstellt. Der eine Versuch ergibt die Gesamtreibung, der zweite die Lagerreibung und ihre Differenz die Luftreibung, worauf später noch zurückzukommen ist.

Die Annäherung der Momentenkurven in Bild 7 durch Parabeln zweiten Grades nach Gl. 5 kann jetzt nur den Wert einer vereinfachten analytischen Beschreibung haben, denn die bei geringen Luftdrücken aufgenommenen Kurven zeigen eindeutig einen Wendepunkt, der aber durch eine quadratische Parabel niemals wiedergegeben werden kann. Trotzdem ist diese Annäherung durchgeführt worden, um zu zeigen, wie der Gang der Koeffizienten  $q, k, p$  mit dem Luftdruck ist. Bild 8 zeigt das Ergebnis. Die Werte sind erhalten bei Annäherung durch eine quadratische Parabel, die an den

Punkten  $n = 10/s$ ,  $n = 150/s$  und  $n = 300/s$  mit der wirklichen Momentenkurve übereinstimmt. Um für die Auftragung einen geeigneten Maßstab und gleiche Dimensionen zu bekommen, sind nicht die Werte der Reibungskoeffizienten, sondern die Reibungsmomente für eine Drehzahl von  $n = 100/s$  aufgetragen.

Die Versuche zeigen also, daß die Festreibung  $p$  unabhängig vom Luftdruck ist, wie es zu erwarten war. Dagegen nehmen die lineare Reibung  $k$  sowie die quadratische Reibung  $q$  mit geringer werdendem Luftdruck etwa linear ab. Die quadratische Reibung nimmt dabei bis auf Null ab. Wir können aus Bild 8 schließen, daß die Lagerreibung durch die Festreibung und einen Teil der linearen Reibung gebildet wird, während die Luftreibung den quadratischen Anteil der Reibung und den Rest der linearen Reibung liefert.

In Bild 9 sind die Momentenkurven der Lagerreibung und der Luftreibung noch einmal herausgezeichnet. Man sieht, daß oberhalb  $n = 90/s$  die Luftreibung größer ist. Bei der Betriebsdrehzahl ist sie etwa fünfmal so groß wie die Lagerreibung.

Genauere Annäherungen der Momentenkurven als durch eine quadratische Parabel kann man auch durch andere Funktionen erhalten. Wenn es darauf ankommt, die Reibungsfunktionen nur in der Nähe der Betriebsdrehzahl wiederzugeben, so würden in beiden Fällen lineare Ansätze genügen. Für die Luftreibung  $R_{Luft}$  könnte man einen Ansatz von der Form wählen:

$$R_{Luft} = R (n - n_1) \dots \dots \dots (6)$$

wobei  $R$  und  $n_1$  die aus der Momentenkurve zu bestimmenden Konstanten sind. Der Ansatz Gl. 6 gilt etwa von  $n = 200/s$  bis  $n = 330/s$ . Die Formel hat Ähnlichkeit mit der Widerstandsformel, die für Geschosse aufgestellt wurde.

Auch die Lagerreibung kann man für  $n > 200/s$  gut durch einen linearen Ansatz von der Form

$$R_{Lager} = k n + P \dots \dots \dots (7)$$

annähern.

Soll die gesamte Kurve dargestellt werden, so kann man für die Luftreibung den Ansatz mit unbestimmtem Exponenten in der Form

$$R_{Luft} = A n^\alpha$$

versuchen. Man bekommt so für die in Bild 9 gezeichnete Kurve den Wert  $\alpha = 1,65$ .

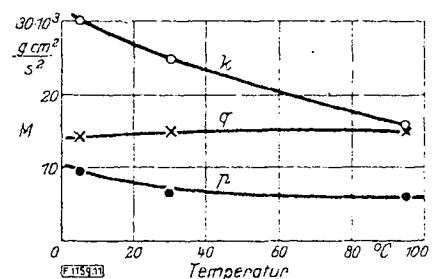
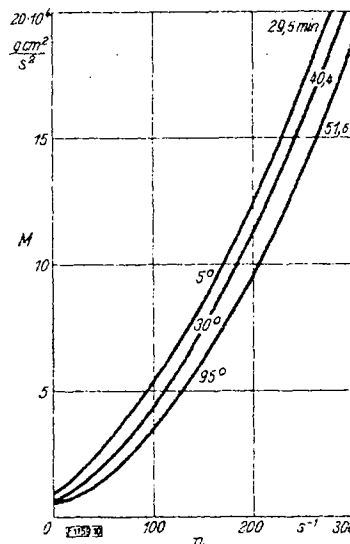
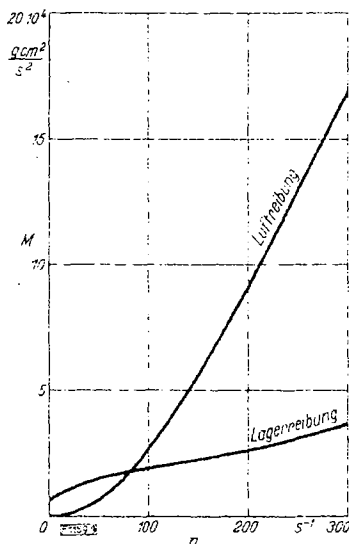


Bild 11. Verlauf der zu den Reibungsbeiwerten  $q$ ,  $k$ ,  $p$  gehörigen Momente (für  $n = 100 s^{-1}$  in Abhängigkeit von der Temperatur).

Bild 9 (links). Momentenkurven der Luftreibung und der Lagerreibung.

Bild 10 (Mitte). Momentenkurven bei verschiedenen Temperaturen.

**3. Versuche bei verschiedenen Temperaturen.** Bei manchen Versuchen wurden mehr oder weniger starke Erwärmungen der Kreisellager festgestellt. Um zu untersuchen, wie sich die Temperaturunterschiede auf die Momentenkurven auswirken, wurden drei Versuche bei den Temperaturen von  $5^\circ$ ,  $30^\circ$  und  $95^\circ$  durchgeführt. Die Ergebnisse zeigt Bild 10. Die angeschriebenen Zahlen bezeichnen die zu den Versuchen gehörigen Temperaturen in Celsiusgraden und die Auslaufzeiten. Bemerkenswert sind die starken Änderungen der Auslaufzeit.

Die drei Momentenkurven lassen sich gut durch quadratische Parabeln annähern. Man kann auf diese Weise feststellen, welche Reibungsart hauptsächlich für die Verringerung der Gesamtreibung mit wachsender Temperatur verantwortlich ist. Aus Bild 11, das die Reibungskoeffizienten in Abhängigkeit von der Temperatur zeigt, sieht man, daß vor allem die lineare Reibung, die im wesentlichen



durch die Zähigkeit des Schmieröls bedingt ist, kleiner wird. Aber auch die Festreibung nimmt etwas ab; der quadratische Anteil, der durch die Luftreibung mit hereinkommt, bleibt praktisch konstant. Die Änderung der Luftdichte durch die erhöhte Temperatur bleibt also ohne merkbaren Einfluß.

**4. Versuche mit Kreiseln verschiedener Größe.** Für die Versuche standen drei elektrisch angetriebene Kreisel der Firma Anschütz & Co. zur Verfügung. Die Trägheitsmomente  $\Theta$  und Gewichte  $m$  betragen:

$$\begin{aligned} \text{Kreisel 1: } \Theta &= 5,40 \cdot 10^4 \text{ gcm}^2; m = 2290 \text{ g,} \\ \text{Kreisel 2: } \Theta &= 2,75 \cdot 10^3 \text{ gcm}^2; m = 429,7 \text{ g,} \\ \text{Kreisel 3: } \Theta &= 1,68 \cdot 10^2 \text{ gcm}^2; m = 58,9 \text{ g.} \end{aligned}$$

Für diese Kreisel wurden mit dem anfangs beschriebenen Reibungsapparat die Momentenkurven bei normalem Luftdruck und im Vakuum (3 mm QS) aufgenommen.

Da sich die Kreisel in ihren Trägheitsmomenten um mehr als zwei Zehnerpotenzen unterscheiden, war von vornherein klar, daß die Anzeigegenauigkeit des Reibungsapparates für die drei Kreisel verschieden sein mußte. Die Meßfehler gingen bei dem sehr kleinen Kreisel manchmal über 10% hinaus. Um trotzdem zuverlässige Werte zu bekommen, wurden etwa 8 bis 10 Auslaufversuche angestellt und deren Ergebnisse dann gemittelt. Für die Messungen mit den Kreiseln 1 und 2 reichte die Genauigkeit der Momentenanzeige aus.

Um die Messungen an den drei Kreiseln vergleichen zu können, müssen wir auf die Auslaufgl. 1 zurückgreifen und diese dimensionslos machen. Mit Hilfe der Betriebsdrehgeschwindigkeit  $\omega_b$  führen wir die dimensionslose Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega} = \omega/\omega_b$  und die dimensionslose Zeit  $\tau = t/\omega_b$  ein.

Die Auslaufgl. 1 geht nun über in:

$$\Theta \omega_b^2 \frac{d\bar{\omega}}{d\tau} = -M(\omega) \quad \text{oder} \quad \frac{d\bar{\omega}}{d\tau} = F \dots \dots \dots (8) \text{ u. } (9).$$

Dabei ist

$$F = \frac{-M}{\Theta \omega_b^2}$$

eine dimensionslose Funktion von  $\bar{\omega}$ , die wir als Verlustfunktion bezeichnen können, da sie das Verhältnis des jeweiligen Reibungsmomentes zur Drehenergie bei der Betriebsdrehzahl angibt. Den reziproken Wert von F könnte man als „Gütefunktion“ eines Kreisels ansehen, die um so größer ist, je weniger Reibungsmomente der Kreisel erfährt. Aus Gl. 9 läßt sich eine dimensionslose Auslaufzeit  $\tau_A$  errechnen:

$$\tau_A = \int_{\bar{\omega}=0}^{\bar{\omega}=1} \frac{\Theta \omega_b^2}{M} d\bar{\omega} = \int_{\bar{\omega}=0}^{\bar{\omega}=1} \frac{d\bar{\omega}}{F} \dots \dots \dots (10).$$

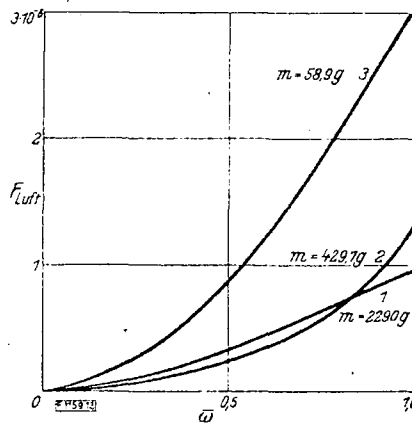
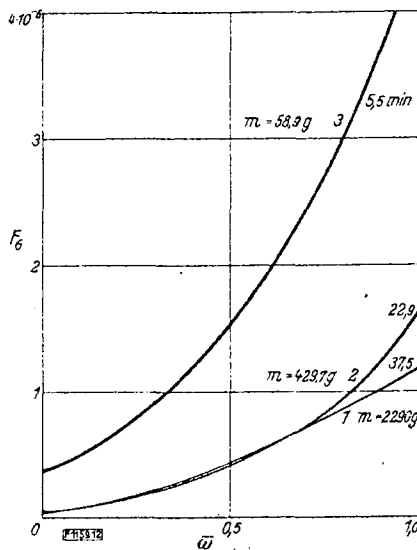
Die dimensionslose Auslaufzeit ist also das Integral der Gütefunktion, genommen von der Betriebsdrehzahl bis zum Stillstand. Die wirkliche Auslaufzeit bekommt man dann aus der Beziehung

$$T_A = \tau_A / \omega_b \dots \dots \dots (11).$$

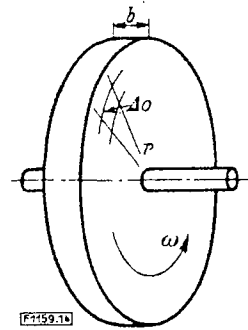
Zur Darstellung der mit den drei Kreiseln erzielten Ergebnisse ist nun die Verlustfunktion F in Abhängigkeit von der dimensionslosen Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}$  geeignet, da sie ja die mit einem konstanten Faktor multiplizierte Momentenfunktion darstellt. Bild 12 stellt die mit Hilfe der Gesamtreibung gebildete Verlustfunktion  $F_\theta$  der drei Kreisel dar. Die angeschriebenen Zahlen bedeuten die Auslaufzeit  $T_A$ , die über die Beziehungen der Gl. 10 und 11 mit den gezeichneten Kurven zusammenhängen. Man hat darin wieder eine Genauigkeitskontrolle des gesamten Verfahrens, indem man die gemessene Auslaufzeit mit der aus der Kurve der Verlustfunktion errechneten vergleicht. Bild 12 zeigt deutlich, wieviel größer die Reibungsverluste des Kreisels 3 gegenüber denen der Kreisel 1 und 2 sind. Das wirkt sich in einer sehr kurzen Auslaufzeit aus. Das schnelle Absinken der Drehzahl macht Messungen nach dem Auslaufverfahren an diesem Kreisel sehr schwierig, da nur wenig Zeit zum Einstellen des Stroboskopes bleibt. Deshalb sind die Messungen mit dem Reibungsapparat durchgeführt worden.

Den Wert der Verlustfunktion F für die Betriebsdrehzahl kann man als „Verlustfaktor“  $F_b$  zur Kennzeichnung der am Kreisel auftretenden Reibungsverluste verwenden. Der Verlustfaktor gibt das Verhältnis des Reibungsmomentes zur Drehenergie für die Betriebsdrehzahl an; er ist somit auch ein Maß für die Neigung der Auslaufkurve zu Beginn des Abschaltens. Soll also ein Kreisel bei vorübergehendem Abschalten des Antriebs möglichst wenig in seiner Drehzahl abfallen, so muß der Verlustfaktor klein sein. Für die drei untersuchten Kreisel ergeben sich die Werte:

$$\begin{aligned} \text{Kreisel 1: } F_b &= 1,16 \cdot 10^{-6} \\ \text{Kreisel 2: } F_b &= 1,63 \cdot 10^{-6} \\ \text{Kreisel 3: } F_b &= 4,58 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$



**Bild 13.** Verlustfunktionen der Luftreibung für drei verschieden große Kreisel.  
**Bild 12 (links).** Verlauf der dimensionslosen Verlustfunktion  $F_G$  für drei verschieden große Kreisel.



**Bild 14.** Zur Berechnung der Luftreibung einer drehenden Scheibe.

Als nächstes seien die Verlustfunktionen für reine Luftreibung, also nach Abzug der Lagerreibung von der Gesamtreibung, betrachtet; Bild 13 zeigt diese. Wieder ist der kleine Kreisel 3 der schlechteste. Kreisel 1 und 2 sind fast gleichwertig, doch ist der Verlauf ihrer Verlustfunktionen  $F_{Luft}$  sehr ungleich. Das dürfte vor allem an der verschiedenen Form liegen. Der Kreisel 2 hatte ein fast kugelförmiges Trägheitsellipsoid, während die Kreisel 1 und 3 stark abgeplattet waren.

Wie sich die Luftreibung bei geometrisch ähnlichen Kreiseln von verschiedener Größe auswirkt, soll hier kurz betrachtet werden. Der Kreiselkörper soll als zylindrische Scheibe angenommen werden (Bild 14). Für ein Oberflächenelement des Kreisels  $\Delta A$  wollen wir in Anlehnung an die Widerstandsformel für Geschosse das Reibungsmoment in folgender Form schreiben:

$$\Delta R = \Delta A h \frac{\delta}{\delta_0} r v^\alpha \dots \dots \dots (12).$$

Dabei ist:

- $h$  ein Proportionalitätsfaktor, der von der Rauigkeit und den Grenzschichtgrößen abhängt,
- $\delta$  die Luftdichte,  $\delta_0$  die Luftdichte bei Normaldruck,
- $r$  der Abstand des Flächenelementes  $\Delta A$  vom Mittelpunkt der Kreiselscheibe,
- $v$  die Geschwindigkeit des Flächenelementes  $\Delta A$ ; es gilt  $v = r \omega$ ,
- $\alpha$  der Exponent des als Potenzgesetz angenommenen Luftwiderstandes.

Für den gesamten Luftwiderstand ergibt sich:

$$R_{Luft} = h \frac{\delta}{\delta_0} \omega^\alpha \int r^{1+\alpha} dA \dots \dots \dots (13).$$

Das Integral ist dabei über die gesamte Oberfläche zu erstrecken. Der vom Rand der Kreiselscheibe herrührende Anteil des Widerstandes läßt sich sofort errechnen. Bei einer Randbreite  $b$  ist die Randfläche  $2 \pi r b$ , der Anteil des Widerstandes also

$$\frac{h \omega^\alpha \delta}{\delta_0} 2 \pi r b r^{1+\alpha}.$$

Um die Anteile der Seiten zu bestimmen, nehmen wir als Oberflächenelement einen Ring von der Breite  $dr$ . Dann ist  $dA = 2 \pi r dr$ . Die Integration läßt sich dann leicht ausführen. Insgesamt bekommen wir für beide Scheibenseiten und den Rand aus Gl. 13:

$$R_{Luft} = \frac{2 \pi h \omega^\alpha \delta}{\delta_0} \left( b r^{2+\alpha} + \frac{2}{3+\alpha} r^{3+\alpha} \right) \dots \dots \dots (14).$$

Um die Verlustfunktion  $F$  zu erhalten, soll dieser Wert noch durch die Drehenergie

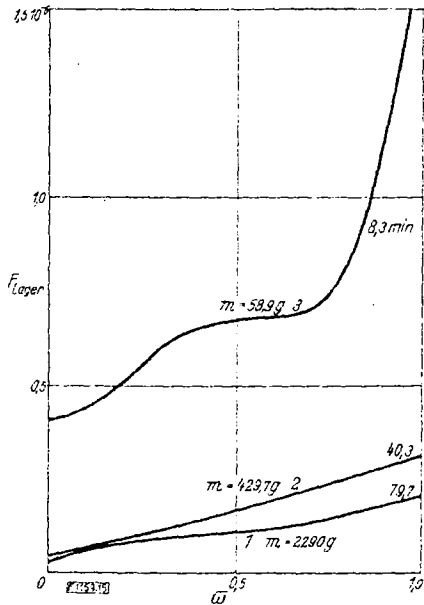
$$\Theta \omega_b^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega_b^2 = \frac{1}{2} \mu r^4 \pi b \omega_b^2$$

dividiert werden.  $\mu$  ist dabei die spezifische Masse des Kreisels. Bei geometrisch ähnlichen Kreiseln kann man mit einem Proportionalitätsfaktor  $c$  außerdem  $b = c r$  setzen. Damit bekommt man nun für die Verlustfunktion

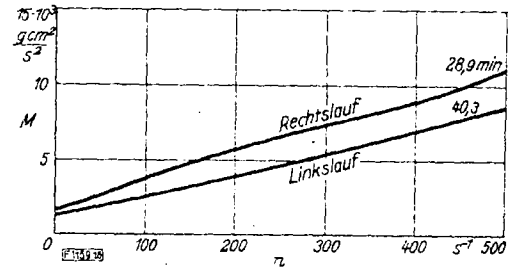
$$F_{Luft} = \frac{4 h \delta \omega^\alpha}{\delta_0 \mu \omega_b^2} \left( 1 + \frac{2}{(3+\alpha)c} \right) r^{\alpha-2} \dots \dots \dots (15).$$

Da nun der Exponent stets kleiner als 2 ist — für Kreisel 1 war  $\alpha = 1,65$  gemessen worden —, so ist ersichtlich, daß die Verlustfunktion für reine Luftreibung mit kleiner werdenden Kreiseln wächst. Der kleine Kreisel ist also in bezug auf die Luftreibung im Verhältnis  $\frac{1}{r^2 - \alpha}$  ungünstiger. Wäre die Luftreibung rein quadratisch mit der Geschwindigkeit, so würde die Größe der Kreisel keine Rolle spielen.

Bei den bisherigen Betrachtungen war die Betriebsdrehzahl  $\omega_b$  konstant angenommen worden. Die Verhältnisse ändern sich, wenn man statt dessen mit konstanter Umfangsgeschwindigkeit rechnet, denn kleinere Kreisel können mit gleicher Umfangsgeschwindigkeit, also entsprechend vergrößerter Drehzahl, laufen, ohne überbeansprucht zu werden. Unter Berücksichtigung der Beziehung  $\omega = v/r$



**Bild 15.** Verlustfunktionen der Lagerreibung für drei verschiedene große Kreisel.



**Bild 16.** Momentenkurven der Lagerreibung des Kreisels 2 bei verschiedenem Drehsinn.

bekommt man durch eine entsprechende Integration über die Oberfläche die Verlustfunktion:

$$F_{\text{Luft}} = \frac{4 h \delta v^\alpha (3 c + 2)}{3 \delta_0 \mu c v_b^2} \dots \dots (16).$$

Da in dieser Formel die Kreiselgröße  $r$  überhaupt nicht mehr vorkommt, so sieht man, daß bei konstant angenommener Umfangsgeschwindigkeit der kleine und der große Kreisel in bezug auf die Luftreibung gleichberechtigt sind.

Die Verlustfunktionen für reine Lagerreibung zeigt Bild 15. Wieder sind die beiden größeren Kreisel 1 und 2 dem kleineren

eindeutig überlegen. Das war vorauszusehen, denn es ist bisher nicht gelungen, die Kreiselager ähnlich zur Größe der Kreiselkörper zu verkleinern. So hatten z. B. die Kugellager der Kreisel 2 und 3 dieselbe Größe. Ähnlichkeitsbetrachtungen nach der Art der über die Luftreibung angestellten Überlegungen sind deshalb bei der Lagerreibung nicht angebracht. Es kommt noch hinzu, daß die Kenntnisse über die Art der Kugellagerreibung zu ungenügend sind, um irgendwelche allgemeinen Ansätze zu rechtfertigen.

Die Unterschiede der Momentenkurven bei rechts- und linkslaufenden Kreiseln lagen bei den Kreiseln 1 und 3 innerhalb der Fehlergrenze. Bei Kreisel 2 zeigten sich dagegen auffallende Unterschiede, die auf die Verschiedenheiten der Lagerreibung zurückzuführen waren. Bild 16 zeigt die Momentenkurven der Lagerreibung bei verschiedenem Drehsinn. Die Auslaufzeit des rechtslaufenden Kreisels ist um etwa 30% gegenüber der Auslaufzeit des linkslaufenden Kreisels verkürzt.

#### IV. Zusammenfassung

Zur Beurteilung der Reibungen eines Kreisels ist die Momentenkurve, d. h. die Kurve der Reibungsmomente in Abhängigkeit von der Drehzahl, besser geeignet als die Auslaufzeit. Zur Bestimmung dieser Momentenkurve wurden drei Verfahren beschrieben und in ihrer Genauigkeit und Anwendbarkeit erörtert.

Als Beispiele wurden die Ergebnisse von Versuchen an Kreiseln von verschiedener Größe, bei verschiedenem Luftdruck und bei verschiedenen Temperaturen mitgeteilt. Die Untersuchungen der Kreisel bei Atmosphärendruck und im Vakuum ermöglichen eine Trennung der Gesamtreibung in die Anteile der Luftreibung und der Lagerreibung. Dabei zeigte es sich, daß der Anteil der Luftreibung bei der normalen Betriebsdrehzahl etwa drei- bis fünfmal größer war als der Anteil der Lagerreibung. Theoretische Betrachtungen über den Luftwiderstand geometrisch ähnlicher Kreisel führen zu dem Ergebnis, daß bei gleicher Betriebsdrehzahl kleine Kreisel in bezug auf den Luftwiderstand ungünstiger sind als große Kreisel. Bei gleicher Umfangsgeschwindigkeit sind dagegen kleine und große Kreisel bezüglich des Luftwiderstandes gleichberechtigt.

Weiterhin wurden analytische Näherungen für die Momentenfunktionen angegeben und die darin auftretenden Reibungsbeiwerte in Abhängigkeit vom Luftdruck und der Temperatur dargestellt.