

Über die Anwendungen der allgemeinen Bewegungsgleichungen starrer Körper in bewegten Bezugssystemen*).

Von K. Magnus in Darmstadt.

Bei der Berechnung von Kreisel- und Pendelgeräten muß man häufig die allgemeinen Bewegungsgleichungen starrer Körper verwenden, bei denen die Bewegungen der zu betrachtenden Körper von einem selbst irgendwie bewegten Bezugssystem aus beurteilt werden. Unter Anwendung der Theorie starrer Körper besonders angepaßten Hilfsmittels der Motorrechnung werden die verschiedenen Formen dieser Gleichungen und die Zusammenhänge mit ihren entsprechenden Vektor- und Skalarfassungen behandelt. Nach einer Erweiterung der Gleichungen auf Systeme starrer Körper werden die Ergebnisse an den Beispielen eines physischen Pendels und eines kräftefreien Kreisels mit massebehafteter kardanischer Aufhängung veranschaulicht. Da jedoch die strengen Gleichungen nur in ganz wenigen, besonders einfachen Sonderfällen zu lösen sind, ist es wichtig, daneben Näherungsmethoden zur Verfügung zu haben, mit deren Hilfe auch in schwierigeren Fällen noch Aussagen getroffen werden können. Die Grundlagen dieser Näherungen sowie ihre Ableitung aus den strengen Gleichungen werden gezeigt.

1. Einführung.

Bei der Berechnung von Pendel- und Kreiselgeräten ist man häufig vor die Notwendigkeit gestellt, die allgemeinsten Bewegungsgleichungen für den starren Körper relativ zu einem geführten Bezugssystem anzuwenden, um das Verhalten der Geräte auf bewegtem Fahr- oder Flugzeug zu bestimmen. Die allgemeine analytische Form dieser Gleichungen ist seit langem bekannt und wird z. B. von Routh [1]¹⁾ sowie Herglotz [7] in impliziter Form gegeben, bei der die Impulse sowie ihre zeitlichen Ableitungen im Führungssystem auftreten. Sämtliche Koordinaten der vorkommenden Vektorsysteme (der Kraft, der absoluten und der relativen Geschwindigkeit) werden dabei im Führungssystem angeschrieben. Man kommt bei der Ableitung dieser Gleichungen mit zwei Systemen, dem Inertialsystem und einem Führungssystem aus, das sich gegenüber dem Inertialsystem in bekannter Weise bewegt. Die noch einfachen dynamischen Gleichungen verlieren jedoch an Übersichtlichkeit, wenn man die Ausdrücke für die Impulskomponenten als Funktionen der Geschwindigkeiten des Körpers einsetzt und so die expliziten Differentialgleichungen für die Komponenten der Geschwindigkeit ausrechnet. Diese Arbeit ist von Heun [2] geleistet worden, der die Vektorform der Gleichungen für den Fall angibt, daß die zeitlichen Änderungen der Körpergeschwindigkeit ebenfalls vom Führungssystem aus beurteilt werden. Der in den Gleichungen auftretende Trägheitstensor besitzt daher zeitlich veränderliche Glieder, so daß die dynamischen Gleichungen durch eine Differentialgleichung für den Trägheitstensor vervollständigt werden müssen.

Eine sehr durchsichtige und begrifflich klare Darstellung der allgemeinen Bewegungsgleichung hat R. v. Mises [3] gegeben, indem er das für die Theorie der starren Körper besonders geeignete Hilfsmittel der Motorrechnung anwandte. Die v. Mises'sche Darstellung wurde von Winkelmann und Grammel [4] übernommen und in bezug auf die explizite Ausrechnung weitergeführt. Die Beurteilung der Impulsänderungen wird dabei von einem körperfesten System vorgenommen, in dem der Trägheitsmotortensor zeitlich konstant ist. Die in Motorform hingeschriebenen Bewegungsgleichungen sind zwar unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems, sie erweisen aber ihren vollen Wert nur, wenn die Komponenten bei der Zerlegung sämtlich im körperfesten System genommen werden, da nur dann der Trägheitstensor zeitlich konstant ist. Es müssen also auch die Komponenten der Führungsgeschwindigkeit im körperfesten System genommen werden, was von vornherein nicht möglich ist, da die Bewegungen des Körpers ja erst bestimmt werden sollen. Man hat also zu den dynamischen Gleichungen noch die Transformationsgleichungen für die Komponenten der Führungsgeschwindigkeit hinzuzufügen.

Diese Schwierigkeiten umgeht Hölder [6] dadurch, daß er die dynamischen Gleichungen wieder im Führungssystem anschreibt. Er erzielt durch Verwendung Plücker'scher Koordinaten starke formale Vereinfachungen, jedoch sind seine Gleichungen für die Anwendung nicht so durchsichtig wie die Motorschreibweise.

*.) Diese Arbeit wurde von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen als Habilitationsschrift für das Fach der angewandten Mechanik angenommen.

¹⁾ Die in eckigen Klammern stehenden Zahlen verweisen auf das Schrifttumsverzeichnis am Schluß der Arbeit.

Im Anschluß an die von Winkelmann und Grammel gegebene Darstellung [4] sollen im folgenden insbesondere die Möglichkeiten der Zerlegung der allgemeinen Motorgleichung in Vektorkomponenten dargelegt werden, wobei sich Gelegenheit bieten wird, auf die verschiedenen Formen der allgemeinen Motorgleichung selbst hinzuweisen, die es ermöglichen, die Ausgangsgleichung dem jeweils vorliegenden Problem anzupassen.

Wenn auch v. Mises die Zerlegung der allgemeinen Motorgleichung in ihre Vektor- bzw. Skalarkomponenten als eine rein schematische Arbeit bezeichnet, so haben doch bereits Winkelmann und Grammel sowie auch Hölder darauf hingewiesen, daß die Zerlegung neben schematischer Rechenarbeit besondere Vorsicht und Gedankenarbeit erfordert. Durch eine Betrachtung der Zusammenhänge der in den verschiedenen Systemen genommenen zeitlichen Ableitungen der Geschwindigkeitsmotoren sowie ihrer Vektorkomponenten und Darstellung in Tabellenform soll die Zerlegung der Motorgleichungen nunmehr soweit vorbereitet werden, daß die Zerlegung tatsächlich nur noch schematische Rechenarbeit erfordert. Für eine von der Darstellung bei v. Mises und Winkelmann-Grammel nur wenig abweichende Form der Motorgleichung soll die Zerlegung in Vektorkomponenten ganz allgemein durchgeführt werden. In einigen praktischen Beispielen wird die Ausrechnung bis zur Angabe der Bewegungsgleichungen in Skalarkomponenten erfolgen, um so die Anwendbarkeit der allgemeinen Gleichungen in Spezialfällen zu zeigen.

In Erweiterung der bisher vorliegenden Ergebnisse soll die allgemeine Bewegungsgleichung auch bei Beurteilung der Impulsänderungen vom Führungssystem aus als Motorgleichung angeschrieben werden. Dann fällt zwar der Vorteil eines zeitlich konstanten Trägheitstensors fort, jedoch gewinnt man auf diese Weise eine Form, die als Ausgangsgleichung für die technisch wichtigen Näherungsrechnungen von Bedeutung ist. Die Notwendigkeit derartiger Näherungen, die auf eine Beschränkung der Betrachtungen auf „kleine Schwingungen“ hinauslaufen, ergibt sich aus der Forderung, auch bei komplizierteren Geräten noch Aussagen zu treffen, denn die strengen Gleichungen bieten im allgemeinen unüberwindliche Integrations-schwierigkeiten. Desgleichen erfordern die Belange des Praktikers eine Erweiterung der allgemeinen Gleichungen auf Systeme von starren Körpern, wie sie bei kardanisch gehängten Pendeln und Kreiseln sowie bei Mehrkreiselgeräten häufig vorliegen.

2. Die verschiedenen Formen der Bewegungsgleichungen in Motorschreibweise.

Nach dem Vorbilde von Winkelmann und Grammel bezeichnen wir im folgenden zeitliche Ableitungen im Inertialsystem durch einen darübergesetzten Punkt, im Führungssystem durch einen Ring und im körperfesten System durch einen Stern. Die bei den Betrachtungen benötigten Systeme bezeichnen wir entsprechend mit Σ' (Inertialsystem), Σ° (Führungssystem), Σ^* (körperfestes System). Den Motor der Relativgeschwindigkeit (Σ^* gegen Σ') bezeichnen wir mit \mathfrak{V} , den Motor der Führungsgeschwindigkeit (Σ° gegen Σ') mit \mathfrak{F} . Die Absolutgeschwindigkeit des Körpers (Σ^* gegen Σ') sei $\mathfrak{B} = \mathfrak{V} + \mathfrak{F}$. Das System der auf den Körper wirkenden äußeren Kräfte sei durch den Motor \mathfrak{P} repräsentiert. Mit dem Trägheitsmotortensor \mathbf{T} kann man nun das allgemeine mechanische Grundgesetz schreiben:

$$\overline{\mathbf{T}} \mathfrak{B} = \mathfrak{P} \quad (1).$$

Um die Tatsache auszunutzen, daß \mathbf{T} in Σ^* konstant ist, wird (1) vermöge der Transformationsformel²⁾

$$\mathfrak{A} = \overset{*}{\mathfrak{A}} + [\mathfrak{B} \mathfrak{A}]$$

in

$$\overline{\mathbf{T}} \mathfrak{B} + [\mathfrak{B} (\mathbf{T} \mathfrak{B})] = \mathfrak{P}$$

umgeformt. Daraus folgt wegen $\overset{*}{\mathbf{T}} = 0$:

$$\mathbf{T} \mathfrak{B} + [\mathfrak{B} (\mathbf{T} \mathfrak{B})] = \mathfrak{P}.$$

Mit $\mathfrak{B} = \mathfrak{V} + \mathfrak{F}$ bekommt man damit die Bewegungsgleichung in der Form:

$$\mathbf{T} \overset{*}{\mathfrak{V}} + [\mathfrak{V} (\mathbf{T} \overset{*}{\mathfrak{V}})] + \mathbf{T} \overset{*}{\mathfrak{F}} + [\mathfrak{F} (\mathbf{T} \overset{*}{\mathfrak{F}})] + [\mathfrak{V} (\mathbf{T} \overset{*}{\mathfrak{F}})] + [\mathfrak{F} (\mathbf{T} \overset{*}{\mathfrak{V}})] = \mathfrak{P} \quad (2).$$

Dabei bilden die ersten beiden Glieder den Anteil der Relativbewegung, die mittleren beiden Glieder den Anteil der Führungsbewegung, die letzten beiden Glieder der linken Seite geben den Coriolisanteil. Die Grundgleichung (2) läßt sich noch in andere Formen bringen, wenn man die zwischen den verschiedenen zeitlichen Ableitungen bestehenden Beziehungen berücksichtigt. Man bekommt für die Ableitungen von \mathfrak{V} unter Berücksichtigung von $[\mathfrak{V} \mathfrak{V}] = 0$:

²⁾ Siehe [3], S. 195.

$$\overset{*}{\mathfrak{V}} = \overset{\circ}{\mathfrak{V}} \dots \dots \dots (3a),$$

$$\overset{*}{\mathfrak{V}} = \overset{\circ}{\mathfrak{V}} - [\mathfrak{F} \mathfrak{V}] \dots \dots \dots (3b),$$

$$\overset{\circ}{\mathfrak{V}} = \overset{*}{\mathfrak{V}} - [\mathfrak{F} \mathfrak{V}] \dots \dots \dots (3c).$$

Entsprechend für die Ableitungen von \mathfrak{F} unter Berücksichtigung von $[\mathfrak{F} \mathfrak{F}] = 0$:

$$\overset{\circ}{\mathfrak{F}} = \overset{\circ}{\mathfrak{F}} \dots \dots \dots (4a),$$

$$\overset{\circ}{\mathfrak{F}} = \overset{*}{\mathfrak{F}} - [\mathfrak{F} \mathfrak{V}] \dots \dots \dots (4b),$$

$$\overset{\circ}{\mathfrak{F}} = \overset{*}{\mathfrak{F}} - [\mathfrak{F} \mathfrak{V}] \dots \dots \dots (4c).$$

Je nachdem, in welchem System die zeitlichen Änderungen der Relativ- und Führungsgeschwindigkeit beurteilt werden sollen (bzw. gemessen oder gerechnet sind), kann man die Beziehungen (3) bzw. (4) in (2) einsetzen und kann so zu insgesamt neun verschiedenen Formen der Grundgleichung kommen, von denen hier nur noch die beiden wichtigsten angegeben werden sollen. Will man die Änderung der Führungsgeschwindigkeit von Σ° aus beurteilen, so kommt man wegen (4c) zu der von v. Mises und Winkelmann-Grammel angegebenen Form:

$$T \overset{*}{\mathfrak{V}} + [\mathfrak{V} (T \mathfrak{V}')] + T \overset{\circ}{\mathfrak{F}} + [\mathfrak{F} (T \mathfrak{F})] + [\mathfrak{V}' (T \mathfrak{F})] + [\mathfrak{F} (T \mathfrak{V}')] + (T [\mathfrak{F} \mathfrak{V}']) = \mathfrak{P} \dots \dots (5),$$

bei der gegenüber (2) noch ein Glied im Coriolisanteil hinzutritt. Will man schließlich die Geschwindigkeitsänderungen in Σ' haben, so kommt man wegen (3b) und (4a) zu:

$$T \overset{\circ}{\mathfrak{V}} + [\mathfrak{V} (T \mathfrak{V}')] + T \overset{\circ}{\mathfrak{F}} + [\mathfrak{F} (T \mathfrak{F})] + [\mathfrak{V}' (T \mathfrak{F})] + [\mathfrak{F} (T \mathfrak{V}')] = \mathfrak{P} \dots \dots (6).$$

Diese Gleichung stimmt im Aufbau mit (2) überein, nur daß an Stelle der Sterne jetzt Punkte stehen.

Die ursprüngliche Transformation der linken Seite von (1) auf das System Σ^* brachte den Fortfall der Glieder mit den zeitlichen Ableitungen des Trägheitsmotortensors mit sich. Dadurch ließen sich die weiteren Formeln in besonders einfacher Weise ableiten. Es ist jedoch für manche später zu besprechenden Fälle zweckmäßig, auch eine in Σ° angeschriebene Motorgleichung zu haben, weil die bei der Zerlegung der Gln. (2), (5) und (6) notwendige Transformation der Komponenten von \mathfrak{F} nach Σ^* umständlich ist und die Anwendung der Gleichungen erschwert. Andererseits würde man durch das Anschreiben der Komponentengleichungen in Σ° oder Σ' den Vorteil eines konstanten Trägheitstensors verlieren. Wir gewinnen die gewünschte Motorgleichung durch Transformation von (1) nach Σ° vermöge der Transformationsgleichung:

$$\overset{\circ}{\mathfrak{X}} = \overset{\circ}{\mathfrak{X}} + [\mathfrak{F} \mathfrak{X}]$$

zu

$$\overset{\circ}{T \mathfrak{V}} + [\mathfrak{F} (T \mathfrak{V})] = \mathfrak{P}$$

oder:

$$\overset{\circ}{T \mathfrak{V}} + \overset{\circ}{T \mathfrak{F}} + [\mathfrak{F} (T \mathfrak{V}')] + [\mathfrak{F} (T \mathfrak{F})] = \mathfrak{P} \dots \dots (7).$$

Es sei beiläufig bemerkt, daß man aus dieser Form sofort wieder auf die allgemeine Motorgleichung (5) kommen kann, wenn man die Ableitungen der Impulsanteile wirklich ausführt:

$$\overset{\circ}{T \mathfrak{V}} = \overset{\circ}{T} \mathfrak{V}' + T \overset{\circ}{\mathfrak{V}},$$

$$\overset{\circ}{T \mathfrak{F}} = \overset{\circ}{T} \mathfrak{F} + T \overset{\circ}{\mathfrak{F}}.$$

Unter Berücksichtigung der für die Ableitungen von Motortensoren geltenden Rechenregel:

$$\overset{\circ}{T} = [\mathfrak{V}' T] - [T \mathfrak{V}'] \text{)}$$

sowie unter Berücksichtigung der Regeln für dyadische Produkte zwischen Motor und Motortensor^{*)}:

$$\overset{\circ}{T} \mathfrak{V}' = ([\mathfrak{V}' T] \mathfrak{V}') - ([T \mathfrak{V}'] \mathfrak{V}') = [\mathfrak{V}' (T \mathfrak{V}')],$$

$$\overset{\circ}{T} \mathfrak{F} = ([\mathfrak{V}' T] \mathfrak{F}) - ([T \mathfrak{V}'] \mathfrak{F}) = [\mathfrak{V}' (T \mathfrak{F})] + (T [\mathfrak{F} \mathfrak{V}'])$$

^{*)} Siehe [3], S. 175 ff.

^{*)} Siehe z. B. [3], S. 196.

bekommt man aus (7) die Motorgleichung:

$$\mathbf{T} \dot{\mathbf{W}} + [\mathbf{W}(\mathbf{T}\mathbf{W})] + \mathbf{T} \dot{\mathbf{Z}} + [\mathbf{Z}(\mathbf{T}\mathbf{Z})] + [\mathbf{W}(\mathbf{T}\mathbf{Z})] + [\mathbf{Z}(\mathbf{T}\mathbf{W})] + (\mathbf{T}[\mathbf{Z}\mathbf{W}]) = \mathbf{P} \quad (8),$$

die wegen (3a) mit (5) identisch ist.

Wir wollen Gl. (7) mit Rücksicht auf spätere Anwendungen noch durch Einführung der Impulsanteile der Relativbewegung $\mathbf{Z} = \mathbf{T}\mathbf{W}'$ und der Führungsbewegung $\mathbf{Z}_f = \mathbf{T}\mathbf{Z}$ auf die einfache Form bringen:

$$\dot{\mathbf{Z}} + [\mathbf{Z}\mathbf{Z}] + \dot{\mathbf{Z}}_f + [\mathbf{Z}\mathbf{Z}_f] = \mathbf{P} \quad (9).$$

Die Komponentenzerlegung dieser Gleichung führt wieder auf die anfangs bereits erwähnten impliziten Formen der allgemeinen Bewegungsgleichungen, wie sie in einigen Lehrbüchern zu finden sind. Nur ist dort meist an Stelle der Impulsanteile \mathbf{Z} und \mathbf{Z}_f mit dem Absolutimpuls $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_f$ und dem Relativimpuls \mathbf{Z} gerechnet.

Damit ist das im folgenden gebrauchte Formelmateriale abgeleitet, so daß wir diese Überlegungen abschließen können, um uns weiterhin der für die Anwendungen wichtigen Zerlegung der Motorgleichungen in Komponenten zuzuwenden.

3. Die Zerlegung in Vektorkomponenten.

Der Motor \mathbf{W}' der Relativbewegung habe die Resultantkomponente u' (Drehung von Σ^* gegen Σ°) und bezüglich des Anfangspunktes O' von Σ^* die Momentenkomponente $v' \cdot v'$ ist also die Relativgeschwindigkeit von O' in Σ° . Der Motor der Führungsgeschwindigkeit \mathbf{Z} habe die Resultantkomponente u (Drehung von Σ° gegen Σ') sowie die Momentenkomponente v ebenfalls bezüglich O' v ist demnach die Absolutgeschwindigkeit desjenigen in Σ° festen Punktes, der augenblicklich mit O' zusammenfällt. Des weiteren benötigen wir für die Zerlegung die Matrixdarstellung des Trägheitsmotortensors. Nach v. Mises⁵⁾ hat man:

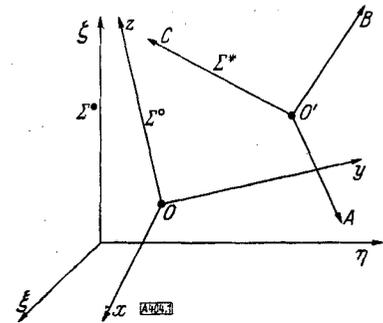


Bild 1.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mc & -mb \\ 0 & m & 0 & -mc & 0 & ma \\ 0 & 0 & m & mb & -ma & 0 \\ 0 & -mc & mb & \Theta_A & -\Phi_C & -\Phi_B \\ mc & 0 & -ma & -\Phi_C & \Theta_B & -\Phi_A \\ -mb & ma & 0 & -\Phi_B & -\Phi_A & \Theta_C \end{pmatrix} \dots \dots \dots (10).$$

Darin ist m die Gesamtmasse des Körpers, a, b, c sind die Komponenten des Vektors r_0 vom Ursprung O' zum Körperschwerpunkt, Θ sind die Trägheitsmomente, Φ die Deviationsmomente des Körpers bezüglich der Achsen A, B, C von Σ^* . Das rechte untere Viertel der Matrix (10) ist das Schema des Vektorträgheitstensors

$$T = \begin{pmatrix} \Theta_A & -\Phi_C & -\Phi_B \\ -\Phi_C & \Theta_B & -\Phi_A \\ -\Phi_B & -\Phi_A & \Theta_C \end{pmatrix}$$

den wir im folgenden häufig brauchen werden.

Der eigentlichen Zerlegung soll nun eine allgemeine Betrachtung vorausgeschickt werden, die die Zusammenhänge der Vektorkomponenten der verschiedenen zeitlichen Ableitungen betrifft. Aus jeder Motorgleichung lassen sich zwei entsprechende Vektorgleichungen folgern. Aus der Gleichheit zweier Motoren folgt die Gleichheit ihrer Resultant- sowie ihrer Momentenkomponenten, wobei sich die Momentenkomponente v_0 bezüglich eines Punktes O aus den „physikalischen Bausteinen“ des Motors, seiner „Öffnung“ u sowie seiner „Länge“ v_n nach

$$v_0 = v_n + [r_0 u] \quad (11)$$

zusammensetzt. Dabei ist r_0 ein von O nach einem beliebigen Punkte der Motorachse gezogener Vektor. Bei der Betrachtung der Vektorkomponenten von in verschiedenen Systemen abgeleiteten Motoren ist jedoch besondere Vorsicht geboten, da Motoren bei zeitlicher Veränderlichkeit im allgemeinen nicht in ihren Momenten übereinstimmen. Z. B. folgt aus der Gleichung $\dot{\mathbf{Z}} = \dot{\mathbf{Z}}$ (siehe (4a)) zunächst nur die Gleichheit der entsprechenden Ableitungen für Länge und Öffnung:

⁵⁾ Siehe [3], S. 170.

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \dot{u}, \\ \dot{v}_n &= \dot{v}_n \end{aligned}$$

nicht aber die Gleichheit der Momente. Vielmehr stellt man durch Differenzieren und Subtrahieren von (11) leicht fest, daß

$$\dot{v}_0 - \dot{v}_0 = [(\dot{r}_0 - \dot{r}_0) u] \dots \dots \dots (12)$$

im allgemeinen von Null verschieden ist. Wir wollen in (12) noch r_0 eliminieren und beachten zu diesem Zweck die Transformationsgleichung:

$$\dot{r}_0 = \dot{r}_0 + [u r_0],$$

die wegen (11) auch

$$\dot{r}_0 - \dot{r}_0 = [u r_0] = v_n - v_0$$

geschrieben werden kann. Setzt man das in (12) ein und berücksichtigt, daß die Vektoren v_n und u stets gleichgerichtet sind, also $[v_n u] = 0$ ist, so hat man:

$$\dot{v}_0 = \dot{v}_0 + [u v_0].$$

Aus der Motorgleichung $\dot{\mathfrak{F}} = \dot{\mathfrak{F}}$ folgen also die beiden Vektorgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= \dot{u} \\ \dot{v}_0 &= \dot{v}_0 + [u v_0] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13).$$

In gleicher Weise wollen wir die den Motorgleichungen (3a) bis (4c) entsprechenden Vektorgleichungen ermitteln. Die Resultantkomponenten folgen dabei einfach durch schematisches Anwenden der Rechenregeln für Motorprodukte⁶⁾. Die Momentkomponenten dagegen erfordern Aufmerksamkeit.

Aus (4b) folgt zunächst:

$$\dot{v}_n = \dot{v}_n + [u' v_n] + [v_0' u] \dots \dots \dots (14),$$

denn die schematische Zerlegung darf hier nur auf die „Länge“ angewendet werden. Andererseits kommt durch Differentiation von (11) in Σ' und Σ^* :

$$\begin{aligned} \dot{v}_0 &= \dot{v}_0 + [\dot{r}_0 u] + [r_0 \dot{u}], \\ \dot{v}_0^* &= \dot{v}_0^* + [\dot{r}_0^* u] + [r_0^* \dot{u}]. \end{aligned}$$

Durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen folgt unter Berücksichtigung von (14):

$$\dot{v}_0 - \dot{v}_0^* = [u' v_n] + [v_0' u] + [(\dot{r}_0 - \dot{r}_0^*) u] + [r_0 (\dot{u} - \dot{u}^*)].$$

Darin ist nun:

$$\begin{aligned} \dot{u} - \dot{u}^* &= [u' u] && \text{(Gleichung der Resultantkomponenten von (4b)),} \\ \dot{r}_0 - \dot{r}_0^* &= [(u + u') r_0] && \text{(Beziehung zwischen den zeitlichen Ableitungen eines Vektors in Systemen, die sich mit } u + u' \text{ gegeneinander drehen),} \\ v_n &= v_0 + [u r_0] && \text{(folgt aus (11)).} \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Beziehung folgt schließlich

$$\dot{v}_0 = \dot{v}_0^* + [u' v_0] + [v_0' u] + [u v_0],$$

wobei von der Beziehung

$$[u' [u r_0]] + [u [r_0 u']] + [r_0 [u' u]] = 0 \dots \dots \dots (15),$$

Gebrauch gemacht wurde und wie früher $[u r_0] = v_n - v_0$ gesetzt wurde. Wegen $v_n \parallel u$ fällt dann das Glied $[v_n u]$ heraus.

In ganz entsprechender Weise folgt aus (4c) zunächst:

$$\dot{v}_n = \dot{v}_n^* + [u' v_n] + [v_0' u].$$

Dies hat man wieder in eine Gleichung einzusetzen, die sich durch Differentiation von (11) in Σ^0 und Σ^* und nachfolgende Subtraktion ergibt. Unter Berücksichtigung der Gleichung der Resultantkomponenten von (4c), der allgemeinen Beziehung der zeitlichen Ableitungen des Vektors r_0 in Σ^0 und Σ^* , sowie der bereits verwendeten vektoralgebraischen Identität (15) bekommt man schließlich:

$$\dot{v}_0 = \dot{v}_0^* + [u' v_0] + [v_0' u].$$

⁶⁾ Siehe [3], S. 163.

In ganz entsprechender Weise bekommt man die Momentengleichungen von (3a) bis (3c). Die zunächst nur auf die „Länge“ angewendeten Motorgleichungen hat man in die aus

$$v'_0 = v'_n + [r'_0 u']$$

durch Differentiation in verschiedenen Systemen folgenden Beziehungen einzusetzen und unter Berücksichtigung der Gleichungen zwischen den zeitlichen Ableitungen von r'_0 sowie der Gleichung der Resultantkomponenten weiter auszurechnen. Wegen der Beziehung (15) und $u' || v'_n$ vereinfachen sich die Endformeln wieder erheblich. Wir stellen die Ergebnisse zusammen:

Aus den Motorgleichungen (3a) bis (4c) folgen die Vektorgleichungen:

1. Die Gleichungen der Resultantkomponenten:

$$\overset{*}{u}' = \overset{*}{u}' \dots \dots \dots (16a),$$

$$\overset{*}{u}' = \overset{*}{u}' - [u u'] \dots \dots \dots (16b),$$

$$\overset{*}{u}' = \overset{*}{u}' - [u u'] \dots \dots \dots (16c),$$

$$\dot{u} = \dot{u} \dots \dots \dots (16d),$$

$$\dot{u} = \overset{*}{u}' - [u u'] \dots \dots \dots (16e),$$

$$\dot{u} = \overset{*}{u}' - [u u'] \dots \dots \dots (16f).$$

2. Die Gleichungen der Momentkomponenten:

$$\overset{*}{v}' = \overset{*}{v}' - [u' v'] \dots \dots \dots (17a),$$

$$\overset{*}{v}' = \overset{*}{v}' - [u' v'] + [u' v] + [v' u] \dots \dots \dots (17b),$$

$$\overset{*}{v}' = \overset{*}{v}' + [u' v] + [v' u] \dots \dots \dots (17c),$$

$$\dot{v} = \dot{v} + [u v] \dots \dots \dots (17d),$$

$$\dot{v} = \overset{*}{v}' + [u v] + [u' v] + [v' u] \dots \dots \dots (17e),$$

$$\dot{v} = \overset{*}{v}' + [u' v] + [v' u] \dots \dots \dots (17f).$$

Es gilt nun zu entscheiden, welche Momentkomponenten bei der Zerlegung der Gleichungen von Abschnitt 2 für die verschiedenen zeitlichen Ableitungen der Motoren \mathfrak{B}' und \mathfrak{F} einzusetzen sind. Dazu beachten wir, daß die Motorgleichungen selbst in allen drei betrachteten Systemen Σ' , Σ° und Σ^* gelten, da sie ja eine von jeder speziellen Wahl des Koordinatensystems unabhängige Formulierung darstellen. Auch die aus ihnen abzuleitenden Vektorgleichungen sind noch unabhängig von der Wahl der Achsenrichtungen, nicht aber von der Wahl des Koordinatenanfangspunktes, da die Momentkomponenten ortsabhängig sind. Auch die Vektorgleichungen gelten — nach Verfügung über den Koordinatenanfangspunkt — noch in jedem beliebigen System. Jedoch bedingt die Verschiedenheit der zeitlichen Ableitungen des Vektors r_0 (bzw. r'_0) bei der Zerlegung der Motorgleichungen verschiedene Momentkomponenten desselben Motors, je nachdem, in welchem System die Zerlegung vorgenommen wird. Zum Beispiel hat $\overset{*}{\mathfrak{F}}$ in Σ^* die Momentkomponente $\overset{*}{v}$, entsprechend hat $\overset{*}{\mathfrak{F}}$ in Σ° die Momentkomponente \dot{v} , und $\overset{*}{\mathfrak{F}}$ in Σ' die Momentkomponente $\overset{*}{v}$. Wird dagegen die Zerlegung eines abgeleiteten Motors in einem anderen System vorgenommen als die Ableitung, so folgen die Momentkomponenten zwangsläufig aus den zuvor abgeleiteten Beziehungen (17a) bis (17f). In Tafel 1 sind diese Verhältnisse für die drei möglichen Zerlegungen nach Σ^* , Σ° und Σ' dargestellt. Neben den Momentkomponenten selbst sind noch die aus (17a bis f) folgenden Zusammenhänge mit den im Zerlegungssystem genommenen Ableitungen desselben Momentenvektors dargestellt. Mit Hilfe der Tafel 1 kann nun die Zerlegung einer beliebigen Motorgleichung — nachdem man sich für ein Koordinatensystem entschieden hat — auf tatsächlich nur noch rein schematischem Wege durch Anwendung der Rechenregeln der Motorrechnung erfolgen. Gleichzeitig dienen die in Tafel 1 mit angegebenen Zusammenhänge der verschiedenen zeitlichen Ableitungen dazu, den Wechsel in der Beurteilung der Veränderlichkeit der Vektoren noch nachträglich in der Vektorgleichung vorzunehmen.

Wir wollen nun dazu übergehen, die zuerst abgeleitete Motorgleichung (2) in ihre Vektorkomponenten zu zerlegen. Um mit konstantem Trägheitsmotortensor (und damit auch mit konstantem Trägheitsvektortensor) rechnen zu können, entscheiden wir uns für eine Zerlegung in Σ^* und haben folglich die Vektorkomponenten aus den ersten beiden Spalten von Tafel 1 zu verwenden.

Durch Anwendung der Rechenregeln für das Produkt eines Motortensors mit einem Motor⁷⁾ findet man, daß der Motor des Relativimpulses $T \mathfrak{B}'$ die beiden Vektorkomponenten

⁷⁾ Siehe [3], S. 171.

Tafel 1. Schema der Vektorkomponenten.

Motor	Im körperfesten Σ^* -System		Im bewegten Σ^0 -System		Im raumfesten Σ' -System	
	Resultantvektor	Momentvektor	Resultantvektor	Momentvektor	Resultantvektor	Momentvektor
\mathfrak{M}'	u'	v'	u'	v'	u'	v'
\mathfrak{M}''	u''	\mathfrak{v}''	u'' (= \hat{u}'')	$\mathfrak{v}'' - [v' u']$ (= \hat{v}'')	u''	$\mathfrak{v}'' - [v' u']$ (= $\hat{v}'' + [u' v] + [v' u]$)
\mathfrak{M}'''	u''' (= \hat{u}''')	$\mathfrak{v}'' + [v' u']$ (= \hat{v}'')	u'''	\mathfrak{v}''	u''' (= $\hat{u}''' - [u u']$)	\mathfrak{v}'' (= $\hat{v}'' + [u' v] + [v' u]$)
\mathfrak{M}''''	u'''' (= $\hat{u}'''' + [u u']$)	$\mathfrak{v}'' + [v' u']$ (= $\hat{v}'' + [v u'] + [u v']$)	u'''' (= $\hat{u}'''' + [u u']$)	\mathfrak{v}'' (= $\hat{v}'' + [v u'] + [u v']$)	u''''	\mathfrak{v}''
\mathfrak{M}	u	v	u	v	u	v
\mathfrak{M}'	u'	\mathfrak{v}'	u' (= $\hat{u}' + [u u']$)	\mathfrak{v}' (= $\hat{v}' + [v u'] + [u v']$)	u' (= $\hat{u}' + [u u']$)	$\mathfrak{v}' - [v u]$ (= $\hat{v}' + [v u'] + [u v']$)
\mathfrak{M}''	u'' (= $\hat{u}'' - [u u']$)	$\mathfrak{v}' + [v u]$ (= $\hat{v}' + [u' v] + [v' u]$)	u''	\mathfrak{v}'	u'' (= \hat{u}'')	$\mathfrak{v}' - [v u]$ (= \hat{v}')
\mathfrak{M}'''	u''' (= $\hat{u}''' - [u u']$)	$\mathfrak{v}' + [v u]$ (= $\hat{v}' + [u' v] + [v' u]$)	u''' (= \hat{u}''')	$\mathfrak{v}' + [v u]$ (= \hat{v}')	u'''	\mathfrak{v}'

$$T\mathfrak{B}' = \{m(\mathfrak{v}' + [u' r_s]); m[r_s \mathfrak{v}'] + Tu'\}$$

hat. Entsprechend hat man:

$$T\mathfrak{F} = \{m(\mathfrak{v} + [u r_s]); m[r_s \mathfrak{v}] + Tu\},$$

$$T\mathfrak{B}^* = \{m(\mathfrak{v}^* + [u^* r_s]); m[r_s \mathfrak{v}^*] + Tu^*\},$$

$$T\mathfrak{F}^* = \{m(\mathfrak{v}^* + [u^* r_s]); m[r_s \mathfrak{v}^*] + Tu^*\}.$$

Für die motorischen Produkte bekommt man unter Berücksichtigung der Beziehung:

$$[u' [r_s \mathfrak{v}']] + [r_s [\mathfrak{v}' u']] + [\mathfrak{v}' [u' r_s]] = 0$$

die Vektorkomponenten:

$$[\mathfrak{B}'(T\mathfrak{B}')] = \{m([u' \mathfrak{v}'] + [u' [u' r_s]]); m[r_s [u' \mathfrak{v}']] + [u'(Tu')]\},$$

$$[\mathfrak{F}(T\mathfrak{F})] = \{m([u \mathfrak{v}] + [u [u r_s]]); m[r_s [u \mathfrak{v}]] + [u(Tu)]\},$$

$$[\mathfrak{B}^*(T\mathfrak{B}^*)] = \{m([u^* \mathfrak{v}^*] + [u^* [u^* r_s]]); m([r_s \mathfrak{v}^*] + [\mathfrak{v}^* u^*] + [\mathfrak{v}^* [u^* r_s]]) + [u^*(Tu^*)]\},$$

$$[\mathfrak{B}'(T\mathfrak{F})] = \{m([u' \mathfrak{v}] + [u' [u r_s]]); m([r_s [\mathfrak{v}' u']] + [\mathfrak{v}' u] + [\mathfrak{v}' [u r_s]]) + [u'(Tu)]\}.$$

Die Vektorkomponenten des Kraftmotors seien

$$\mathfrak{P} = \{\mathfrak{P}; \mathfrak{M}\}.$$

Nun bekommt man durch Zusammenfassung der ersten und der zweiten Vektorkomponenten jedes der in (2) vorkommenden Glieder die allgemeinen Vektorgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} & m\{\mathfrak{v}^* + [u^* r_s] + [u' \mathfrak{v}'] + [u' [u' r_s]]\} + m\{\mathfrak{v} + [u r_s] + [u \mathfrak{v}] + [u [u r_s]]\} \\ & + m\{[u' \mathfrak{v}] + [u \mathfrak{v}'] + [u' [u r_s]] + [u [u' r_s]]\} = \mathfrak{P} \end{aligned} \right\} \dots (18a),$$

$$\left. \begin{aligned} & \{m([r_s \mathfrak{v}^*] + [r_s [u' \mathfrak{v}']]) + Tu^* + [u'(Tu')]\} \\ & + \{m([r_s \mathfrak{v}] + [r_s [u \mathfrak{v}]]) + Tu + [u(Tu)]\} \\ & + \{m([r_s [u' \mathfrak{v}]] + [r_s [u \mathfrak{v}']]) + [u'(Tu)] + [u(Tu')]\} = \mathfrak{M} \end{aligned} \right\} \dots (18b).$$

Durch die Zusammenfassung in geschweiften Klammern sind die Anteile der Relativ- und der Führungsbewegung sowie der Coriolisanteil hervorgehoben. Ein Vergleich der beiden Vektorgleichungen (18) mit der ursprünglichen Motorgleichung (2) läßt die großen Vorteile der Motorschreibweise besonders deutlich werden, denn die Verwendung der Motoren erspart nicht nur viel Schreibarbeit, sondern gestattet vor allem die allgemeinen Gleichungen in einer kaum noch zu übertreffenden Kürze abzuleiten. Man vergleiche damit die direkte Ableitung der Vektorgleichungen z. B. bei Heun [2].

Wir ersparen uns die Zerlegung auch der anderen Motorgleichungen des Abschnittes 2, zumal diese mit Hilfe der Tabelle und nach den Regeln der Motorrechnung leicht durchgeführt werden kann. Jedoch wollen wir an Hand des Beispiels von Gl. (18) eine Umformung vornehmen, indem wir die Änderung der Führungsgeschwindigkeit nunmehr von Σ^0 aus beurteilen wollen. Dann folgt aus der Tabelle:

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= \dot{u} + [u u'], \\ \ddot{v} &= \dot{v} + [u \mathfrak{v}'] + [\mathfrak{v} u']. \end{aligned}$$

Geht man damit in (18) ein, so fallen verschiedene Glieder heraus, ferner läßt sich

$$[u' [u r_s]] + [u [u' r_s]] + [[u u'] r_s] = -2[u [r_s u']]$$

zusammenfassen, so daß die Vektorgleichungen entstehen:

$$\left. \begin{aligned} & m\{\mathfrak{v}^* + [u^* r_s] + [u' \mathfrak{v}'] + [u' [u' r_s]]\} + m\{\mathfrak{v} + [u r_s] + [u \mathfrak{v}] + [u [u r_s]]\} \\ & + 2m\{[u \mathfrak{v}'] + [u [u' r_s]]\} = \mathfrak{P} \end{aligned} \right\} \dots (19a),$$

$$\left. \begin{aligned} & \{m([r_s \mathfrak{v}^*] + [r_s [u' \mathfrak{v}']]) + Tu^* + [u'(Tu')]\} \\ & + \{m([r_s \mathfrak{v}] + [r_s [u \mathfrak{v}]]) + Tu + [u(Tu)]\} \\ & + \{2m[r_s [u \mathfrak{v}']] + [u'(Tu)] + [u(Tu')] + [u(Tu')]\} = \mathfrak{M} \end{aligned} \right\} \dots (19b).$$

Diese Gleichungen sind mit den von Winkelmann und Grammel^{*)} angegebenen vollkommen identisch, wenn man die dort vorgenommene Umformung des Trägheitstensors im Coriolisglied beachtet.

^{*)} Siehe [4], S. 448.

Selbstverständlich kann man (18) und (19) noch weiterhin umformen, wenn man die Beurteilung der Geschwindigkeitsänderungen von anderen Systemen aus vornehmen will, wir wollen jedoch darauf hier nicht weiter eingehen. Ebenso wollen wir uns nicht mit der allgemeinen Zerlegung der Vektorgleichungen in ihre entsprechenden Skalargleichungen aufhalten, da diese Umrechnung in einfacher Weise nach den Regeln der Vektorrechnung erfolgt. Wir werden ohnehin bei den später zu besprechenden Beispielen derartige Zerlegungen in Spezialfällen durchzuführen haben.

Im Hinblick auf die vielseitigen Anwendungen soll jedoch an dieser Stelle noch die implizite Form der Motorgleichung (9) in ihre Vektorkomponenten zerlegt werden. Die beiden Vektorkomponenten des Impulsmotors \mathfrak{F} seien \mathfrak{G} und \mathfrak{J} . Der Resultantvektor \mathfrak{G} ist der Impuls der Fortschrittgeschwindigkeit, der Momentvektor \mathfrak{J} ist der Drehimpuls. In den vorher benutzten Größen ausgedrückt hat man:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} &= m(\mathbf{v}' + [u' \mathbf{r}_s]), \\ \mathfrak{J} &= m[\mathbf{r}_s \mathbf{v}'] + T u'. \end{aligned}$$

Ganz entsprechend seien die Vektorkomponenten des Führungsimpulsmotors \mathfrak{F}_f : \mathfrak{G}_f und \mathfrak{J}_f . Für sie gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_f &= m(\mathbf{v} + [u \mathbf{r}_s]), \\ \mathfrak{J}_f &= m[\mathbf{r}_s \mathbf{v}] + T u. \end{aligned}$$

Die Zerlegung von (9) ergibt nun die beiden Vektorgleichungen:

$$\mathfrak{G} + [u \mathfrak{G}] + \mathfrak{G}_f + [u \mathfrak{G}_f] = \mathfrak{P} \dots \dots \dots (20a),$$

$$\mathfrak{J} + [u \mathfrak{J}] + [\mathbf{v} \mathfrak{G}] + \mathfrak{J}_f + [u \mathfrak{J}_f] + [\mathbf{v} \mathfrak{G}_f] = \mathfrak{M} \dots \dots \dots (20b).$$

4. Grenzfälle.

Um uns mit den bisher abgeleiteten Formeln vertrauter zu machen, wollen wir im folgenden einige bekannte Fälle herauschälen, die sich aus den allgemeinen Gleichungen ergeben.

Zunächst sei der Grenzübergang zum Fall des Massenpunktes betrachtet. Wir wählen den Massenpunkt zum Ursprung des Σ^* -Systems und können folglich $\mathbf{r}_s = 0$ setzen. Die Achsenrichtungen von Σ^* können denen von Σ° parallel gelegt werden, dann ist $u' = 0$. Zur Berechnung genügt in diesem Falle die Gleichung der Resultantkomponenten z. B. in der Form (19a). Es bleibt wegen $\mathbf{r}_s = u' = 0$:

$$m \{ \ddot{\mathbf{v}}' + \dot{\mathbf{v}} + [u \mathbf{v}] + 2[u \mathbf{v}'] \} = \mathfrak{P}.$$

Dabei ist \mathbf{v} die Geschwindigkeit desjenigen in Σ° festen Punktes, der augenblicklich mit dem Massenpunkt zusammenfällt. Will man stattdessen lieber mit der Geschwindigkeit \mathbf{v}_0 des Ursprunges 0 von Σ° rechnen, so hat man zu setzen:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [u \mathbf{r}].$$

Darin ist \mathbf{r} der Vektor von 0 nach m (Bild 2). Durch Differentiation in Σ° folgt daraus:

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}_0 + [u \dot{\mathbf{r}}],$$

denn $\dot{t} = 0$, da \mathbf{r} in Σ° fest ist. Durch Einsetzen folgt nun:

$$m \{ \ddot{\mathbf{v}}' + \dot{\mathbf{v}}_0 + [u \mathbf{v}_0] + [u \dot{\mathbf{r}}] + [u [u \mathbf{r}]] + 2[u \mathbf{v}'] \} = \mathfrak{P} \dots \dots \dots (21).$$

Darin kann auch an Stelle von $\ddot{\mathbf{v}}'$ nun $\ddot{\mathbf{v}}'$ geschrieben werden, da wegen $u' = 0$ $\ddot{\mathbf{v}}' = \ddot{\mathbf{v}}'$ ist. Dann werden also sämtliche Ableitungen in Σ° genommen, so daß man diese Vektorgleichung bei Zerlegung in Skalarkomponenten am vorteilhaftesten nach Σ° zerlegt. (21) ist die bekannte allgemeinste Form der Bewegungsgleichung für die Relativbewegung eines Massenpunktes, wie sie z. B. bei Grammel⁹⁾ zu finden ist.

Durch Grenzübergang zu einem in Σ° festen Körper ($\mathfrak{B}' = 0$) kommt man aus (2) zu der Motorgleichung:

$$T \overset{\circ}{\mathfrak{F}} + [\mathfrak{F}(T \mathfrak{F})] = \mathfrak{P},$$

deren Vektorzerlegung

$$m \{ \ddot{\mathbf{v}} + [u \mathbf{r}_s] + [u \mathbf{v}] + [u [u \mathbf{r}_s]] \} = \mathfrak{P} \dots \dots \dots (22a),$$

$$m \{ [\mathbf{r}_s \dot{\mathbf{v}}] + [\mathbf{r}_s [u \mathbf{v}]] \} + T \dot{u} + [u (T u)] = \mathfrak{M} \dots \dots \dots (22b)$$

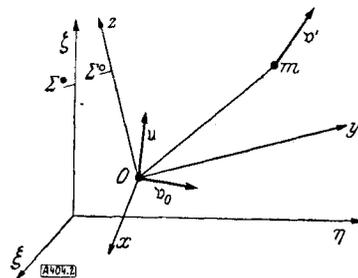


Bild 2.

⁹⁾ Grammel: Kinetik der Massenpunkte. Handb. d. Physik. Bd. V, Berlin 1927 Kap. 7, S. 330.

ergibt. Das sind die ebenfalls bekannten Gleichungen für die allgemeine Bewegung eines Körpers in einem Inertialsystem, wie sie z. B. bei Winkelmann und Grammel¹⁰⁾ zu finden sind. Dieselben Gleichungen bekommt man natürlich auch durch den Grenzübergang zu einem in Σ' festen Bezugssystem Σ° ($\mathfrak{F} = 0$), nur daß dann gestrichene Größen an Stelle der ungestrichenen in (21) treten.

Aus (22) lassen sich weiterhin die bekannten Eulerschen Gleichungen für die Bewegung des starren Körpers ableiten, wenn man entweder den Körper in einem Punkte festhält und diesen Punkt zum Koordinatenursprung wählt ($\mathfrak{v} = 0$) oder wenn man den Ursprung in den Schwerpunkt legt ($\mathfrak{r}_s = 0$). In beiden Fällen bleibt von (22b) die Vektorform der Euler-Gleichungen:

$$T \dot{\mathfrak{u}} + [\mathfrak{u}(T \mathfrak{u})] = \mathfrak{M}.$$

5. Anwendung auf das physische Pendel von einem Freiheitsgrad.

Als einfaches Anwendungsbeispiel sollen nun die strengen Bewegungsgleichungen für ein Pendel aufgestellt werden, das um eine in Σ° feste Achse drehbar gelagert ist. Wir

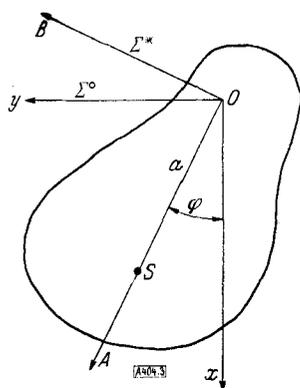


Bild 3.

wählen den Aufhängepunkt 0 des Pendels zum Ursprung der Systeme Σ^* und Σ° und legen die z -Achse von Σ° sowie die C -Achse von Σ^* so, daß sie in die Richtung der Pendelachse fallen. Die A -Achse von Σ^* legen wir senkrecht zur C -Achse in die durch die Pendeldrehachse und den Pendelschwerpunkt bestimmte Ebene. Die B -Achse wird schließlich senkrecht zu den Achsen A und C gewählt.

Als Ausgangsgleichungen der weiteren Rechnung nehmen wir die Vektorgleichungen (19), brauchen uns jedoch um die Gl. (19a) nicht zu kümmern, da sie nur die hier nicht weiter interessierenden Lagerkräfte ergibt. Auch die A - und B -Komponenten der Vektorgleichung (19b) können unberücksichtigt bleiben, da sie ebenfalls nur Lagermomente bestimmen.

Bei der C -Komponente fallen einige Glieder heraus, nämlich diejenigen Vektorprodukte, deren einer Faktor u' ist. Da u' stets in der C -Richtung liegt, haben die mit u' gebildeten Vektorprodukte keine Komponente in der C -Richtung.

Bei der C -Komponente fallen einige Glieder heraus, nämlich diejenigen Vektorprodukte, deren einer Faktor u' ist. Da u' stets in der C -Richtung liegt, haben die mit u' gebildeten Vektorprodukte keine Komponente in der C -Richtung.

Auch die beiden letzten Glieder der linken Seite von (19b) fallen heraus, da sie sich gegenseitig aufheben. Man bekommt schließlich eine Gleichung von der Form:

$$\Theta_C \ddot{u}'_C + m a [(\dot{v})_B + u_C v_A - u_A v_C] - \Phi_B(\dot{u})_A - \Phi_A(\dot{u})_B + \Theta_C(\dot{u})_C + u_A(-\Phi_C u_A + \Theta_B u_B - \Phi_A u_C) - u_B(\Theta_A u_A - \Phi_C u_B - \Phi_B u_C) = M_C.$$

Darin ist z. B. $(\dot{v})_B$ die in Richtung der B -Achse genommene Komponente des in Σ° abgeleiteten Vektors \mathfrak{v} . Zwischen den nach Σ° und den nach Σ^* genommenen Komponenten bestehen die folgenden Transformationsgleichungen, bei denen zur Abkürzung $\int u'_C dt = \varphi$ gesetzt wurde:

$$\begin{aligned} u_A &= u_x \cos \varphi + u_y \sin \varphi, \\ u_B &= -u_x \sin \varphi + u_y \cos \varphi, \\ u_C &= u_z, \end{aligned}$$

entsprechend:

$$\begin{aligned} (\dot{u})_A &= \dot{u}_x \cos \varphi + \dot{u}_y \sin \varphi, \\ (\dot{u})_B &= -\dot{u}_x \sin \varphi + \dot{u}_y \cos \varphi, \\ (\dot{u})_C &= \dot{u}_z, \\ (\dot{v})_B &= -\dot{v}_x \sin \varphi + \dot{v}_y \cos \varphi. \end{aligned}$$

Auch in dem äußeren Moment M_C kommt die Unbekannte φ bzw. u'_C vor. Sei das Moment z. B. verursacht durch ein Schweremoment und durch eine von u'_C abhängige Dämpfung, so hat man, wenn die Komponenten der Erdbeschleunigung in der x - bzw. y -Richtung g_x bzw. g_y sind:

$$M_C = -m g_x a \sin \varphi + m g_y a \cos \varphi - f(u'_C).$$

Durch Einsetzen dieses Wertes und der angegebenen Transformationsformeln bekommt man unter Berücksichtigung trigonometrischer Umrechnungsformeln die Pendelgleichung:

¹⁰⁾ Siehe [4], S. 380.

$$\Theta_C \ddot{u}'_C + f(u'_C) + E \sin \varphi + F \cos \varphi + H \cos 2\varphi + K \sin 2\varphi = - \Theta_C \dot{u}_z \quad (23)$$

mit den Abkürzungen:

$$\begin{aligned} E &= -m a (\dot{v}_x - u_z v_y + u_y v_z) - \Phi_A (u_z u_y - \dot{u}_x) - \Phi_B (u_z u_x + \dot{u}_y) + m g_x a, \\ F &= m a (\dot{v}_y + u_z v_x - u_x v_z) - \Phi_A (u_z \dot{u}_x + \dot{u}_y) + \Phi_B (u_z u_y - \dot{u}_x) - m g_y a, \\ H &= \Phi_C (u_y^2 - u_x^2) + (\Theta_B - \Theta_A) u_x u_y, \\ K &= -2 \Phi_C u_x u_y + \frac{1}{2} (\Theta_A - \Theta_B) (u_x^2 - u_y^2). \end{aligned}$$

Darin sind die Komponenten der Bewegung von Σ° gegen Σ^* also $u_x u_y u_z, v_x v_y v_z$ sowie deren Ableitungen in Σ° bekannte Funktionen der Zeit, also sind die $E F H K$ als Funktionen von t gegeben. Ebenso ist auch $f(u'_C)$ als Funktion von u'_C gegeben.

Die Bewegungsgleichung (23) zeigt augenfällig, wie kompliziert die allgemeinen Gleichungen selbst in so einfachen Fällen wie dem vorliegenden werden können, wenn die Bewegung von einem beliebig bewegten System aus beurteilt wird.

Wir wollen noch eine naheliegende Spezialisierung der Gl. (23) vornehmen und sie auf ein auf der drehenden Erde mit horizontaler Achse schwingendes Pendel anwenden. Dann können u und v als konstant angenommen werden. Ferner wollen wir uns auf eine Betrachtung kleiner Auslenkungen des Pendels aus der Vertikallage beschränken und folglich die Gleichungen für kleine Winkel φ linearisieren. Man erhält so die Gleichung:

$$\Theta_C \ddot{\varphi} + (E + 2K) \varphi = -(F + H),$$

deren Koeffizienten nunmehr konstant sind. Die Lösung ergibt harmonische Schwingungen von der Schwingungszeit:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_C}{E + 2K}},$$

um eine Gleichgewichtslage:

$$\varphi_0 = -\frac{F + H}{E + 2K}.$$

Um noch einige Vereinfachungen in den Konstanten zu bekommen, wollen wir ferner dahingehend spezialisieren, daß wir Σ^* als Hauptachsensystem voraussetzen, also $\Phi_A = \Phi_B = \Phi_C = 0$ setzen. Außerdem wollen wir üblicherweise die von der Erdanziehung herrührende Komponente der Beschleunigung mit der durch die Erddrehung verursachten Zentrifugalbeschleunigung zusammenfassen:

$$+g_x - u_y v_z + u_z v_y = +g'_x.$$

Es bleibt nur diese Komponente übrig, da die y - und z -Komponente wegen der Wahl von Σ° verschwinden (x -Achse vertikal, y - und z -Achse horizontal).

Bezeichnen wir ferner den Winkel zwischen der Horizontalebene am Beobachtungsort und dem Drehvektor u mit ϑ , so kann man für die Komponenten von u schreiben:

$$\begin{aligned} u_x &= -u \cos \vartheta, \\ u_y &= u \sin \vartheta \sin \alpha, \\ u_z &= u \sin \vartheta \cos \alpha. \end{aligned}$$

Dabei ist α der Winkel zwischen der Nordrichtung und der positiven z -Richtung. Mit Einsetzen der angeführten Werte bekommt man nun für Gleichgewichtslage und Schwingungszeit die folgenden Werte:

$$\varphi_0 = +\frac{(\Theta_B - \Theta_A) u^2}{2 m a g'} \sin 2\vartheta \sin \alpha \quad (24),$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_C}{m g' a} \left[1 + \frac{(\Theta_B - \Theta_A) u^2 (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta \sin^2 \alpha)}{2 m a g'} \right]} \quad (25).$$

Danach zeigt ein physisches Pendel von einem Freiheitsgrad bei horizontaler Aufhängeachse nur dann die genaue Vertikale an, wenn entweder $\Theta_A = \Theta_B$ oder $\alpha = 0$ (Pendeldrehachse in Nord-Süd-Richtung) oder $\vartheta = 0$ bzw. 90° (Beobachtungsort am Äquator oder am Pol) gilt. Die Abweichung ist jedoch sehr klein, da sie mit dem Quadrat der kleinen Größe u eingeht. Beispielsweise beträgt die Abweichung eines Stabpendels ($\Theta_A = 0$) von einem halben Meter reduzierter Pendellänge ($\frac{\Theta_B}{m a} = 0,5 \text{ m}$) mit Ost-West gerichteter Pendelachse ($\alpha = 90^\circ$) für eine geographische Breite von $\vartheta = 45^\circ$ nur

$$\varphi_0 = -2,7 \cdot 10^{-5} \text{ Bogensekunden.}$$

Der Wert ist so klein, daß er sich bei dem heutigen Stand der Meßtechnik jeder Beobachtung entzieht.

Gleichermaßen ist die Änderung der Schwingungszeit so gering, daß sie mit den heutigen Hilfsmitteln nicht beobachtet werden kann. Das Zusatzglied von (25) beträgt maximal für das vorhin angegebene Pendel $1,3 \cdot 10^{-10}$. Am Pol wird die Schwingungszeit um diesen Betrag verlängert, am Äquator wird sie in demselben Maße verkürzt, sofern die Pendelachse in der Ost-West-Richtung liegt. Schwingt das Pendel dagegen um den Nord-Süd-Meridian, so fällt das Zusatzglied fort.

6. Systeme starrer Körper.

Die allgemeinen Motorgleichungen des Abschnittes 2 lassen sich ohne Schwierigkeiten auf Systeme starrer Körper übertragen. Werden die Bewegungen mehrerer starrer Körper vom Führungssystem aus betrachtet, so hat man für alle den gleichen Motor \mathfrak{F} der Führungsgeschwindigkeit, aber verschiedene Motoren \mathfrak{B}_i der Relativgeschwindigkeit, sowie verschiedene Trägheitsmotortensoren T_i anzusetzen. Außerdem hat man zum System der äußeren Kräfte (Motoren \mathfrak{P}_i) die zwischen den einzelnen Körpern wirkenden Reaktionskräfte und -momente hinzuzufügen, deren Motoren \mathfrak{R}_{ij} seien. Durch Summation über sämtliche Körper erhält man dann aus (5) die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} T_i \mathfrak{B}'_i + [\mathfrak{B}'_i(T_i \mathfrak{B}_i)] + T_i \mathfrak{F} + [\mathfrak{F}(T_i \mathfrak{F})] \\ + [\mathfrak{B}'_i(T_i \mathfrak{F})] + [\mathfrak{F}(T_i \mathfrak{B}_i)] + (T_i [\mathfrak{F} \mathfrak{B}_i]) - \mathfrak{P}_i - \sum_j \mathfrak{R}_{ij} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (26) \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

Die Matrix der Reaktionsmotoren \mathfrak{R}_{ij} ist dabei schiefsymmetrisch, d. h. es ist stets $\mathfrak{R}_{ii} = 0$ und $\mathfrak{R}_{ij} = -\mathfrak{R}_{ji}$ (actio = reactio). Zwangsläufige Bewegungen einzelner Körper werden sich dabei in Zusatzbedingungen zwischen den Bewegungsmotoren \mathfrak{B}_i bzw. deren Komponenten ausdrücken. Wenn z. B. zwei Körper in einem Punkte fest miteinander verbunden sind, so gilt, falls dieser Punkt zum Ursprung der körperfesten Systeme gewählt wird, stets $\mathfrak{v}'_{0i} = \mathfrak{v}'_{0j}$, die Vektoren der Drehgeschwindigkeiten sind dagegen im allgemeinen voneinander verschieden $u'_i \neq u'_j$.

Mit Rücksicht auf spätere Anwendungen wollen wir noch die Motorgleichung in der Form (9) für Systeme angeben. Wir erhalten:

$$\mathfrak{S}_i + [\mathfrak{F} \mathfrak{S}_i] + \mathfrak{S}'_{/i} + [\mathfrak{F} \mathfrak{S}'_{/i}] - \mathfrak{P}_i - \sum_j \mathfrak{R}_{ij} = 0 \dots \dots \dots (27) \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

7. Anwendung auf ein Drei-Körper-System.

Kardanisch gelagerte Kreisel werden bei fast allen Kreiselgeräten sowie auch bei Kreiselmodellen für den Unterricht verwendet. Bei der Berechnung der Geräte werden die Massen der Kardanringe jedoch meist ganz vernachlässigt oder nur in Näherungen berücksichtigt. Wir wollen uns daher die Aufgabe stellen, mit Hilfe der Gl. (26) die Bewegungsgleichungen für einen aus einem Kreisel (1), einem inneren Kardanring (2) und einem äußeren Kardanring (3) bestehenden Verband von drei Körpern in völliger Strenge anzuschreiben, eine Aufgabe, die meines Wissens bisher auch für nicht bewegtes Bezugssystem nicht behandelt worden ist.

Wir legen neben dem Bezugssystem Σ^0 drei verschiedene körperfeste Σ_1^* (Kreisel), Σ_2^* (innerer Kardanring) und Σ_3^* (äußerer Kardanring) derart in den Verband, daß die A-Achse von Σ_3^* zusammen mit der x-Achse von Σ^0 in die in Σ^0 feste Drehachse des äußeren Kardanringes fällt. Die B-Achsen von Σ_3^* und Σ_2^* sollen in die Richtung der inneren Kardanachse fallen, schließlich sollen die C-Achsen von Σ_2^* und Σ_1^* in die Figurenachse des Kreisels fallen. Nach Bild 4 sollen die Kardanringe durch Federn derart an das Bezugssystem gefesselt sein, daß im Gleichgewichtsfall die innere Kardanachse mit der y-Achse von Σ^0 , die Figurenachse des Kreisels mit der z-Achse von Σ^0 zusammenfällt. Bei Gleichgewicht fallen also dann die A- und B-Achsen von Σ_3^* und Σ_2^* mit der x- und y-Achse von Σ^0 zusammen, ferner gehen dann alle drei körperfesten C-Achsen in die z-Achse.

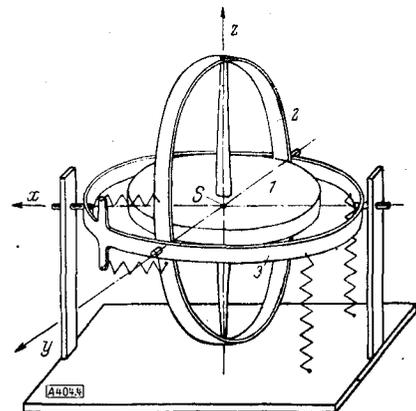


Bild 4.

Zur Vereinfachung der Rechnungen wollen wir voraussetzen, daß die vorstehend gewählten körperfesten Systeme Σ_1^* , Σ_2^* und Σ_3^* Hauptachsensysteme sind, und daß ferner der Schwerpunkt S aller drei Körper in den Schnittpunkt der Figurenachsen mit den Kardanachsen fällt. Dann kann der Schwerpunkt als in Σ^0 fester Punkt zum Ursprung der Systeme Σ^0 , Σ_1^* , Σ_2^* und Σ_3^* gewählt werden. Damit vereinfachen sich die Ausgangsgleichungen ganz erheblich. Wir brauchen nur die Momentkomponenten der einzelnen Glieder von (26) zu berücksichtigen und bekommen wegen $r_s = 0$ die Bewegungsgleichungen in der Vektorform:

$$\left. \begin{aligned} T_i u_i^* + [u_i^* (T_i u_i^*)] + T_i \dot{u}_i + [u_i (T_i u)] + [u_i^* (T_i u)] \\ + [u (T_i u_i^*)] + (T_i [u u_i^*]) - \mathfrak{M}_i - \sum_{j=1}^3 \mathfrak{R}_{ij} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (28). \quad (i = 1, 2, 3)$$

Darin ist:

$$T_1 = \begin{pmatrix} \Theta_{A_1} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{B_1} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{C_1} \end{pmatrix} \quad (\text{genommen nach } \Sigma_1^*),$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} \Theta_{A_2} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{B_2} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{C_2} \end{pmatrix} \quad (\text{genommen nach } \Sigma_2^*),$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} \Theta_{A_3} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{B_3} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{C_3} \end{pmatrix} \quad (\text{genommen nach } \Sigma_3^*).$$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}_1 &= (0, 0, 0) \\ \mathfrak{M}_2 &= (0, 0, 0) \\ \mathfrak{M}_3 &= (M_{A_3}, M_{B_L}, M_{C_L}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{nach } \Sigma_3^*).$$

Dabei ist M_{A_3} das von den zwischen äußerem Kardanring und Gehäuse ausgespannten Federn ausgeübte Moment, M_{B_L} und M_{C_L} sind die Lagermomente.

Die Matrix der Reaktionskräfte hat das Schema:

$$\mathfrak{R}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{R}_{12} & 0 \\ \mathfrak{R}_{21} & 0 & \mathfrak{R}_{23} \\ 0 & \mathfrak{R}_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\mathfrak{R}_{12} = -\mathfrak{R}_{21}$, $\mathfrak{R}_{23} = -\mathfrak{R}_{32}$. Ferner $\mathfrak{R}_{13} = \mathfrak{R}_{31} = 0$, da der Kreisel und der äußere Kardanring nicht aufeinander einwirken. Für die Komponenten hat man:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{21} &= (M_{A_{21}}, M_{B_{21}}, 0) \quad (\text{nach } \Sigma_2^*), \\ \mathfrak{R}_{32} &= (M_{A_{32}}, M_{B_{32}}, M_{C_{32}}) \quad (\text{nach } \Sigma_3^*). \end{aligned}$$

Die Vektoren der Drehgeschwindigkeiten haben die Komponenten:

$$\begin{aligned} u_1' &= (u_A', u_B', u_C') \quad (\text{nach } \Sigma_1^*), \\ u_2' &= (u_{A_2}', u_{B_2}', u_{C_2}') \quad (\text{nach } \Sigma_2^*), \\ u_3' &= (u_{A_3}', 0, 0) \quad (\text{nach } \Sigma_3^*), \\ u &= (u_A, u_B, u_C) \quad (\text{nach } \Sigma_1^*), \\ &= (u_{A_2}, u_{B_2}, u_{C_2}) \quad (\text{nach } \Sigma_2^*), \\ &= (u_{A_3}, u_{B_3}, u_{C_3}) \quad (\text{nach } \Sigma_3^*). \end{aligned}$$

Bevor wir nun diese Werte in die Gl. (28) einsetzen, müssen wir noch die kinematischen Beziehungen zwischen den in den verschiedenen Systemen genommenen Komponenten aufstellen. Jede beliebige Lage des betrachteten Systems läßt sich durch drei nacheinander ausgeführte Drehungen um die Achsen

- $x = A_3$ -Achse (äußere Kardanachse),
- $B_3 = B_2$ -Achse (innere Kardanachse),
- $C_2 = C_1$ -Achse (Kreisel-Figurenachse)

erreichen. Wir bezeichnen die Winkel der um diese Achsen ausgeführten Drehungen mit

$$\alpha = \int u'_{A_3} dt, \quad \beta = \int u'_{B_2} dt, \quad \gamma = \int u'_{C_1} dt$$

und können folglich die Lage des Systems durch diese drei Winkel angeben.

Die drei Winkel stimmen nicht mit den meist verwendeten Eulerschen Winkeln überein, sind jedoch dem vorliegenden Fall besonders angepaßt, da sie am Modell unmittelbar gemessen werden können.

Jeder der genannten Drehungen entspricht eine orthogonale Transformation. Werden die Drehungen hintereinander ausgeführt, so entsteht wieder eine Transformation, deren Matrix durch Multiplikation der Matrizen der Einzeltransformationen entsteht. Wir werden daher zuerst diese Einzeltransformationen bestimmen.

1. Drehung um die äußere Kardanachse (x - bzw. A_3 -Achse), siehe Bild 5.

Das entspricht der Transformation der Komponenten zwischen Σ° und Σ_3^* . Wir schreiben mit einem beliebigen Vektor p :

$$(p)_{\Sigma^\circ} = \mathfrak{T}_3 (p)_{\Sigma_3^*} \dots \dots \dots (29)$$

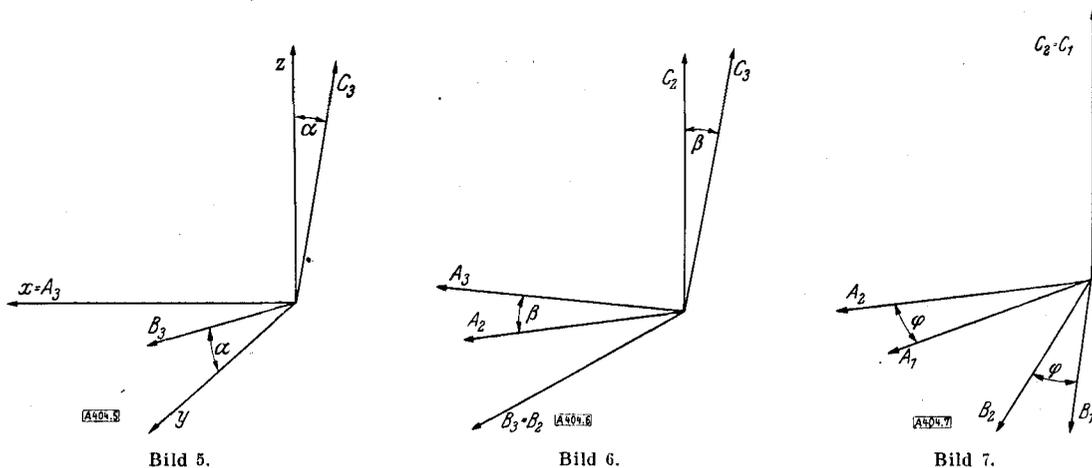
oder in Komponenten:

$$\begin{aligned} p_x &= p_{A_3}, \\ p_y &= p_{B_2} \cos \alpha - p_{C_3} \sin \alpha, \\ p_z &= p_{B_2} \sin \alpha + p_{C_3} \cos \alpha. \end{aligned}$$

Die Transformationsmatrix ist also:

$$\mathfrak{T}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

2. Drehung um die innere Kardanachse (B_3 - bzw. B_2 -Achse) ergibt in analoger Weise (siehe Bild 6):



$$(p)_{\Sigma_2^*} = \mathfrak{T}_2 (p)_{\Sigma_3^*} \dots \dots \dots (30)$$

mit der Matrix

$$\mathfrak{T}_2 = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

3. Drehung um die Figurenachse (C_2 - bzw. C_1 -Achse) ergibt (siehe Bild 7):

$$(p)_{\Sigma_1^*} = \mathfrak{T}_1 (p)_{\Sigma_2^*} \dots \dots \dots (31)$$

mit der Matrix:

$$\mathfrak{T}_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bei der weiteren Rechnung werden nun noch die Transformationen zwischen den Systemen Σ_3^* und Σ_1^* , Σ° und Σ_2^* sowie zwischen Σ° und Σ_1^* benötigt. Die Matrizen dieser Transformationen seien:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_4 &= \mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}_1 && (\Sigma_3^* \text{ nach } \Sigma_1^*), \\ \mathfrak{T}_5 &= \mathfrak{T}_3 \mathfrak{T}_2 && (\Sigma^\circ \text{ nach } \Sigma_2^*), \\ \mathfrak{T}_6 &= \mathfrak{T}_3 \mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}_1 && (\Sigma^\circ \text{ nach } \Sigma_1^*). \end{aligned}$$

Nach den Regeln der Matrizenmultiplikation bekommt man:

$$\mathfrak{T}_4 = \left\{ \begin{array}{ccc} \cos \beta \cos \varphi & -\cos \beta \sin \varphi & \sin \beta \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -\sin \beta \cos \varphi & \sin \beta \sin \varphi & \cos \beta \end{array} \right\} \dots \dots \dots (32),$$

$$\mathfrak{T}_5 = \left\{ \begin{array}{ccc} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \end{array} \right\} \dots \dots \dots (33),$$

$$\mathfrak{T}_6 = \left\{ \begin{array}{ccc} \cos \beta \cos \varphi & -\cos \beta \sin \varphi & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi & -\sin \alpha \sin \beta \sin \varphi + \cos \alpha \cos \varphi & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi & \cos \alpha \sin \beta \sin \varphi + \sin \alpha \cos \varphi & \cos \alpha \cos \beta \end{array} \right\} \dots \dots (34).$$

Nach diesen Vorbereitungen kann das System (28) in seine Komponentengleichungen zerlegt werden. Im Falle $i = 1$, also für den Kreisel selbst sollen alle Komponenten nach Σ_1^* genommen werden. Zu diesem Zwecke muß die im dritten Ausdruck von (28) vorkommende Ableitung von u nach Σ^0 vermöge der Transformation (34) nach Σ_1^* transformiert werden. Wir schreiben für die Komponenten in Σ_1^* in unmittelbar verständlicher Weise: $(\dot{u})_A, (\dot{u})_B, (\dot{u})_C$. In gleicher Weise müssen die nach Σ_2^* genommenen Komponenten von $\mathfrak{R}_{1,2} = -\mathfrak{R}_{2,1}$ vermöge (31) nach Σ_1^* transformiert werden. Man bekommt auf diese Weise die drei Komponentengleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} \Theta_{A_1} [\dot{u}'_{A_1} + (\dot{u})_{A_1}] + (\Theta_{C_1} - \Theta_{B_1}) (u'_B u'_C + u_B u_C + u_C u'_B + u_B u'_C) \\ \quad + \Theta_{A_1} (u_B u'_C - u_C u'_B) = M_{A_{12}} \cos \varphi + M_{B_{12}} \sin \varphi \\ \Theta_{B_1} [\dot{u}'_{B_1} + (\dot{u})_{B_1}] + (\Theta_{A_1} - \Theta_{C_1}) (u'_A u'_C + u'_A u_C + u_A u'_C + u_C u'_A) \\ \quad + \Theta_{B_1} (u_C u'_A - u_A u'_C) = -M_{A_{12}} \sin \varphi + M_{B_{12}} \cos \varphi \\ \Theta_{C_1} [\dot{u}'_{C_1} + (\dot{u})_{C_1}] + (\Theta_{B_1} - \Theta_{A_1}) (u'_B u'_A + u_B u_A + u_B u'_A + u_A u'_B) \\ \quad + \Theta_{C_1} (u_A u'_B - u_B u'_A) = 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (35).$$

Im Falle $i = 2$, also für den inneren Kardaning sollen alle Komponenten nach Σ_2^* genommen werden. Man hat dann die Komponenten von \dot{u} vermöge (33) und die Komponenten von $\mathfrak{R}_{2,3} = -\mathfrak{R}_{3,2}$ vermöge (30) nach Σ_2^* zu transformieren. Die Ausrechnung ergibt dann die gleichen Ausdrücke wie im System (35), nur überall mit dem Index 2 an den Trägheitsmomenten und Komponenten der Drehung. Die Momente sind dagegen etwas anders. Man bekommt:

$$\left. \begin{array}{l} \Theta_{A_2} [\dot{u}'_{A_2} + (\dot{u})_{A_2}] + (\Theta_{C_2} - \Theta_{B_2}) (u'_B u'_C + u_B u_C + u_C u'_B + u_B u'_C) \\ \quad + \Theta_{A_2} (u_B u'_C - u_C u'_B) = M_{A_{21}} + M_{A_{23}} \cos \beta - M_{C_{23}} \sin \beta \\ \Theta_{B_2} [\dot{u}'_{B_2} + (\dot{u})_{B_2}] + (\Theta_{A_2} - \Theta_{C_2}) (u'_A u'_C + u_A u_C + u_A u'_C + u_C u'_A) \\ \quad + \Theta_{B_2} (u_C u'_A - u_A u'_C) = M_{B_{21}} + M_{B_{23}} \\ \Theta_{C_2} [\dot{u}'_{C_2} + (\dot{u})_{C_2}] + (\Theta_{B_2} - \Theta_{A_2}) (u'_B u'_A + u_B u_A + u_B u'_A + u_A u'_B) \\ \quad + \Theta_{C_2} (u_A u'_B - u_B u'_A) = M_{A_{23}} \sin \beta + M_{C_{23}} \cos \beta \end{array} \right\} \dots \dots (36).$$

Schließlich werden im Falle $i = 3$, also für den äußeren Kardaning alle Komponenten nach Σ_3^* genommen.

Dann hat man vermöge (29) die Komponenten von \dot{u} nach Σ_3^* zu transformieren. Man bekommt:

$$\left. \begin{array}{l} \Theta_{A_3} [\dot{u}'_{A_3} + (\dot{u})_{A_3}] + (\Theta_{C_3} - \Theta_{B_3}) u_C u_{B_3} = M_{A_3} + M_{A_{32}} \\ \Theta_{B_3} (\dot{u})_{B_3} + (\Theta_{A_3} - \Theta_{C_3}) u_A u_{C_3} + (\Theta_{A_3} + \Theta_{B_3} - \Theta_{C_3}) u'_A u_{C_3} = M_{B_L} + M_{B_{32}} \\ \Theta_{C_3} (\dot{u})_{C_3} + (\Theta_{B_3} - \Theta_{A_3}) u_B u_{A_3} - (\Theta_{A_3} - \Theta_{B_3} + \Theta_{C_3}) u'_A u_{C_3} = M_{C_L} + M_{C_{32}} \end{array} \right\} \dots (37).$$

Dabei bestehen zwischen den Komponenten der Eigendrehung der drei Körper noch vier Beziehungen, die aus den Transformationen (31) und (32) folgen:

$$\left. \begin{array}{l} u'_{A_2} = u'_A \cos \varphi - u'_B \sin \varphi \\ u'_{B_2} = u'_A \sin \varphi + u'_B \cos \varphi \\ u'_{C_2} = u'_C \end{array} \right\} \dots \dots \dots (38),$$

$$u'_{A_3} = u'_A \cos \beta \cos \varphi - u'_B \cos \beta \sin \varphi + u'_C \sin \beta \dots \dots \dots (39).$$

Man hat somit in den neun Bewegungsgleichungen (35), (36) und (37) und den vier kinematischen Gl. (38) und (39) insgesamt dreizehn Gleichungen für die dreizehn Unbekannten $u'_A, u'_B, u'_C, u'_{A_2}, u'_{B_2}, u'_{C_2}, u'_{A_3}, M_{A_{21}}, M_{B_{21}}, M_{A_{32}}, M_{C_{32}}, M_{BL}, M_{CL}$.

Durch schrittweise Elimination der Lagerkräfte sowie der Drehungskomponenten $u'_{A_2}, u'_{B_2}, u'_{C_2}$ und u'_{A_3} könnte man das Problem auf insgesamt drei Gleichungen zurückführen, entsprechend den drei Freiheitsgraden des betrachteten Systems.

Die Ausrechnung wird jedoch sehr bald so undurchsichtig, daß wir im allgemeinen Falle darauf verzichten wollen. Selbst in dem ganz einfachen Sonderfall eines z. B. nur um die z-Achse von Σ° konstant drehenden Bezugssystems vereinfachen sich die Formeln nicht wesentlich, da die Komponenten von u in den drei körperfesten Systemen im allgemeinen von Null verschieden sind, also nur wenige Glieder fortfallen.

Wir werden uns deshalb im folgenden darauf beschränken, die Bewegungsgleichungen für den in unseren Betrachtungen mit enthaltenen Sonderfall anzugeben, daß sich der kardanisch gelagerte Kreisel in einem Inertialsystem befindet, also $u = 0$ wird.

Dann folgt aus der zweiten Gleichung von (37) sofort das Lagermoment $M_{BL} = -M_{B_{32}}$. Eine Unbekannte ist damit ausgeschieden. Aus der ersten und dritten Gleichung folgt:

$$M_{A_{32}} = \Theta_{A_3} \ddot{u}_{A_3} - M_{A_3},$$

$$M_{C_{32}} = -M_{CL}.$$

Diese Werte hat man in (36) einzusetzen, wobei zu berücksichtigen ist, daß $M_{ij} = -M_{ji}$ ist. Neben den bekannten von den Federn ausgeübten und also von den Winkeln α und β abhängigen Momenten M_{A_3} und $M_{B_{23}}$ kommen jetzt noch die Momente $M_{A_{21}}, M_{B_{21}}$ und M_{CL} vor. Die dritte Gleichung von (36) enthält nur noch die Unbekannte M_{CL} , die damit ermittelt ist, und deren Wert in die erste Gleichung von (36) einzusetzen ist. Aus der ersten und zweiten Gleichung von (36) lassen sich schließlich die Momente $M_{A_{21}}$ und $M_{B_{21}}$ ausrechnen und in das System (35) einsetzen. Damit ist dann die Elimination der im allgemeinen nicht interessierenden Lagerkräfte durchgeführt. Wir wollen jedoch das Ergebnis in der bisherigen Bezeichnungsweise nicht erst angeben, da sich die Gleichungen nach Einführung der Impulse wesentlich übersichtlicher fassen lassen. Wir führen ein:

$$\mathfrak{I}_1 = \text{Impuls des Kreisels,}$$

$$\mathfrak{I}_2 = \text{Impuls des inneren Kardanringes,}$$

$$\mathfrak{I}_3 = \text{Impuls des äußeren Kardanringes.}$$

Unter Berücksichtigung der auch für die Komponenten dieser Impulse geltenden Transformationsformeln (29) bis (34) bekommt man durch den angegebenen Eliminationsprozeß aus (35) die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} (\mathfrak{I}_1)_A + (\mathfrak{I}_1)_C u'_B - (\mathfrak{I}_1)_B u'_C &= \{ M_{A_3} - (\mathfrak{I}_3)_{A_3} - [+ (\mathfrak{I}_2)_{C_2} + (\mathfrak{I}_2)_{B_2} u'_{A_2} - (\mathfrak{I}_2)_{A_2} u'_{B_2}] \sin^2 \beta \} \frac{\cos \varphi}{\cos \beta} \\ &+ M_{B_{23}} \sin \varphi - (\mathfrak{I}_2)_A - (\mathfrak{I}_2)_{C_2} (u'_B) + (\mathfrak{I}_2)_{B_2} u'_C \\ (\mathfrak{I}_1)_B + (\mathfrak{I}_1)_A u'_C - (\mathfrak{I}_1)_C u'_A &= - \{ M_{A_3} - (\mathfrak{I}_3)_{A_3} - [(\mathfrak{I}_2)_{C_2} + (\mathfrak{I}_2)_{B_2} u'_{A_2} - (\mathfrak{I}_2)_{A_2} u'_{B_2}] \sin^2 \beta \} \frac{\sin \varphi}{\cos \beta} \\ &+ M_{B_{23}} \cos \varphi - (\mathfrak{I}_2)_B - (\mathfrak{I}_2)_{A_2} (u'_C) + (\mathfrak{I}_2)_{C_2} u'_{A_2} \\ (\mathfrak{I}_1)_C + (\mathfrak{I}_1)_B u'_A - (\mathfrak{I}_1)_A u'_B &= 0 \end{aligned} \right\} (40).$$

Dies sind also die vollkommen strengen Bewegungsgleichungen für einen kardanisch aufgehängten Kreisel. Sie reduzieren sich im Falle verschwindender Masse der Kardanringe auf die bekannte Eulersche Form. Es mag betont werden, daß selbstverständlich auch die kinematischen Eigentümlichkeiten der kardanischen Hängung in diesen Gleichungen wiedergegeben werden. So deutet das Glied mit $\cos \beta$ im Nenner an, daß nach einer Drehung des inneren Kardanringes um 90° die Gleichungen ihren Sinn verlieren, weil dann die Zwangskräfte (nämlich die Lagerkraft $M_{A_{12}}$) gegen unendlich geht. In der Tat verliert der Kreisel dann einen seiner Freiheitsgrade.

Auch der sogenannte kinematische Fehler kardanisch aufgehängter Kurskreisel (kräftefreier, als Richtungshalter verwendeter Kreisel), der darin besteht, daß der äußere Kardanrahmen (Kursrahmen) bei bestimmten Drehungen des Bezugssystems mitdreht, ist in den allgemeinen Gl. (36) bis (39) enthalten.

8. Die Näherungen.

Die strengen, im körperfesten System angeschriebenen Gleichungen bereiten große Integrationschwierigkeiten, so daß ihnen wohl keine besondere praktische Bedeutung zukommt. Ähnlich, wie schon die einfachsten Formen dieser Gleichungen, die Euler-Gleichungen, praktisch wenig Bedeutung erlangt haben, da ihre Integration bisher nur für wenige Sonderfälle, z. B. den kräftefreien Kreisel, den schweren symmetrischen Kreisel und den Kowalewskischen Kreisel gelungen ist. Das Beispiel des vorigen Abschnittes führte die Schwerfälligkeit der körperfesten Rechnung besonders deutlich vor Augen. Die Gleichungen mußten dort in drei verschiedenen Systemen angeschrieben werden. Ihre strenge Integration bringt selbst in einfachsten Fällen solche mathematischen Schwierigkeiten mit sich, daß die Lösung hoffnungslos erscheint. Meines Wissens sind die strengen Bewegungsgleichungen für einen starren Körper auf bewegtem Bezugssystem bisher in keinem einzigen Falle wirklich gelöst worden. Dagegen gibt es eine Anzahl von Fällen, in denen Näherungslösungen angegeben worden sind, die sich aus den strengen Gleichungen durch Anwendung der Methoden der „kleinen Schwingungen“ herleiten lassen, z. B. die Theorie des Kamerlingh-Onnesschen Pendels bei Winkelmann und Grammel¹¹⁾. Dabei ist es jedoch meist zweckmäßiger, von den in Σ° angeschriebenen Gleichungen auszugehen und nicht erst die körperfesten Gleichungen als Grundlage zu nehmen. Zwei Beispiele dieser Art sollen im folgenden den dabei einzuschlagenden Weg aufzeigen.

Die Schwierigkeit des Anschreibens der allgemeinen Motorgleichungen in Σ° besteht — wie bereits anfangs erwähnt wurde — darin, daß der Trägheitstensor zeitlich veränderliche Anteile besitzt. Man kann nun entweder so vorgehen, daß man den Trägheitstensor in Σ° ausrechnet, oder daß man auf die explizite Form der Ausgangsgleichung verzichtet und statt dessen mit den Gl. (9) bzw. (27) rechnet, in denen nur die Impulse auftreten. Dieses letztere Verfahren erweist sich insbesondere bei der Berechnung schneller Kreisel als sehr fruchtbar und führt zu Bewegungsgleichungen von großer praktischer Bedeutung.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß sich die allgemeinen Gleichungen vollkommen streng für den Fall eines im Schwerpunkt aufgehängten Körpers mit kugelförmigen Trägheitsellipsoid sowohl in Σ als auch in Σ° sowie in Σ^* anschreiben lassen. Der Trägheitstensor T reduziert sich dann einfach auf die skalare Zahl Θ .

a) Kleine Schwingungen pendelnder Körper. Zunächst sei der Fall betrachtet, daß der Körper kleine Schwingungen um eine in Σ° feste Gleichgewichtslage ausführt, wie dies z. B. bei den Schwingungen eines elastisch gelagerten Motorblockes auf bewegtem Flugzeug der Fall ist. Die die Schwingungen beschreibenden Variablen, d. h. die drei Verschiebungen längs der x , y - und z -Achsen sowie die drei Drehwinkel α , β , γ um diese Achsen werden als klein von erster Ordnung angenommen. Die Systeme Σ° und Σ^* seien so gewählt, daß sie im Gleichgewichtsfall zusammenfallen, als Ursprung wird zweckmäßigerweise der im Gleichgewichtsfall mit dem Schwerpunkt zusammenfallende Punkt gewählt. Die Aufgabe besteht nun darin, den Trägheitstensor für den gegen Σ° etwas verschobenen und verdrehten Körper als Funktion dieser Ortskoordinaten in Σ° aufzustellen. Dabei sollen alle Größen zweiter Ordnung (also Quadrate und gegenseitige Produkte der Verschiebungen und Verdrehungen) vernachlässigt werden. Wir können daher von vornherein die durch Verschiebungen verursachten Änderungen der Trägheitsmomente vernachlässigen, da sie auf Grund des bekannten Steinerschen Satzes mit dem Quadrat dieser Verschiebungen eingehen. Auch die Deviationsmomente Φ sind bei Verschiebungen von zweiter Ordnung klein, da sie mit dem Produkt je zweier Verschiebungen gehen. Es genügt also Verdrehungen zu betrachten, die wir uns durch die kleinen Winkel α , β , γ gegeben denken. Wird Σ^* gegen Σ° verdreht, so bestehen zwischen den nach Σ° und den nach Σ^* genommenen Impulskomponenten die Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} J_x &= J_A - J_B \gamma + J_C \beta \\ J_y &= J_A \gamma + J_B - J_C \alpha \\ J_z &= -J_A \beta + J_B \alpha + J_C \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (41).$$

Diese lassen sich entweder unmittelbar aus Bild 8 ablesen oder auch aus der Transformationsmatrix (34) herleiten, wenn man dort die Winkel α , β und $\gamma = \varphi$ als klein annimmt, also $\sin \alpha = \alpha$, $\cos \alpha = 1$ setzt usw. Für die Impulskomponenten nach Σ^* hat man zu setzen:

$$\left. \begin{aligned} J_A &= \Theta_A u'_A - \Phi_C u'_B - \Phi_B u'_C \\ J_B &= -\Phi_C u'_A + \Theta_B u'_B - \Phi_A u'_C \\ J_C &= -\Phi_B u'_A - \Phi_A u'_B + \Theta_C u'_C \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (42).$$

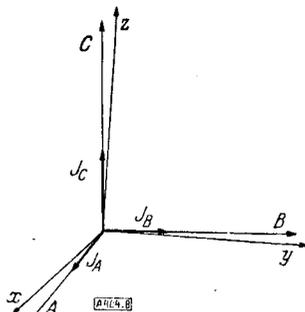


Bild 8.

¹¹⁾ Siehe [4], S. 449.

Ferner gilt zwischen den Komponenten der Drehgeschwindigkeit die gleiche Beziehung (41), wie zwischen den Impulskomponenten. Wir schreiben sie diesmal in der reziproken Form:

$$\left. \begin{aligned} u'_A &= u'_x + u'_y \gamma - u'_z \beta \\ u'_B &= -u'_x \gamma + u'_y + u'_z \alpha \\ u'_{C^*} &= u'_x \beta - u'_y \alpha + u'_z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (43).$$

Setzt man nun (43) in (42) und danach (42) in (41) ein, so bekommt man die Impulskomponenten in Σ° als Funktionen der Drehgeschwindigkeitskomponenten in Σ° . Wegen der Beziehung $\mathfrak{J} = Tu$ kann man daraus die Glieder des Trägheitstensors T in Σ° bestimmen und bekommt bei Vernachlässigung der von zweiter Ordnung kleinen Glieder:

$$T = \begin{pmatrix} \Theta_A + 2\Phi_C \gamma - 2\Phi_B \beta & -\Phi_C + (\Theta_A - \Theta_B)\gamma - \Phi_A \beta + \Phi_B \alpha & -\Phi_B + (\Theta_C - \Theta_A)\beta - \Phi_C \alpha + \Phi_A \gamma \\ -\Phi_C + (\Theta_A - \Theta_B)\gamma + \Phi_B \alpha - \Phi_A \beta & \Theta_B + 2\Phi_A \alpha - 2\Phi_C \gamma & -\Phi_A + (\Theta_B - \Theta_C)\alpha + \Phi_C \beta - \Phi_B \gamma \\ -\Phi_B + (\Theta_C - \Theta_A)\beta + \Phi_A \gamma - \Phi_C \alpha & -\Phi_A + (\Theta_B - \Theta_C)\alpha + \Phi_C \beta - \Phi_B \gamma & \Theta_C + 2\Phi_B \beta - 2\Phi_A \alpha \end{pmatrix}$$

Würde man darin auch die von erster Ordnung kleinen Glieder vernachlässigen, so käme man natürlich genau die Trägheitsmatrix für das System Σ^* . Ist Σ^* Hauptachsensystem, so vereinfacht sich der Trägheitstensor zu:

$$T = \begin{pmatrix} \Theta_A & (\Theta_A - \Theta_B)\gamma & (\Theta_C - \Theta_A)\beta \\ (\Theta_A - \Theta_B)\gamma & \Theta_B & (\Theta_B - \Theta_C)\alpha \\ (\Theta_C - \Theta_A)\beta & (\Theta_B - \Theta_C)\alpha & \Theta_C \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe dieser Matrix lassen sich nun die Vektorgleichungen (18) oder (19) nach Σ° zerlegen, und damit die gesuchten Näherungsgleichungen gewinnen. Dabei treten bei der Bildung des Impulses $\mathfrak{J} = Tu$ Glieder von der Form $u'_i \alpha$, $u'_i \beta$, $u'_i \gamma$ usw. auf, also nichtlineare Ausdrücke. Man wird sich daher in jedem einzelnen Falle Rechenschaft über die Größenordnung der einzelnen Glieder ablegen müssen, um zu sehen, ob sie als Größen erster oder zweiter Ordnung angesehen werden können.

In den allermeisten Fällen sind die Winkel harmonische, oder aus harmonischen Anteilen zusammengesetzte Funktionen der Zeit mit endlichen Frequenzen. In diesen Fällen sind mit den Winkeln auch deren Ableitungen, die Drehgeschwindigkeitskomponenten als klein zu betrachten, so daß die Produkte von Winkel und Drehgeschwindigkeitskomponente vernachlässigt werden können. Man kommt so zu Endgleichungen, die man auch durch Vernachlässigung der von erster Ordnung kleinen Glieder im Trägheitstensor erhalten kann. Es ist deshalb zweckmäßig, in allen Fällen, in denen keine abnorm hohen Frequenzen zu erwarten sind, von vornherein den Trägheitstensor in Σ° gleich dem in Σ^* anzusetzen, also die von erster Ordnung kleinen Glieder zu vernachlässigen.

Auf diese Weise erhält man zwar Gleichungen, die sich von den raumfest angeschriebenen Gleichungen formal nicht unterscheiden, die jedoch gänzlich andere Bedeutung haben und nur für „kleine Schwingungen“ gültig sind. Es mag auch an dieser Stelle betont werden, daß bei der Anwendung derartiger Näherungsmethoden stets eine besondere Vorsicht angebracht ist, da die Lösungen der angenäherten Gleichungen nur für „hinreichend kleine Zeiten“ eine Näherung für die wirklichen Verhältnisse darstellen.

b) Kleine Schwingungen von Kreiseln und Kreiselverbänden. Bei Kreiseln, also Körpern, die auch im Gleichgewichtsfall noch eine Eigendrehung besitzen, führt eine ganz ähnliche Rechnung zum Ziel. Wir nehmen an, daß der Körper im Gleichgewichtsfall um eine sowohl in Σ^* als auch in Σ° feste Achse rotiere und wählen diese Achse z. B. zur C -Achse von Σ^* und zur z -Achse von Σ° . Bei Schwingungen um diesen stationären Bewegungszustand kommen zur Eigendrehung noch zusätzliche Drehungen um die zur Drehachse der Eigendrehung senkrechten Achsen. Die Winkel dieser Zusatzdrehungen wollen wir als klein betrachten und werden folglich ihren Cosinus gleich eins und ihren Sinus gleich dem Winkel selbst setzen. Dann fällt die AB -Ebene von Σ^* näherungsweise mit der xy -Ebene von Σ° zusammen (Bild 9). Die C -Achse weicht von der z -Achse um einen kleinen Winkel ab, dessen Projektionen auf die yz - bzw. xz -Ebene α bzw. β sind.

Wie man aus Bild 9 oder aus dem Transformationsschema (34) für kleine Winkel α und β ableiten kann, gelten zwischen den Impulskomponenten die Beziehungen:

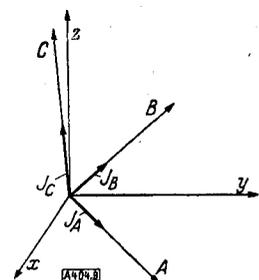


Bild 9.

$$\left. \begin{aligned} J_x &= J_A \cos \varphi - J_B \sin \varphi + J_C \beta \\ J_y &= J_A \sin \varphi + J_B \cos \varphi - J_C \alpha \\ J_z &= J_A (\alpha \sin \varphi - \beta \cos \varphi) + J_B (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi) + J_C \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (44).$$

Darin hat man sich für J_A, J_B, J_C die Werte (42) eingesetzt zu denken. Meist läßt sich das körperfeste System so legen, daß Σ^* Hauptachsensystem wird. Dann bleibt von (42) nur noch übrig:

$$\left. \begin{aligned} J_A &= \Theta_A u'_A \\ J_B &= \Theta_B u'_B \\ J_C &= \Theta_C u'_C \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (45).$$

Das läßt sich stets erreichen, wenn die Drehachse der Eigendrehung Hauptträgheitsachse ist. Wenn es jedoch darauf ankommt, bei der Rechnung auch den Einfluß von Unwuchten zu erfassen, die durch eine Abweichung der Drehachse von der Hauptträgheitsachse hervorgerufen werden, so läßt sich die Verwendung der allgemeinen Impulsausdrücke (42) nicht umgehen.

Der Kunstgriff der weiteren Rechnung besteht nun darin, daß die im allgemeinen bekannte und meist sogar konstante Eigendrehung des Körpers von den Komponenten der Zusatzdrehungen abgesondert und für sich behandelt wird, d. h. die Komponenten der Zusatzdrehungen werden so angesetzt wie bei einem nicht um die C -Achse drehenden Körper:

$$\begin{aligned} u'_A &= u'_x \cos \varphi + u'_y \sin \varphi + u'_z (\alpha \sin \varphi - \beta \cos \varphi), \\ u'_B &= -u'_x \sin \varphi + u'_y \cos \varphi + u'_z (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi), \\ 0 &= u'_x \beta - u'_y \alpha + u'_z. \end{aligned}$$

Man sieht daraus, daß das letzte Glied der ersten und zweiten Gleichung vernachlässigt werden kann, da es von zweiter Ordnung klein ist. Das folgt sofort durch Einsetzen des Wertes für u'_z aus der dritten Gleichung. Wir können also weiterhin:

$$\begin{aligned} u'_A &= u'_x \cos \varphi + u'_y \sin \varphi, \\ u'_B &= -u'_x \sin \varphi + u'_y \cos \varphi \end{aligned}$$

setzen und erhalten dann für die Impulskomponenten (44) mit den Werten (45), also für den Fall, daß Σ^* Hauptachsensystem ist:

$$\left. \begin{aligned} J_x &= (\Theta_A \cos^2 \varphi + \Theta_B \sin^2 \varphi) u'_x + \frac{1}{2} (\Theta_A - \Theta_B) \sin 2\varphi u'_y + \Theta_C u'_C \beta \\ J_y &= \frac{1}{2} (\Theta_A - \Theta_B) \sin 2\varphi u'_x + (\Theta_A \sin^2 \varphi + \Theta_B \cos^2 \varphi) u'_y - \Theta_C u'_C \alpha \\ J_z &= \left[\frac{\alpha}{2} (\Theta_A - \Theta_B) \sin 2\varphi - \beta (\Theta_A \cos^2 \varphi + \Theta_B \sin^2 \varphi) \right] u'_x \\ &\quad + \left[\frac{\beta}{2} (\Theta_B - \Theta_A) \sin 2\varphi + \alpha (\Theta_A \sin^2 \varphi + \Theta_B \cos^2 \varphi) \right] u'_y + \Theta_C u'_C \end{aligned} \right\} \dots \dots (46).$$

Damit hat man die in die allgemeinen Gl. (9) bzw. (20) einzusetzenden Komponenten des Relativimpulses nach Σ^0 gefunden. Diese Werte stimmen um so besser, je größer die Eigendrehung u'_C gegenüber den anderen Drehgeschwindigkeitskomponenten ist, je mehr also der Gesamtimpuls des Körpers in die C -Achse fällt. Das ist sicher dann der Fall, wenn $u'_z = u'_y \alpha - u'_x \beta$ gegenüber u'_C vernachlässigt werden kann, was bei hinreichend schnellen Kreiseln immer möglich ist. Da u'_z eliminiert ist, kann man jetzt aus (46) nicht wie im Falle der kleinen Pendelschwingungen den Trägheitstensor nach Σ^0 bestimmen. Man kann also auch nicht die expliziten Gl. (18) oder (19) verwenden.

Bei der Berechnung des in (9) bzw. (20) vorkommenden Führungsimpulses \mathfrak{F}_f kann man sich meist damit begnügen, die Glieder ohne die kleinen Faktoren α bzw. β mitzunehmen, wenn man nicht sogar den Führungsimpuls \mathfrak{F}_f vollkommen gegen den Relativimpuls \mathfrak{F} vernachlässigen kann, was bei nicht zu schnell drehendem Bezugssystem sicher erlaubt ist. \mathfrak{F}_f hat bei Vernachlässigung der von erster Ordnung kleinen Glieder die Komponenten:

$$\left. \begin{aligned} J_{fx} &= (\Theta_A \cos^2 \varphi + \Theta_B \sin^2 \varphi) u_x + \frac{1}{2} (\Theta_A - \Theta_B) \sin 2\varphi u_y \\ J_{fy} &= \frac{1}{2} (\Theta_A - \Theta_B) \sin 2\varphi u_x + (\Theta_A \sin^2 \varphi + \Theta_B \cos^2 \varphi) u_y \\ J_{fz} &= \Theta_C u_z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (47).$$

Mit den Werten (46) und (47) bekommt man nun aus (20) die sehr allgemeinen Näherungsgleichungen für die Bewegungen eines Kreisels auf bewegtem Bezugssystem. Sie bieten im allgemeinen sehr viel weniger mathematische Schwierigkeiten als die strengen Gleichungen und sind in Sonderfällen (z. B. symmetrischer Kriese! auf konstant drehendem System) sogar elementar lösbar. In der allgemeinen Form (20) umfassen die Gleichungen auch noch den Fall, daß der Körper keinen festen Punkt im Bezugssystem besitzt, also selbst noch irgendwelche Bewegungen gegen Σ° ausführt. Ist dagegen ein Punkt des Körpers in Σ° fest, so reduziert sich (20) auf:

$$\mathring{\mathfrak{S}} + [u \mathfrak{S}] + \mathring{\mathfrak{S}}_f + [u \mathfrak{S}_f] = \mathfrak{M} \dots \dots \dots (48).$$

Aus dieser Form lassen sich gleich einige bekannte Sonderfälle herausnehmen. Z. B. bekommt man mit $\mathfrak{S}_f = 0$ und symmetrischem Kriese! die von Schuler [5] für langsam drehendes Bezugssystem aufgestellten Kriese!gleichungen. Nimmt man außerdem $u = 0$ (Kriese! im Inertialsystem), so kommt man zu den seit langem bekannten linearisierten Kriese!gleichungen, die häufig die Föppl'schen Gleichungen genannt werden, aber schon vor Föppl z. B. bei Routh¹²⁾ zu finden sind.

Weiterhin bekommt man aus (48) ebenfalls für $u = 0$ (Kriese! im Inertialsystem) aber unsymmetrischen Körper die Formeln von Fuchs [8] und Weigand [9]. Diese letzteren Formeln sollen kurz hergeleitet werden, um die Form der bei unsymmetrischen Körpern auftretenden Glieder an einem Beispiel zu zeigen. Mit $u = 0$ reduziert sich (48) auf den Impulssatz:

$$\mathring{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S} = \mathfrak{M}.$$

Setzt man darin die Werte (46) ein, so erhält man aus den beiden ersten Komponentengleichungen nach einigen trigonometrischen Umformungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} [(\Theta_A + \Theta_B) + (\Theta_A - \Theta_B) \cos 2\varphi] \dot{u}'_x + \frac{1}{2} (\Theta_A - \Theta_B) \sin 2\varphi \dot{u}'_y + \Theta_C u'_C u'_y \\ + u'_C \left[\frac{1}{2} (\Theta_B - \Theta_A) \sin 2\varphi u'_x + (\Theta_A - \Theta_B) \cos 2\varphi u'_y \right] = M_x \\ \frac{1}{2} (\Theta_A - \Theta_B) \sin 2\varphi \dot{u}'_x + \frac{1}{2} [(\Theta_A + \Theta_B) - (\Theta_A - \Theta_B) \cos 2\varphi] \dot{u}'_y - \Theta_C u'_C u'_x \\ + u'_C \left[(\Theta_A - \Theta_B) \cos 2\varphi u'_x + \frac{1}{2} (\Theta_A - \Theta_B) \sin 2\varphi u'_y \right] = M_y \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (49).$$

Dabei ist jedoch der Fall angenommen, daß $u'_C = \dot{\varphi}$ konstant ist, also $\dot{u}'_C = 0$. Dieser Fall kommt praktisch sehr häufig vor, weil der Kriese! meist durch einen Antrieb auf konstanter Drehzahl gehalten wird. Die Koeffizienten haben beim unsymmetrischen Kriese! die Periode $2 u'_C$, weil das Trägheitsmoment während eines Umlaufes zweimal seinen Höchst- und Tiefstwert annimmt. Die Gl. (49) entsprechen genau den Bewegungsgleichungen, die Fuchs [8] und Weigand [9] für den unsymmetrischen Kriese! verwendet haben.

Im Falle des symmetrischen Kreisels ($\Theta_A = \Theta_B = \Theta$) geht (49) in die bekannten Föppl-Gleichungen über:

$$\left. \begin{aligned} \Theta \dot{u}'_x + \Theta_C u'_C u'_y = M_x \\ \Theta \dot{u}'_y - \Theta_C u'_C u'_x = M_y \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (50).$$

Seine ganze Anpassungsfähigkeit erweist das angegebene Näherungsverfahren aber erst, wenn man Verbände starrer Körper zu untersuchen hat. Man braucht dann nur die Einzelimpulse der Körper zu summieren und hat damit in (9) bzw. (27) einzugehen. Wir wollen das an dem im Abschnitt 7 streng berechneten Beispiel des kardänisch gehängten Kreisels zeigen, beschränken uns dabei jedoch der Einfachheit halber auf den Fall eines symmetrischen Kreisels. Für die Summen der Impulsbestandteile hat man:

¹²⁾ Siehe [1], Kap. V.

$$\begin{aligned}\sum J_x &= J_{x_1} + J_{x_2} + J_{x_3} = \Theta u'_x + \Theta_C u'_C \beta + \Theta_{x_2} u'_x + \Theta_{x_3} u'_x, \\ \sum J_y &= J_{y_1} + J_{y_2} + J_{y_3} = \Theta u'_y - \Theta_C u'_C a + \Theta_{y_2} u'_y + 0, \\ \sum J_z &= J_{z_1} + 0 + 0.\end{aligned}$$

Die ersten Glieder folgen aus (46) mit $\Theta_A = \Theta_H$. Setzt man das Trägheitsmoment des gesamten Systems um die x - bzw. y -Achse

$$\begin{aligned}\Theta_x &= \Theta + \Theta_{x_2} + \Theta_{x_3}, \\ \Theta_y &= \Theta + \Theta_{y_2}\end{aligned}$$

an, so hat man die Impulskomponenten:

$$\begin{aligned}J_x &= \Theta_x u'_x + \Theta_C u'_C \beta, \\ J_y &= \Theta_y u'_y - \Theta_C u'_C a,\end{aligned}$$

woraus nach dem Impulssatz sofort die gegenüber (50) allgemeineren Föppl'schen Gleichungen

$$\begin{aligned}\Theta_x \ddot{u}'_x + \Theta_C u'_C \ddot{u}'_y &= M_x, \\ \Theta_y \ddot{u}'_y - \Theta_C u'_C \ddot{u}'_x &= M_y\end{aligned}$$

folgen, bei denen die zum Kreisel hinzugekoppelten Massen mit berücksichtigt sind.

Die Einflüsse der mit dem Kreisel verbundenen und zwangsläufig mit ihm gekoppelten Zusatzmassen lassen sich auf diese Weise auch für den unsymmetrischen Kreisel stets dann erfassen, wenn die Zahl der Freiheitsgrade des Verbandes durch die hinzugekoppelten Massen nicht erhöht wird. Bringen jedoch die Zusatzmassen neue Freiheitsgrade, so hat man dementsprechend mehr Gleichungen mitzunehmen, in denen dann auch die von den einzelnen Teilkörpern aufeinander ausgeübten Reaktionsmomente zu berücksichtigen sind. Man muß dann wieder auf die allgemeine Form (27) zurückgreifen, bzw. auf deren Vektorzerlegung, die sich durch Summierung und Hinzufügung der Reaktionsmomente aus (20) ergibt. Diese Gleichungen sind insbesondere zur Berechnung von gekoppelten Kreisel- und Pendelsystemen geeignet, wie sie in der Technik häufig anzutreffen sind, z. B. beim Zwei- und Dreikreiselkompas, bei dem mit Pendeln gekoppelten Ein- und Zweikreiselhorizonten und vielen anderen Geräten. Bei der Berechnung des Verhaltens derartiger Geräte auf bewegtem Fahr- oder Flugzeug sind die Näherungsgleichungen unentbehrlich geworden, weil sie selbst in solchen Fällen noch gewisse Aussagen zu geben imstande sind, in denen eine strenge Lösung an mathematischen Schwierigkeiten scheitert.

9. Schrifttum.

- [1] E. J. Routh: Die Dynamik der Systeme starrer Körper. Leipzig 1898, Bd. 2, Kap. I, Seite 1 ff.
- [2] K. Heun: Ansätze und allgemeine Methoden der Systemmechanik. Encykl. d. math. Wiss. IV₂, Art. 11, S. 398.
- [3] R. v. Mises: Motorrechnung, ein neues Hilfsmittel der Mechanik. Z. angew. Math. Mech. Bd. 4 (1924), S. 196.
- [4] M. Winkelmann und R. Grammel: Die Relativbewegung des starren Körpers auf der bewegten Erde. Handb. d. Physik, Berlin 1927, Bd. V, Kap. 8, S. 446 ff.
- [5] M. Schuler: Die Föppl'sche Methode zur Lösung von Kreiselproblemen. Z. angew. Math. Mech. Bd. 15 (1935), S. 88 ff.
- [6] E. Hölder: Über die explizite Form der dynamischen Gleichungen für die Bewegung eines starren Körpers relativ zu einem geführten Bezugssystem. Z. angew. Math. Mech. Bd. 19 (1939), S. 166 ff.
- [7] G. Herglotz: Vorlesung über analytische Mechanik. Göttingen, Sommer-Semester 1941.
- [8] R. Fuchs: Über den schweren unsymmetrischen Kreisel. Dissertation, Göttingen 1941.
- [9] A. Weigand: Schwingungen eines elastisch gelagerten Motors mit zweiflügeliger Luftschraube. Luftf.-Forsch. Bd. 18 (1941), S. 378 ff.