

Der Vergleich der theoretischen Formel mit den experimentellen Formeln ergibt

	für $Re_x = 10^7$	für $Re_x = 10^9$
nach Schönherr	$c_f = 0,00293$	$c_f = 0,00156,$
nach Schultz-Grunow	$c_f = 0,00294$	$c_f = 0,00145,$
Formel (72)	$c_f = 0,00308$	$c_f = 0,00160.$

## VI. Zusammenfassung

Unter Zugrundelegung des Prandtlschen Schubspannungsansatzes werden die Differentialgleichungen der turbulenten Grenzschicht an der längsangeströmten ebenen Platte in zwei Schritten von der Wand her integriert. Für den übrigen Bereich der Grenzschicht wird die erhaltene Lösung als Approximation herangezogen. Es wird die Geschwindigkeitsverteilung für die Längs- und Querkomponente berechnet und eine Widerstandsformel aufgestellt. Ferner wird das Wachstum der Grenzschicht in der Asymptote berechnet. Bei passender Wahl der empirischen Koeffizienten der Theorie erhält man gute Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen.

## Literatur

- [1] W. Szablewski: Berechnung der turbulenten Strömung im Rohr auf der Grundlage der Mischungsweghypothese. Z. angew. Math. Mech. 31 (1951), S. 131–142.
- [2] L. Prandtl: Zur turbulenten Strömung in Rohren und längs ebenen Platten. Erg. AVA Göttingen, IV. Lieferung (1932).
- [3] F. Schultz-Grunow: Neues Reibungswiderstandsgesetz für glatte Platten. Lufo 17 (1940), S. 239.
- [4] K. Schönherr: Resistance of flat plates. Trans. Soc. Nav. Arch. and Marine Eng. 40 (1932).
- [5] J. Nikuradse: Turbulente Reibungsschichten an der Platte. Z. W. B. (1942).

Eingegangen am 29. Januar 1951.

# KLEINE MITTEILUNGEN

## Erzwungene Schwingungen des linearen Schwingers bei nichtharmonischer Erregung.

Bei der Behandlung der erzwungenen Schwingungen wird in den meisten Lehrbüchern nur der Fall der harmonischen Erregerkraft ausführlich behandelt und der allgemeinere Fall einer periodischen, nichtharmonischen Erregung mit dem Hinweis auf das Fourier'sche Theorem und das bei linearen Systemen geltende Superpositionsprinzip abgetan. Damit wird zwar das Problem im Prinzip gelöst, jedoch ist die zahlenmäßige Ausrechnung meist mühselig und zeitraubend. In Sonderfällen kann man jedoch auf völlig elementarem Wege zu Lösungen kommen, die weniger Aufwand zu ihrer zahlenmäßigen Auswertung erfordern.

Wir betrachten den linearen gedämpften Swinger, dessen freie Schwingungen durch die Gleichung

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + cx = 0 \quad \dots \quad (1)$$

beschrieben werden. Durch Einführung der neuen Zeit

$$\tau = \sqrt{\frac{c}{m}} t$$

lässt sich (1) in die dimensionslose Form

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2D\frac{dx}{d\tau} + x = 0 \quad \dots \quad (2)$$

bringen, wobei

$$D = \frac{d}{2\sqrt{mc}}$$

eine dimensionslose Größe (das Lehrsche Dämpfungsmaß) ist.  $D=0$  gibt den ungedämpften Swinger,  $D=1$  den aperiodischen Grenzfall. Die Lösung von (2) lautet:

$$x = x_A e^{-D\tau} \cos \sqrt{1-D^2}(\tau - \tau_0) \quad \dots \quad (3).$$

Die Bedeutung der Integrationskonstanten  $x_A$  und  $\tau_0$  geht aus Bild 1 hervor. Die Zeiten, zu denen die Schwingungsamplitude Maxima erreicht, folgen aus:

$$\operatorname{tg} \sqrt{1-D^2}(\tau_{max} - \tau_0) = -\frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \quad \dots \quad (4).$$

Die Maxima selbst sind:

$$x_{max} = x_A \sqrt{1-D^2} e^{-D(\tau_{max} + \frac{n\pi}{\sqrt{1-D^2}})} \quad n=0, 1, 2, \dots (5).$$

Diese bekannten Beziehungen über die freien Schwingungen sollen dazu verwendet werden, die Lösung auch für erzwungene Schwingungen aufzubauen. Es wird dabei — wie das üblicherweise auch bei harmo-

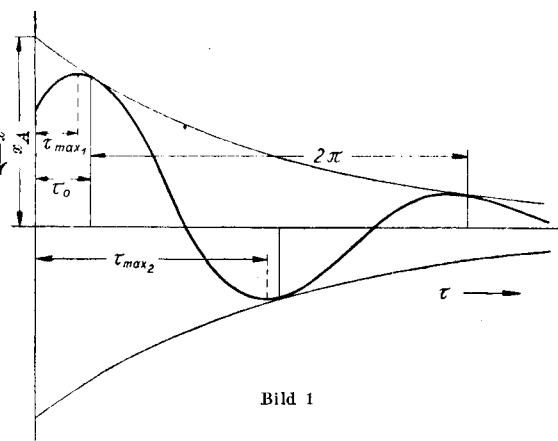


Bild 1

nischer Erregung geschieht — nur der eingeschwungene Zustand betrachtet, der sich nach Abklingen von Eigenschwingungen im Laufe der Zeit stets einstellt.

### 1. Erregung durch eine periodisch wechselnde Kraft konstanter Betrages.

Wir wählen den Betrag der Kraft so, daß die durch sie bewirkte Verschiebung der Gleichgewichtslage des Schwingers gleich der Einheit wird. Die Zeit einer vollen Periode des Kraftwechsels sei  $\tau_p$ . Dann springt die Gleichgewichtslage  $x_{gl}$  jeweils nach der Zeit  $\tau_p/2$

von  $-1$  nach  $+1$  oder umgekehrt (Bild 2). Die Aufgabe besteht nun darin, in die mäanderförmige Kurve der Gleichgewichtslage solche Teilstücke der freien Schwingung von Bild 1 hereinzulegen, daß sie stetige, knickfreie Kurve entsteht. In Bild 2 ist das

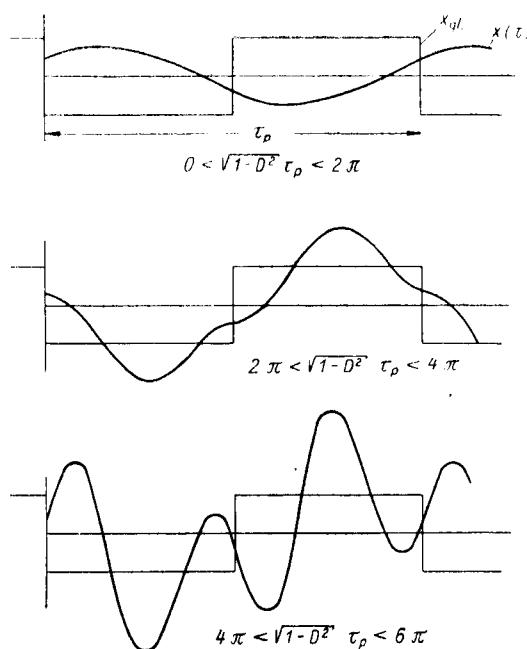


Bild 2

für drei verschiedene Werte von  $\tau_p$  angedeutet. Bezeichnet  $\bar{x}$  die um den Betrag 1 verschobene Schwingung, so muß gelten:

$$\left( \frac{d\bar{x}}{d\tau} \right)_{(\tau=0)} = - \left( \frac{d\bar{x}}{d\tau} \right)_{\left( \tau = \frac{\tau_p}{2} \right)} \dots \dots \quad (6)$$

$$\bar{x}(0) + \bar{x}\left(\frac{\tau_p}{2}\right) = 2 \dots \dots \quad (7)$$

Durch Einsetzen von (3) folgt aus (6) eine Bestimmungsgleichung für  $\tau_0$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \sqrt{1-D^2} \tau_0 &= \\ \frac{-D \frac{\tau_p}{2}}{D + c} \left( \sqrt{1-D^2} \sin \sqrt{1-D^2} \frac{\tau_p}{2} + D \cos \sqrt{1-D^2} \frac{\tau_p}{2} \right) \\ \frac{-D \frac{\tau_p}{2}}{\sqrt{1-D^2} + c} \left( \sqrt{1-D^2} \cos \sqrt{1-D^2} \frac{\tau_p}{2} - D \sin \sqrt{1-D^2} \frac{\tau_p}{2} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

und aus (7) eine Gleichung für  $\bar{x}_A$ :

$$\bar{x}_A = \frac{2}{-D \frac{\tau_p}{2} \cos \sqrt{1-D^2} \left( \frac{\tau_p}{2} - \tau_0 \right)} \quad (9)$$

Damit sind die Kennwerte der Schwingung bestimmt. Zur Berechnung der Resonanzkurven kann man nun wie folgt vorgehen: Für gegebenes  $D$  und  $\tau_p$  wird aus (8)  $\tau_0$  bestimmt, dann aus (9)  $\bar{x}_A$ , aus (4)  $\tau_{max}$  und aus (5)  $\bar{x}_{max}$ . Schließlich wird  $x_{max}$  aus  $\bar{x}_{max}$  durch Hinzuzählen bzw. Abziehen der Einheit gebildet, je nachdem, in welchem Bereich  $\tau_p$  liegt bzw. welches der beiden ersten Maxima  $\bar{x}_{max}$  den größten Betrag für  $x_{max}$  ergibt. Das Ergebnis der Auswertung zeigt

Bild 3. Dort ist als Abszisse  $\delta = \frac{\tau_p}{2\pi}$ , also das Verhältnis von Eigenfrequenz des Schwingers zur Erregerfrequenz aufgetragen. Das ist im vorliegenden Fall zweckmäßiger, als die übliche Auftragung der Resonanzkurven über dem Kehrwert  $1/\delta$ , also dem Verhältnis von Erregerfrequenz zur Eigenfrequenz, weil so die Maxima besser getrennt werden. Zum Vergleich ist in Bild 4 das bekannte Resonanzgebirge für harmonische Erregung in der gleichen Weise dargestellt worden. Es zeigt sich, daß die Werte des ersten Maximums von Bild 3 rd. 20% größer sind, als die von Bild 4. Für  $\delta < 1$  ist zwischen beiden Resonanzgebirgen kein wesentlicher Unterschied festzustellen. Dagegen sind die Unterschiede für  $\delta > 1$  beachtlich. Sie bestehen erstens im Auftreten weiterer Maxima, die allerdings nur bei geringer Dämpfung merklich werden, sowie in der allgemeinen Hebung des Amplitudenniveaus, das auch im Grenzfall  $\delta \rightarrow \infty$  über 1

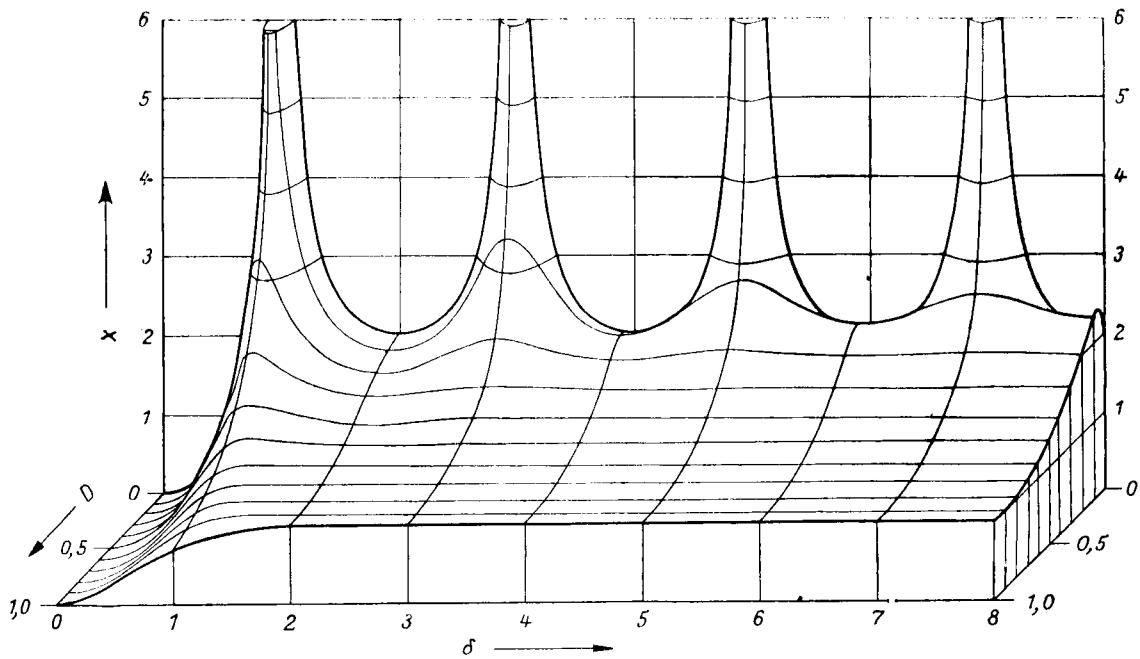


Bild 3

bleibt. Das ist physikalisch sofort einzusehen, denn auch bei außerordentlich kleiner Frequenz des Kraftwechsels wird das plötzliche Umschalten der Kraftrichtung stets zu einer Schwingung anregen, die über die Gleichgewichtslage hinausschießt. Bei sehr langsamem Kraftänderungen — wie sie bei harmonischer Erregung kleiner Frequenz auftreten — kann dagegen die Amplitude den Wert 1 nicht übersteigen

Die Lage und der Betrag der Resonanzmaxima läßt sich leicht errechnen. Ein Maximum tritt stets auf, wenn mit der Krafrichtung auch die Schwingungsrichtung wechselt, denn dann wird — verglichen mit den möglichen Nachbarbewegungen — am meisten Energie in das System hereingepumpt. Aus (8) und (4) folgt, daß dies der Fall ist für

$$\delta = \frac{\tau_p}{2\pi} = \frac{n}{\sqrt{1-D^2}} \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots$$

ferner aus (4):  $\tau_{max} = \tau_0 + n \pi$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$   
und schließlich:

$$x_{max} = \bar{x}_A \mp 1 = \frac{1}{\cos \frac{\tau_p}{4}} \mp 1,$$

wobei das Minuszeichen nur für  $\delta < 1$  gilt. Die verschiedenen Äste der Resonanzkurve sind also für  $D=0$  völlig gleich; selbst der Anstieg des ersten Maximums entspricht dem aller anderen, ist jedoch um den Betrag  $\frac{1}{2}$  nach unten verschoben. Die Dicke der Resonanzmaxima nimmt in der  $D$ -Richtung rasch ab.

Im Sonderfall  $D = 1$  (aperiodischer Grenzfall) hat man als Lösung von (2) zu setzen:

$$x = x_A (1 + c \tau) e^{-\tau}.$$

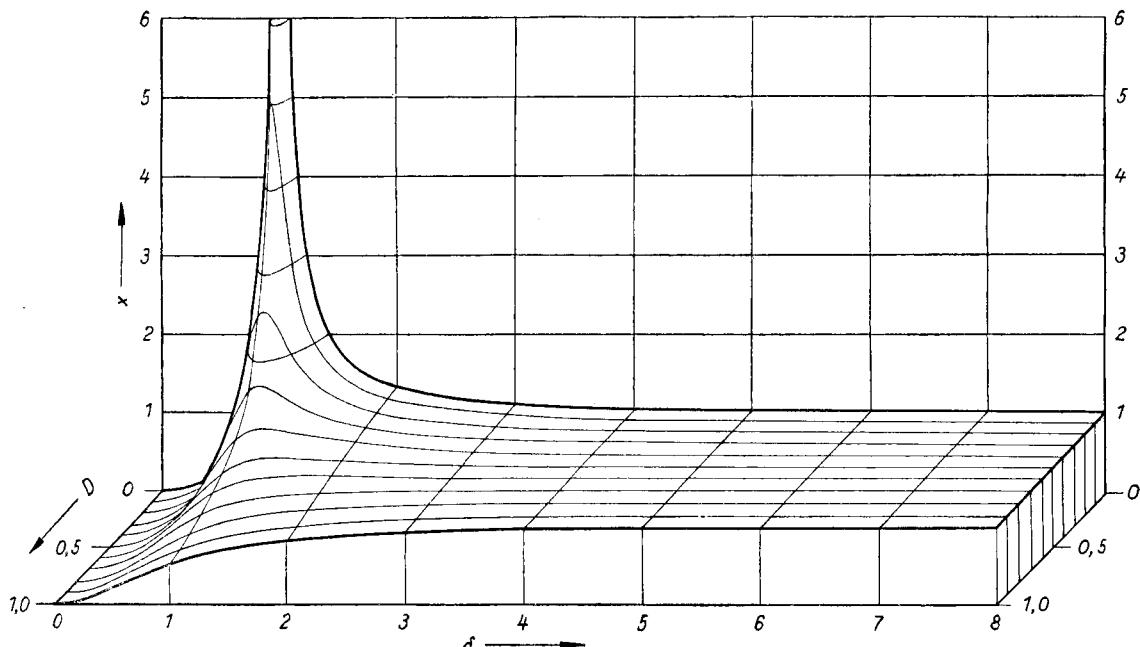


Bild 4

In den Fällen  $n = 2, 4, 6, \dots$  ergeben sich Minima der Resonanzkurven, weil dann ein Größtbetrag der bei einer Hinschwingung hereinge pumpeten Energie bei der Rückschwingung wieder abgegeben wird. Die Extrema selbst haben den Betrag:

$$x_{extr} = -\frac{2e}{1+(-1)^n e} + \frac{D\pi}{1-D^2}, \quad n=1, 2, \dots$$

Im Falle harmonischer Erregung liegt das Maximum bei

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{1 - 2/D^2}}$$

und hat den Betrag:

$$x_{max} = \frac{1}{2 D \sqrt{1 - D^2}}.$$

Zu einfachen Ausdrücken führen weiterhin die Grenzfälle  $D=0$  und  $D=1$ . Im ungedämpften Fall  $D=0$  folgt aus (8):

$$\tau_0 = \frac{\tau_p}{4}; \quad \text{aus (9): } \bar{x}_A = -\frac{1}{\cos \frac{\tau_p}{4}};$$

Die Bedingungen (6) und (7) führen jetzt zu den Werten:

$$c = \frac{1 + e^{-\frac{\tau_p}{2}}}{1 + e^{-\frac{\tau_p}{2}} \left(1 - e^{-\frac{\tau_p}{2}}\right)},$$

$$\bar{x}_A = \frac{2}{1 + e^{-\frac{\tau_p}{2}} \left(1 + e^{-\frac{\tau_p}{2}}\right)},$$

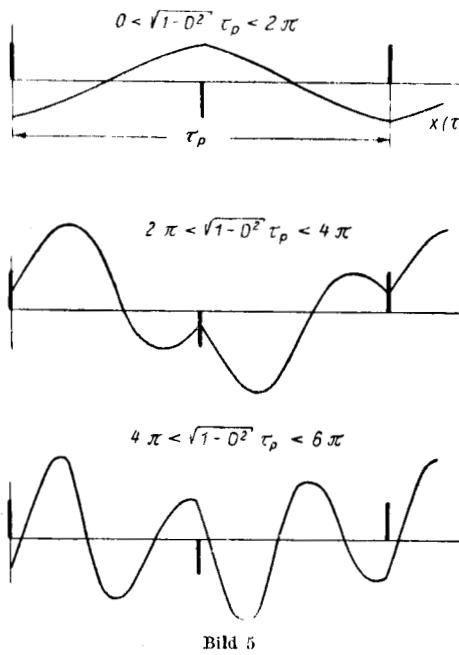
und schließlich zu:

$$x_{max} = \bar{x}_A c e^{-\frac{c-1}{c}} - 1.$$

## 2. Erregung durch periodische Stöße wechselnder Richtung

Ein auf den Schwinger wirkender Stoß verändert dessen augenblickliche Geschwindigkeit sprunghaft. Die Amplituden-Zeit-Kurve bekommt also im Augenblick des Stoßes einen Knick, bleibt aber in der Amplitude stetig. Wir nehmen an, daß die auf den Schwingern wirkenden periodischen Stöße seine jeweilige

Geschwindigkeit um den Betrag 1 verändern. Wieder erhält man durch Aneinanderheften entsprechender Teilstücke der freien Schwingung (3) die resultierende



erzwungene Grundschwingung. In Bild 5 sind drei derartige Fälle gezeichnet worden. Die Übergangsbedingungen lauten jetzt:

$$x(0) = -x\left(\frac{\tau_p}{2}\right),$$

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)_{\tau=0} + \left(\frac{dx}{d\tau}\right)_{\tau=\frac{\tau_p}{2}} = 1.$$

Durch Einsetzen von (3) folgen daraus die Integrationskonstanten  $x_A$  und  $\tau_0$ :

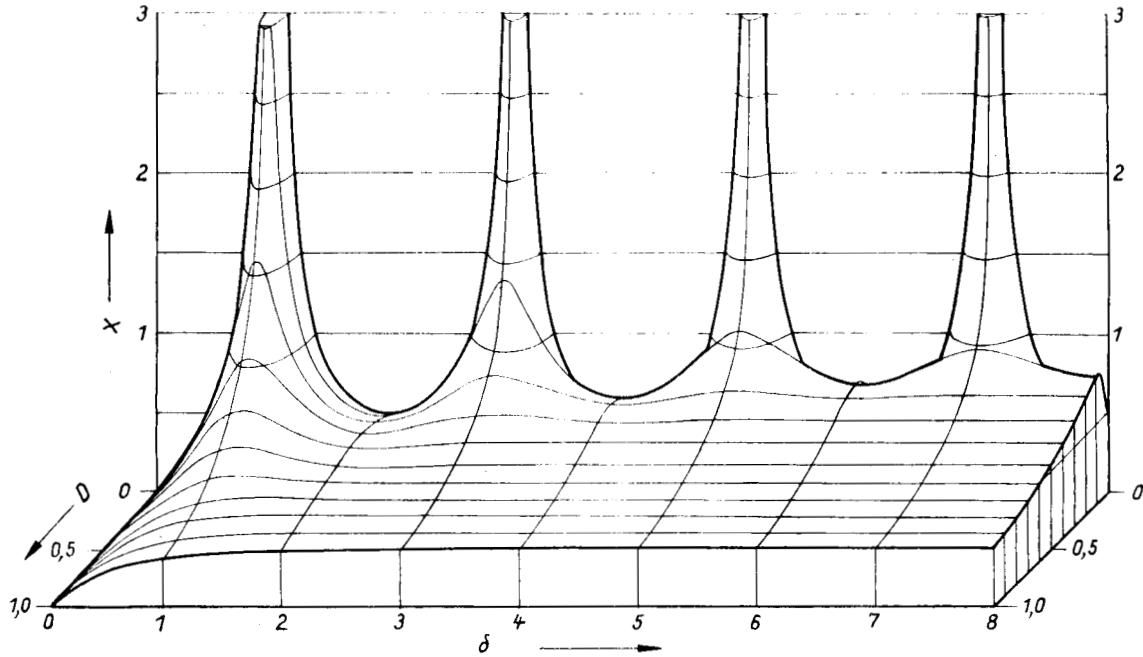


Bild 6

$$\operatorname{tg} \sqrt{1-D^2} \tau_0 = -\frac{-D \frac{\tau_p}{2} \cos \sqrt{1-D^2} \frac{\tau_p}{2}}{c \frac{-D \frac{\tau_p}{2} \sin \sqrt{1-D^2} \frac{\tau_p}{2}}{1}}$$

$$x_A := \frac{1}{\sqrt{1-D^2} \left[ \sin \sqrt{1-D^2} \tau_0 - c \frac{-D \frac{\tau_p}{2} \sin \sqrt{1-D^2} \left( \frac{\tau_p}{2} - \tau_0 \right)}{1} \right]}.$$

Das Maximum der Amplitude wird — wie im vorher behandelten Fall — aus (5) ermittelt. Für hohe Frequenzen, bei denen der Größtwert der Amplitude in den Knickstellen selbst liegt, also für

$$0 < \tau_{max} < \frac{\tau_p}{2}$$

gilt einfach:

$$x_{max} = x(0) = x_A \cos \sqrt{1-D^2} \tau_0.$$

Das Ergebnis der Auswertung zeigt Bild 6. Dabei ist der Ordinatenmaßstab gegenüber den Bildern 3 und 4 verdoppelt worden. Der bemerkenswerteste Unterschied gegenüber Bild 3 besteht darin, daß die Resonanzkurven jetzt für  $\delta = 0$  bereits mit positiver Steigung beginnen. Das Zustandekommen dieser Tatsache läßt sich sofort aus einem Vergleich der entsprechenden Schwingungsbilder Bild 2 und 5, obere Kurven, erklären.

Der Grenzfall  $D = 0$  ergibt jetzt:

$$\tau_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\tau_p}{4},$$

$$x_A = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\tau_p}{4} \quad \text{für } \delta < 1,$$

$$x_A = \frac{1}{2 \cos \frac{\tau_p}{4}} \quad \text{für } \delta > 1.$$

Im Grenzfall  $D = 1$  hat man:

$$c = -\frac{1 + e^{-\frac{\tau_p}{2}}}{\frac{\tau_p}{2} e^{-\frac{\tau_p}{2}}} ,$$

$$x_A = -\frac{\frac{\tau_p}{2} e^{-\frac{\tau_p}{2}}}{\left(1 + e^{-\frac{\tau_p}{2}}\right)^2} .$$

Das Maximum liegt bei:

$$\tau_{max} = \frac{c-1}{c}$$

und hat den Betrag:

$$x_{max} = x_A c e^{-\tau_{max}} .$$

Es wird jedoch nur im Falle  $0 < \tau_{max} < \frac{\tau_p}{2}$  wirklich erreicht. Für  $\tau_{max} > \frac{\tau_p}{2}$  gilt:

$$x_{max} := x(0) = x_A .$$

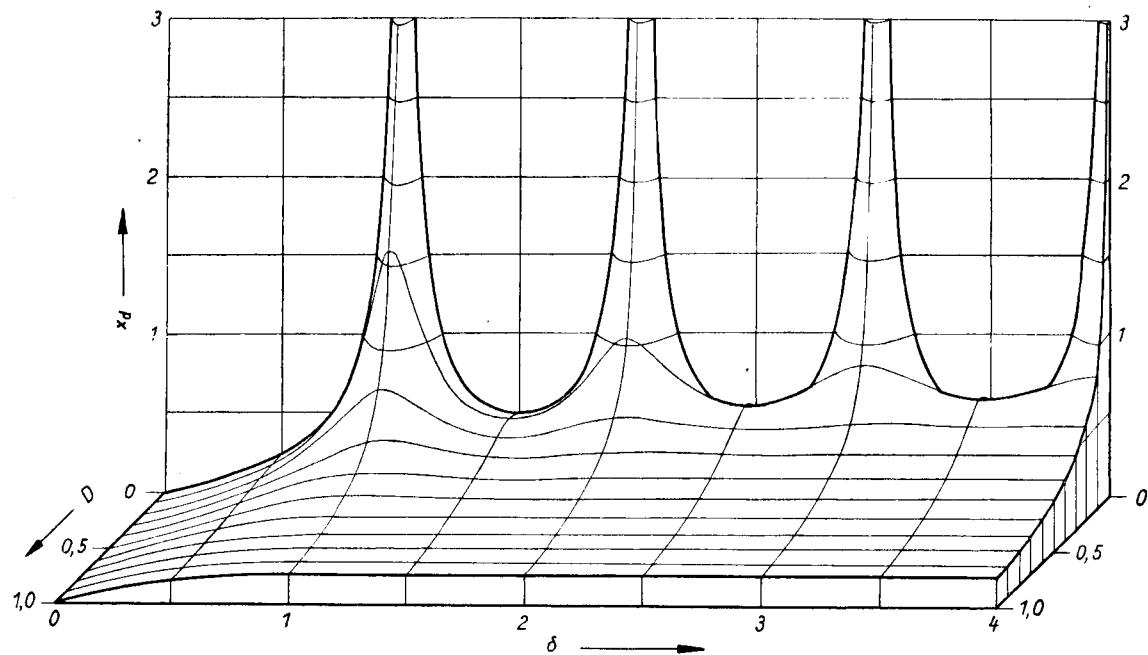


Bild 7

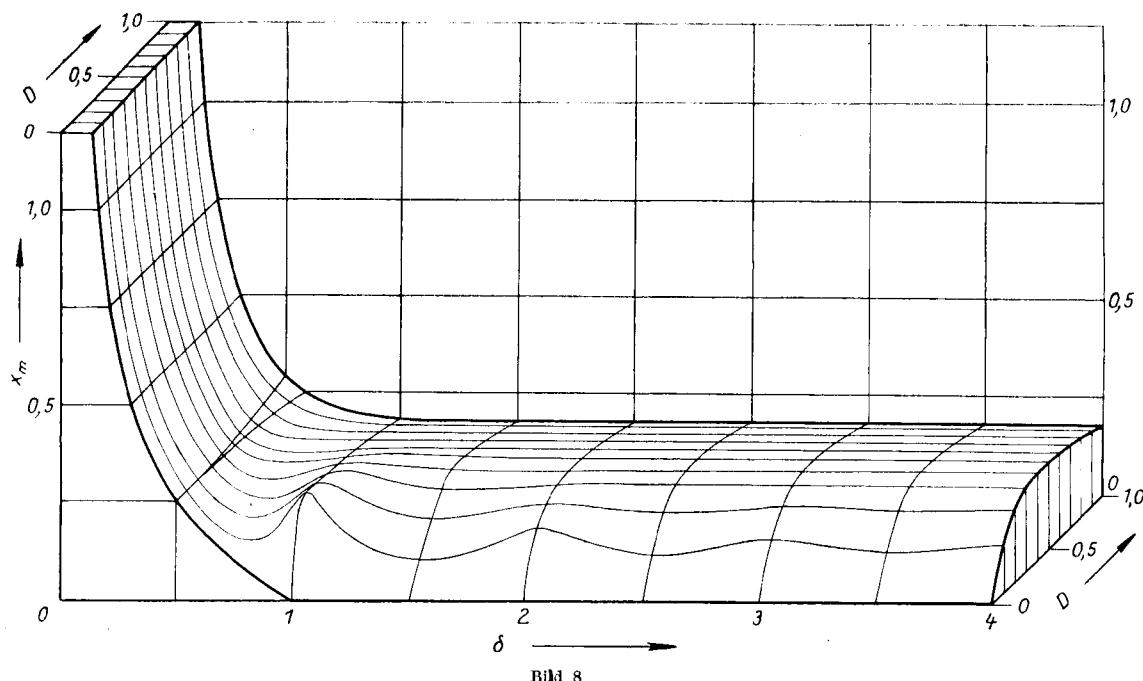


Bild 8

### 3. Erregung durch periodische Stöße in gleicher Richtung

Wirken die Stöße stets nur in einer Richtung — was in der Praxis häufiger vorkommt, als der unter 2. behandelte Fall —, so gelten die Übergangsbedingungen:

$$x(0) = x(\tau_p), \\ \left( \frac{dx}{d\tau} \right)_{\tau=0} - \left( \frac{dx}{d\tau} \right)_{(\tau=\tau_p)} = 1.$$

Daraus folgt in üblicher Weise:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \sqrt{1-D^2} \tau_0 &= \frac{1-e^{-D\tau_p}}{e^{-D\tau_p}} \cos \sqrt{1-D^2} \tau_p, \\ x_A &= \frac{1}{\sqrt{1-D^2} \left[ \sin \sqrt{1-D^2} \tau_0 + e^{-D\tau_p} \sin \sqrt{1-D^2} (\tau - \tau_0) \right]}. \end{aligned}$$

Die Schwingung ist jetzt unsymmetrisch zur Gleichgewichtslage  $x=0$ . Sie besitzt eine mittlere Abweichung  $x_m$  von dieser und eine halbe Amplitude  $x_d$  gegenüber der um  $x_m$  verschobenen Mittellage. Es wird gesetzt:

$$\left. \begin{aligned} x_m &= \frac{1}{2} (x_{max1} + x_{max2}), \\ x_d &= \frac{1}{2} (x_{max1} - x_{max2}), \end{aligned} \right\} \dots \quad (10),$$

wobei die  $x_{max}$  wieder aus (5) folgen. Jedoch muß in (10) an Stelle  $x_{max2}$  stets  $x(0)$  eingesetzt werden, falls

$$|x_{max2} - x_m| < |x(0) - x_m|.$$

Die Auswertung zeigt Bild 7 für  $x_d$ , Bild 8 für  $x_m$ . Dabei ist gegenüber den bisherigen Bildern der Abszissenmaßstab verdoppelt worden. Während das Resonanzgebirge früher bei jedem ungeraden ganzzahligen Wert von  $\delta$  ein Maximum zeigte, tritt jetzt bei jedem ganzzahligen  $\delta$  ein Maximum auf. Diese Tatsache läßt sich physikalisch durch den Fortfall der Bremswirkung des Gegenstoßes im Falle 2 leicht erklären.

In Bild 8 ist die  $D$ -Achse nach hinten positiv gezeichnet worden, um das Gebirge übersichtlicher zu machen.

Wieder ergeben die Grenzfälle einfache Lösungen.  $D=0$  gibt:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{\tau_p}{2}, \\ x_A &= \frac{1}{2 \sin \frac{\tau_p}{2}}, \\ \left. \begin{aligned} x_m &= 0 \\ x_d &= \frac{1}{2 \sin \frac{\tau_p}{2}} \end{aligned} \right\} &\text{für } \tau_{max2} < \tau_p; \\ \left. \begin{aligned} x_m &= \frac{1}{4} \cotg \frac{\tau_p}{4} \\ x_d &= \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{\tau_p}{4} \end{aligned} \right\} &\text{für } \tau_{max2} > \tau_p. \end{aligned}$$

$D=1$  gibt:

$$\begin{aligned} c &= \frac{e^{\tau_p} - 1}{\tau_p}, \\ x_A &= \frac{1}{c(1 - e^{-\tau_p})}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{1}{2} x_A \left( c e^{-\frac{c-1}{c}} + 1 \right), \\ x_d &= \frac{1}{2} x_A \left( c e^{-\frac{c-1}{c}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Ostaschkow, UdSSR.

K. Magnus.

### Knickung elliptischer Ringe.

#### 1. Fragestellung

Im Zusammenhang mit Fragen der Tragfähigkeit von Streckenausbauten im Bergbau interessiert die Kenntnis der kleinsten Knicklast eines elliptischen Ringes unter einer speziellen Außenbelastung. Man benutzt in der Praxis nämlich neuerdings elliptisch geformte, geschlossene Streckenbögen und versucht, das Achsenverhältnis der Ringe so zu dimensionieren, daß der Außendruck des Gebirges im unverformten Ring keine Biegespannungen hervorruft. Nimmt man an, daß dieser Idealfall tatsächlich verwirklicht ist, so ist damit, wie sogleich gezeigt wird, eine spezielle Belastung  $Z = -\frac{S}{R_0(\vartheta)}$  vorgegeben. Hierin bedeutet  $Z$  die in Richtung der Ringnormalen wirkende Last je Längeneinheit des Umfangs,  $S$  die konstante Normalkraft ( $S < 0$ ,  $Z > 0$ , für Druck) im Ring und  $R_0(\vartheta)$  den Krümmungsradius der unverformten Ellipse, abhängig von dem Winkel  $\vartheta$  der Normalen gegen eine feste Richtung (vgl. Bild 1). Die Berechnung der kri-

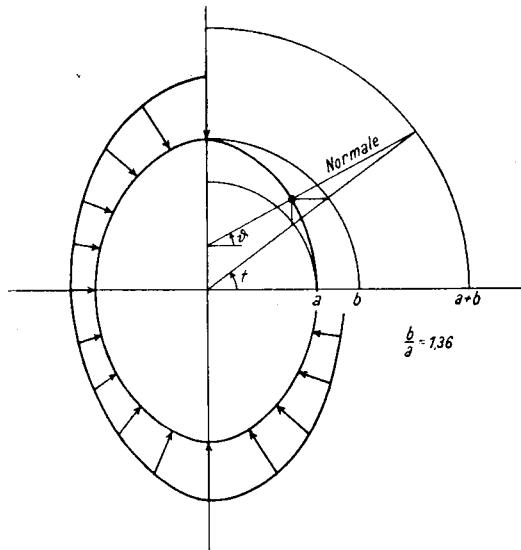


Bild 1

tischen Außenlast  $Z_k$  läßt sich nach A. Lockschin [1] auf die Berechnung der kritischen Normalkraft  $S_k$  als Eigenwert eines Eigenwertproblems mit gewissen Besonderheiten zurückführen.

#### 2. Herleitung der Beulgleichung

In den Gleichgewichtsbedingungen für ein ebenes Element des gekrümmten Stabes mit fehlender Tangentialbelastung (vgl. z. B. [2]):

$$S' + Q = 0, \quad Q' - S - ZR = 0, \quad M' - QR = 0 \dots (1)$$

werden außer der Querbelastung  $Z$  und dem Krümmungsradius  $R$  des verformten Stabes auch die Normalkraft  $S$ , die Querkraft  $Q$  und das Biegemoment  $M$  als Funktionen von  $\vartheta$  betrachtet und die Differenziationen nach  $\vartheta$  werden durch einen Akzent bezeichnet. Zunächst verlangen die Gleichungen (1) für