

# Beiträge zur Dynamik des kräftefreien, kardanisch gelagerten Kreisels

Von K. Magnus in Freiburg/Br.

*Die Trägheitsmomente der Aufhängung beeinflussen die Nutationsbewegungen kardanisch gelagerter Kreisel. Bei symmetrischen Kreiselrotor führen sie — wie bereits bekannt — auch bei vollkommen reibungsloser Lagerung zu einer Auswanderung der mittleren Achsrichtung unter dem Einfluß der Nutationsbewegungen; bei unsymmetrischen Kreisel beeinflussen sie die Stabilitätsbedingungen. Beide Effekte werden in der vorliegenden Arbeit in Abhängigkeit von der Schräglage des inneren Kardanringes untersucht.*

*The moments of inertia of the suspension influence the movements of nutation of gyroscopes with cardan bearing. At a symmetrical gyro rotor they lead — as is already known — even at a bearing without any friction to a deviation from the middle direction of the axis under the influence of the movements of nutation; at an unsymmetrical gyroscope they influence the conditions of stability. In the present article both effects are examined in dependence on the oblique position of the inner cardan ring.*

*Les moments de l'inertie de la suspension influencent les mouvements de nutation de toupies couchées à la Cardan. Arotor de toupie symétrique ils conduisent, comme on sait déjà, lors même que les toupies sont couchées sans aucune friction, à une diversion de la direction moyenne de l'axe sous l'influence des mouvements de nutation; à toupie asymétrique ils influencent les conditions de stabilité. Dans l'article présent les deux effets sont examinés en dépendance de la position oblique de l'anneau intérieur de Cardan.*

Моменты инерции подвески влияют на нутационные движения гироскопов на карданной опоре. В случае симметричного ротора гироскопа они, как известно, вызывают — даже при совершенно свободной от трения опоре — к смещению среднего направления оси под влиянием нутационных движений, а в случае несимметричного гироскопа они влияют на условия устойчивости. В настоящей работе оба эффекта исследуются в зависимости от наклонного положения карданного кольца.

## 1. Aufgabenstellung

Bei Kreiselmodellen findet sich neben der sehr geeigneten Spitzenlagerung (zum Beispiel bei den Modellen von Maxwell, von Klein und von Bobylew) schon frühzeitig die kardanische Aufhängung (zum Beispiel bei den Geräten von Bohnenberger und Schuller). Die vielseitige Verwendbarkeit der Kardanlagerung hat zu einer immer häufigeren Anwendung bei Unterrichtsmodellen und Kreiselgeräten geführt. Sie beeinflusst jedoch das Verhalten des Kreisels in doppelter Hinsicht: einerseits tritt wegen der besonderen kinematischen Bewegungsverhältnisse des Kardansystems der häufig behandelte sogenannte „kardanische Fehler“ auf, andererseits ergeben sich auch dynamische Einflüsse wegen der nicht immer zu vernachlässigenden Massen der zur Aufhängung verwendeten Kardanringe. Nachdem bereits Grammel auf diese Einflüsse aufmerksam gemacht hat, dürften die ersten ausführlicheren Untersuchungen auf Nikolai zurückgehen. Wesentlich weitergeführt wurde das Problem später durch Seebach und Seyfahrt und, auf diesen aufbauend, durch Stellmacher. Die Berechnung des kardanisch gelagerten, symmetrischen Kreisels gelang mit elliptischen Integralen, deren Auswertung zahlenmäßig durchgeführt wurde. Darüberhinaus gelang es Seebach eine Näherungsformel für die Auswanderung der Impulsachse eines kräftefreien Kreisels unter dem Einfluß der Nutationen für den Fall kleiner Schräglagen des inneren Kardanringes abzuleiten. Die Untersuchungen von Seyfahrt und Stellmacher befassen sich insbesondere mit dem Verhalten des Kreisels in der Umgebung der sogenannten „Cinch-Stellung“, die dann auftritt, wenn der innere Kardanring um  $90^\circ$  gedreht wird. Über den unsymmetrischen, kardanisch gelagerten Kreisel sind bisher nur Untersuchungen von Fuchs bekannt geworden, die den Einfluß einer Raumpfesselung auf den Kreisel behandeln, sowie Arbeiten von Weigand über den elastisch gelagerten Motor mit zweiflügeliger Luftschraube.

Die vorliegende Arbeit soll die bereits vorhandenen Berechnungen zum symmetrischen, kardanisch gelagerten Kreisel durch Ableitung einer Formel ergänzen, bei der lediglich die Amplitude der Nutationsschwingung als klein vorausgesetzt wird, nicht aber der Schräglagenwinkel des inneren Kardanrahmens. Weiterhin soll auch der unsymmetrische, kardanisch gelagerte Kreisel untersucht werden, mit dem Ziel, den an geeigneten Kreiselmodellen leicht zu beobachtenden Effekt der Instabilität des unsymmetrischen, kardanisch gelagerten Kreisels in bestimmten Schräglagenbereichen des inneren Kardanringes quantitativ zu erfassen.

## 2. Koordinatensysteme und Ausgangsgleichungen

Ein kardanisch gelagerter Kreisel (Bild 1)<sup>1)</sup>, besteht aus einem Drei-Körper-System, bei dem der Rotor (gekennzeichnet durch den Index  $R$ ) im inneren Kardanring (gekennzeichnet

<sup>1)</sup> Die Skizze von Bild 1 entspricht einem von den Physikalischen Werkstätten, Göttingen, hergestellten Lehrmodell, mit dem die am Schluß der Arbeit genannten Messungen durchgeführt wurden und für das die zahlenmäßigen Auswertungen der Bilder 3, 4 und 6 gelten.

durch den Index  $J$ ) gelagert ist. Dieser wiederum ist mit dem raumfest gelagerten äußeren Kardanring (gekennzeichnet durch den Index  $A$ ) verbunden. Zur Berechnung dieses Systems können zwei Wege eingeschlagen werden: entweder geht man vom Energiesatz aus und gelangt dann über die Lagrange'schen Gleichungen zu den gesuchten Bewegungsgleichungen oder aber man setzt die Euler-Gleichungen für die Bewegung eines starren Körpers für jeden der drei Einzelkörper an und kombiniert diese vermittels der zwischen den entsprechenden körperfesten Systemen geltenden Transformationsformeln. An dieser Stelle soll das zweite Verfahren gewählt werden, da es gewisse Vorteile bei der Behandlung des unsymmetrischen Kreisels besitzt. Für die vorliegende Rechnung werden außer einem Inertialsystem  $\Sigma$  drei körperfeste Systeme  $\Sigma_A \Sigma_J \Sigma_R$  ver-

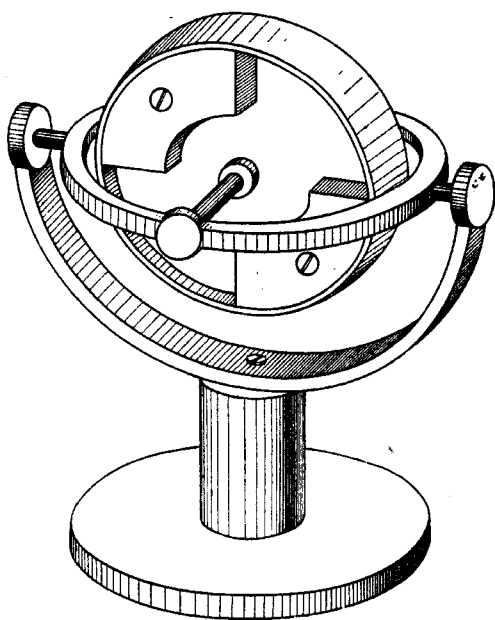


Bild 1

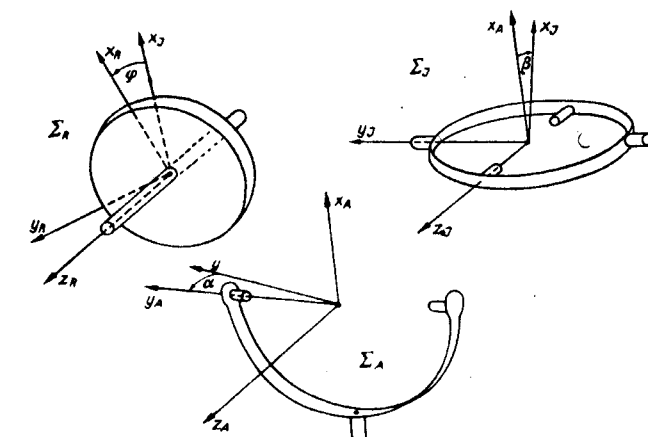


Bild 2

wendet (siehe Bild 2). In der Grundstellung sollen die entsprechenden Achsen aller Systeme zusammenfallen. Abweichungen von dieser Grundstellung werden durch die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\varphi$  beschrieben. Da jedes der Systeme gegenüber dem vorhergehenden nur Drehungen um körperfeste Achsen ausführen kann, so werden Transformationen von einem System in das andere durch die folgenden Matrizen beschrieben:

Transformation von  $\Sigma$  nach  $\Sigma_A$ :

$$\mathfrak{I}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \dots \dots \dots (1).$$

Transformation von  $\Sigma_A$  nach  $\Sigma_J$ :

$$\mathfrak{I}_2 = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \dots \dots \dots (2).$$

Transformation von  $\Sigma_J$  nach  $\Sigma_R$ :

$$\mathfrak{I}_3 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (3).$$

Die Trägheitsmomente der Einzelkörper werden in unmittelbar verständlicher Weise wie folgt bezeichnet:

- für den Rotor:  $\Theta_{xR} \ \Theta_{yR} \ \Theta_{zR}$
- für den Innenring:  $\Theta_{xJ} \ \Theta_{yJ} \ \Theta_{zJ}$
- für den Außenring:  $\Theta_{xA} \ \Theta_{yA} \ \Theta_{zA}$ .

Es wird bei der vorliegenden Rechnung angenommen, daß alle diese Trägheitsmomente Hauptträgheitsmomente darstellen, so daß die Deviationsmomente bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen herausfallen. Die nach körperfesten Koordinatenachsen genommenen Komponenten der Absolutdrehung der einzelnen Körper werden mit

$$u_{xR}, u_{yR}, u_{zR}; \quad u_{xJ}, u_{yJ}, u_{zJ}; \quad u_{xA}, u_{yA}, u_{zA}$$

bezeichnet. Dann folgen die Bewegungsgleichungen aus der Komponentenzerlegung der Euler-Gleichung:

$$\dot{\mathfrak{S}} + [\mathfrak{u} \mathfrak{S}] = \mathfrak{M} \dots \dots \dots (4)$$

Dabei ist  $\mathfrak{S}$  der Impulsvektor, dessen zeitliche Änderung im körperfesten System zu nehmen ist, Aus (4) folgt:

für den Rotor:

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{xR} \dot{u}_{xR} - (\Theta_{yR} - \Theta_{zR}) u_{yR} u_{zR} &= M_{xR}, \\ \Theta_{yR} \dot{u}_{yR} - (\Theta_{zR} - \Theta_{xR}) u_{zR} u_{xR} &= M_{yR}, \\ \Theta_{zR} \dot{u}_{zR} - (\Theta_{xR} - \Theta_{yR}) u_{xR} u_{yR} &= M_{zR} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

für den Innenring:

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{xJ} \dot{u}_{xJ} - (\Theta_{yJ} - \Theta_{zJ}) u_{yJ} u_{zJ} &= M_{xJ}, \\ \Theta_{yJ} \dot{u}_{yJ} - (\Theta_{zJ} - \Theta_{xJ}) u_{zJ} u_{xJ} &= M_{yJ}, \\ \Theta_{zJ} \dot{u}_{zJ} - (\Theta_{xJ} - \Theta_{yJ}) u_{xJ} u_{yJ} &= M_{zJ} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

für den Außenring:

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{xA} \dot{u}_{xA} &= M_{xA}, \\ 0 &= M_{yA}, \\ 0 &= M_{zA} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Da an dieser Stelle lediglich der „kräftefreie“ (besser: momentenfreie) Kreisel untersucht werden soll, so sind als Momente nur die inneren Momente einzusetzen, die zwischen den Körpern auftreten. Zwischen diesen und den entsprechenden Reaktionsmomenten im Nachbarkörper bestehen die Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} M_{xR} &= M'_{xJ} \cos \varphi + M'_{yJ} \sin \varphi, \\ M_{yR} &= -M'_{xJ} \sin \varphi + M'_{yJ} \cos \varphi, \\ M_{zR} &= -M'_{zJ} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{xJ} &= -M'_{xJ} + M'_{xA} \cos \beta - M'_{zA} \sin \beta, \\ M_{yJ} &= -M'_{yJ}, \\ M_{zJ} &= M'_{xA} \sin \beta + M'_{zA} \cos \beta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{xA} &= -M'_{xA} \\ M_{yA} &= 0 \\ M_{zA} &= -M'_{zA} + M_z = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

Dabei sind  $M'_{xJ}$ ,  $M'_{yJ}$  und  $M'_{zJ}$  die Komponenten des vom Rotor auf den Innenring übertragenen Moments, genommen im System  $\Sigma_J$ .  $M'_{xA}$  und  $M'_{zA}$  sind die Komponenten des vom Innenring auf den Außenring übertragenen Momentes genommen im System  $\Sigma_A$ .  $M_z$  ist das vom Gehäuse über das äußere Kardanlager auf den Außenring übertragene Moment genommen in  $\Sigma_A$ .

### 3. Der symmetrische Kreisel

#### a. Die Bewegungsgleichungen und ihre Lösung

Der kardanisch gelagerte Kreisel besitzt drei Freiheitsgrade. Es genügen also drei Koordinaten, seine Bewegungen eindeutig zu beschreiben. Als diese Koordinaten werden die bereits zuvor genannten Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\varphi$  gewählt, die am System unmittelbar zu sehen sind und leicht gemessen werden können. Sie hängen mit den in den Gln. (5), (6) und (7) vorkommenden Drehungskomponenten wie folgt zusammen:

$$\dot{\alpha} = u_{xA}; \quad \beta = u_{yJ}; \quad \dot{\varphi} = u_{zR} - u_{zJ} \dots \dots \dots (11)$$

Bei der Bestimmung des Winkels  $\varphi$  hat man zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem, ob der Rotor einen Antrieb besitzt oder nicht. Ist kein Antrieb vorhanden, also in der dritten Gl. (5)  $M_{zR} = 0$ , so bekommt man für den symmetrischen Kreisel wegen  $\Theta_{xR} = \Theta_{yR} = \Theta_R$  sofort  $\dot{u}_{zR} = 0$  und damit unter Berücksichtigung der Transformation (2):

$$u_{zR} = \dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta = \text{const} = \omega \dots \dots \dots (12)$$

Im anderen Grenzfall, bei dem der Rotor durch einen Antrieb relativ zum Innenring auf konstanter Drehzahl gehalten wird, hat man  $\dot{\varphi} = \text{const}$  zu setzen. Damit das möglich wird, muß  $M_{zR}$  so dimensioniert werden, daß  $\dot{\varphi} = \text{const}$  herauskommt. Ohne die Rechnung im einzelnen durchzuführen, sieht man jedoch sofort ein, daß die Ergebnisse ganz analog denen im Falle eines

Kreisels ohne Antrieb sind, nur hat man anstelle des Trägheitsmomentes  $\Theta_{zJ}$  stets den Wert  $\Theta_{zJ} + \Theta_{zR}$  einzusetzen. Das Reaktionsmoment des zum Antrieb notwendigen Momentes wirkt sich so auf den Innenring aus, als ob dessen Trägheitsmoment um die z-Achse um den Betrag  $\Theta_{zR}$  vergrößert wäre. Für die in der vorliegenden Arbeit zu betrachtenden schnellen Nutations-schwingungen kann unbedenklich der Fall eines Kreisels ohne Antrieb ( $M_{zR} = 0$ ) angenommen werden. Selbst wenn der Kiesel einen Antrieb besäße, so wirkte sich dieser in der kurzen Zeit einer Nutations-schwingung praktisch nicht aus. Es wird also weiterhin mit der für den nicht angetriebenen Kiesel geltenden Beziehung (12) gerechnet.

Bei der weiteren Durchführung der Rechnung werden nun in den Gln. (5), (6) und (7) mit Hilfe von (11) und (12) unter Berücksichtigung von (1) und (2) die Drehungskomponenten  $u$  durch  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$  und  $\omega$  ersetzt. Nach Elimination der nicht weiter interessierenden Lagermomente  $M$  erhält man so die beiden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} [\Theta_x \cos^2 \beta + (\Theta_{xA} + \Theta_{zJ}) \sin^2 \beta] + \dot{\beta} \cdot J \cos \beta - \dot{\alpha} \dot{\beta} \cdot 2 \sin \beta \cos \beta D = 0, \\ \ddot{\beta} \Theta_y - \dot{\alpha} J \cos \beta + \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta D = 0 \end{aligned} \right\} \dots (13).$$

Darin ist zur Abkürzung gesetzt worden:

$\Theta_x = \Theta_R + \Theta_{xJ} + \Theta_{xA} =$  Trägheitsmoment des Gesamtsystems um die x-Achse (äußere Kardanachse) im Fall  $\beta = 0$ ,

$\Theta_y = \Theta_R + \Theta_{yJ} =$  Trägheitsmoment des Gesamtsystems um die y-Achse (innere Kardanachse),

$D = \Theta_R + \Theta_{xJ} - \Theta_{zJ}$ ,

$J = \Theta_R \omega =$  Impulskomponente des Kieselrotors um die Laufachse.

Das System (13) geht im Falle  $\beta = 0$ , bei dem die Ebene des Innenringes senkrecht auf der Ebene des Außenringes steht, in die bekannte linearisierte Form der Kieselgleichungen über:

$$\Theta_x \ddot{\alpha} + J \dot{\beta} = 0, \quad \Theta_y \ddot{\beta} - J \dot{\alpha} = 0 \dots \dots \dots (14).$$

Im Grenzfalle  $\beta = 90^\circ$ , bei dem die Ebenen beider Kardanringe zusammenfallen (sogenannte „Clinch-Stellung“) bleiben von (13) die auch unmittelbar abzuleitenden Gleichungen:

$$(\Theta_{xA} + \Theta_{zJ}) \ddot{\alpha} = 0, \quad \Theta_y \ddot{\beta} = 0.$$

Die strenge Lösung des Systems (13), die im wesentlichen bereits bei Seebach und Seyfahrt zu finden ist, soll hier nur kurz angedeutet werden. Der Rechnungsgang ist analog dem in den klassischen Fällen des schweren symmetrischen Kreisels oder des sphärischen Pendels üblichen Verfahren. Die erste der Gln. (13) läßt sich integrieren und ergibt mit einer Integrationskonstanten C:

$$\dot{\alpha} [\Theta_x \cos^2 \beta + (\Theta_{xA} + \Theta_{zJ}) \sin^2 \beta] + J \sin \beta = C \dots \dots \dots (15).$$

Beginnt man die Zeitzählung an einer Stelle, an der  $\dot{\alpha} = 0$  und  $\beta = \beta_0$  wird, so gilt  $C = J \sin \beta_0$ . Somit folgt für  $\dot{\alpha}$ :

$$\dot{\alpha} = \frac{J (\sin \beta_0 - \sin \beta)}{\Theta_x \cos^2 \beta + (\Theta_{xA} + \Theta_{zJ}) \sin^2 \beta} \dots \dots \dots (15a).$$

Setzt man diesen Wert in die zweite der Gln. (13) ein, so folgt:

$$\ddot{\beta} = f(\beta) = \frac{J^2 \cos \beta (\sin \beta_0 - \sin \beta)}{\Theta_y [\Theta_x \cos^2 \beta + (\Theta_{xA} + \Theta_{zJ}) \sin^2 \beta]} \left[ 1 - \frac{D \sin \beta (\sin \beta_0 - \sin \beta)}{\Theta_x \cos^2 \beta + (\Theta_{xA} + \Theta_{zJ}) \sin^2 \beta} \right].$$

Diese Gleichung läßt sich in bekannter Weise durch eine Substitution  $\dot{\beta} = x$  lösen. Man hat dann:

$$\dot{\beta} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\beta} \frac{d\beta}{dt} = x \frac{dx}{d\beta} = f(\beta)$$

und bekommt daraus durch einmalige Integration das Energieintegral:

$$\frac{x^2}{2} = \int f(\beta) d\beta + C = F(\beta) + C.$$

Die Energiekonstante C kann dabei durch geeignete Wahl des Energienullpunktes zu Null gemacht werden. Dann folgt:

$$x = \frac{d\beta}{dt} = \sqrt{2 F(\beta)},$$

und daraus :

$$t = \int \frac{d\beta}{\sqrt{2F(\beta)}} .$$

Dieses Integral läßt sich auf elliptische Grundformen zurückführen. Die Umkehrfunktion ergibt  $\beta = \beta(t)$ .  $\alpha$  wird dann aus (15a) durch nochmalige Integration gewonnen.

b. Azimutale Auswanderungen des Kreisels unter dem Einfluß von Nutationsschwingungen

Der an Kreiselmodellen leicht zu beobachtende Effekt der azimutalen Auswanderung beim Vorhandensein von Nutationen, der analytisch z. B. dem Effekt der Drehung der Ebene eines sphärischen Pendels entspricht, kann natürlich durch Auswertung der strengen Lösung zahlenmäßig errechnet werden. Für das Erkennen des Einflusses der verschiedenen Größen sind jedoch Näherungsverfahren vorteilhafter, da sie unter geeigneten Voraussetzungen zu expliziten Formeln führen können. Eine derartige Näherungsrechnung soll hier unter der Voraussetzung durchgeführt werden, daß die Nutationsamplitude klein bleibt. Die Schräglage des inneren Kardanringes soll dagegen keinen Beschränkungen unterworfen werden. Es wird also gesetzt  $\beta = \beta_0 + \beta'$  und dann  $\sin \beta' \approx \beta'$  und  $\cos \beta' \approx 1$  angenommen. Alle in  $\beta'$  quadratischen und höheren Glieder werden vernachlässigt. Dagegen können die Geschwindigkeiten  $\dot{\alpha}$  und  $\dot{\beta}$  nicht als klein vorausgesetzt werden. Es zeigt sich vielmehr, daß gerade die in den Geschwindigkeiten quadratischen Glieder für die Auswanderung verantwortlich zu machen sind. Die Beschränkung auf kleine Nutationsamplituden ist um so mehr gerechtfertigt, je schneller der Kreisel umläuft. Lediglich im Falle des extrem langsam laufenden, taumelnden Kreisels kann sie unzulässig werden.

Unter der angegebenen Voraussetzung folgt nunmehr aus (13) das Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\alpha} \Theta_a - \dot{\alpha} \dot{\beta}' D \sin 2\beta_0 + \dot{\beta}' J \cos \beta_0 - \beta' [\ddot{\alpha} D \sin 2\beta_0 + \dot{\beta}' J \sin \beta_0 + \dot{\alpha} \dot{\beta}' 2 D \cos 2\beta_0] &= 0 \\ \ddot{\beta}' \Theta_y + \dot{\alpha}^2 \frac{D}{2} \sin 2\beta_0 - \dot{\alpha} J \cos \beta_0 + \beta' [\dot{\alpha}^2 D \cos 2\beta_0 + \dot{\alpha} J \sin \beta_0] &= 0 \end{aligned} \right\} (16).$$

Darin ist zur Abkürzung gesetzt:

$$\Theta_a = \Theta_x \cos^2 \beta_0 + (\Theta_{xx} + \Theta_{zJ}) \sin^2 \beta_0 .$$

Das System (16) soll nun — wie dies bei ähnlichen nichtlinearen Problemen häufig geschieht — durch Iteration gelöst werden. Im ersten Schritt, bei dem nur die in  $\alpha$  und  $\beta'$  und deren zeitlichen Ableitungen linearen Glieder mitgenommen werden, hat man die harmonische Lösung:

$$\alpha = \Delta\alpha \sin nt, \quad \beta' = \Delta\beta \cos nt \dots \dots \dots (17)$$

mit

$$n = \frac{J \cos \beta_0}{\sqrt{\Theta_a \Theta_y}} = \text{Nutationsfrequenz} ,$$

$$\left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta\beta} \right| = \sqrt{\frac{\Theta_y}{\Theta_a}} = \text{Amplitudenverhältnis} .$$

Die Ausdrücke für Nutationsfrequenz und Amplitudenverhältnis gehen für den Fall  $\beta = 0$  in die bekannten Werte über, die aus den linearisierten Kreiselgleichungen erhalten werden.

Im zweiten Schritt wird die erste Näherungslösung (17) in die zuvor vernachlässigten nichtlinearen Glieder eingesetzt, so daß ein System von zwei inhomogenen, aber linearen Differentialgleichungen entsteht. Die in den nichtlinearen Gliedern vorkommenden Produkte der Veränderlichen können nach Einsetzen der Lösung (17) wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} \dot{\beta}' &= -\frac{1}{2} n^2 \Delta\alpha \Delta\beta \sin 2nt , \\ \beta' \ddot{\alpha} &= -\frac{1}{2} n^2 \Delta\alpha \Delta\beta \sin 2nt , \\ \beta' \dot{\beta}' &= -\frac{1}{2} n (\Delta\beta)^2 \sin 2nt , \\ \dot{\alpha} \dot{\beta}' \beta' &= -\frac{1}{4} n^2 \Delta\alpha (\Delta\beta)^2 (\sin nt + \sin 3nt) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}^2 &= \frac{1}{2} n^2 (\Delta\alpha)^2 (1 + \cos 2 n t) , \\ \dot{\alpha} \beta' &= \frac{1}{2} n \Delta\alpha \Delta\beta (1 + \cos 2 n t) , \\ \dot{\alpha}^2 \beta' &= \frac{1}{4} n^2 (\Delta\alpha)^2 \Delta\beta (\cos 3 n t + 3 \cos n t) . \end{aligned}$$

Die zweite Näherung ergibt damit periodische Schwingungen mit den Frequenzen  $n, 2 n, 3 n$  und außerdem wegen der konstanten Glieder eine Gleichgewichtslagenverschiebung in  $\dot{\alpha}$ , die die gesuchte azimutale Abwanderung des Kreisels darstellt. Wir beschränken uns weiterhin darauf, diese Glieder allein zu untersuchen. Nach Einsetzen und Umformen bekommt man als konstantes Glied auf der rechten Seite der zweiten der Gleichungen (16):

$$\frac{(\Delta\alpha)^2 J^2 \sin \beta_0 \cos \beta_0 (\Theta_{xA} + \Theta_{zJ})}{2 \Theta_x \Theta_y}$$

In zweiter Näherung gibt somit (16) neben den nun nicht weiter betrachteten Schwingungen eine konstante Auswanderungsgeschwindigkeit des Systems um die äußere Kardanachse von der Größe:

$$\dot{\alpha} = \frac{(\Delta\alpha)^2 J \sin \beta_0 (\Theta_{xA} + \Theta_{zJ})}{2 \Theta_y [\Theta_x \cos^2 \beta_0 + (\Theta_{xA} + \Theta_{zJ}) \sin^2 \beta_0]} \dots \dots \dots (19).$$

Dabei ist für  $\Theta_x$  wieder der frühere Wert eingesetzt worden. In Bild 3 ist das Ergebnis der Auswertung dieser Formel aufgetragen worden. Es ist dabei eine Kreiselumlauffrequenz von

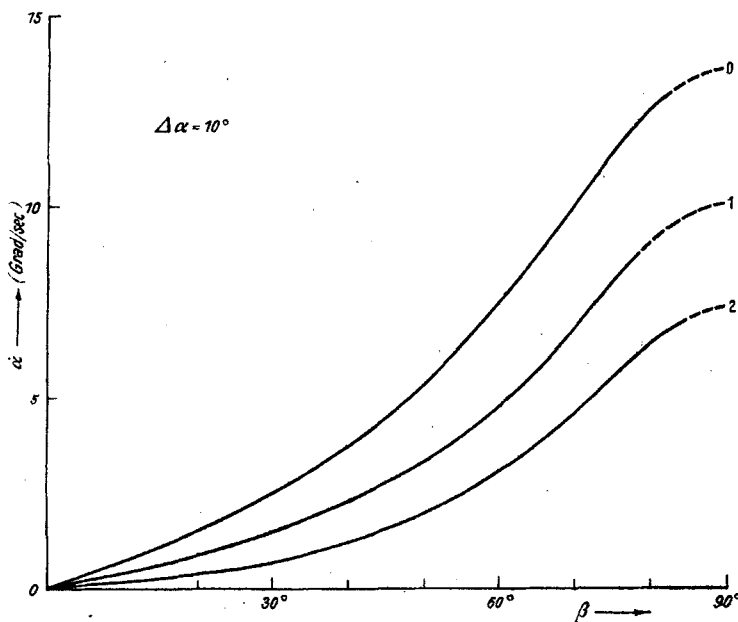


Bild 3

$\omega = 31,4/\text{sec}$ , entsprechend 5 Umdrehungen in der Sekunde, sowie eine Nutationsamplitude von  $\Delta\alpha = 10^\circ$  angenommen worden. Die mit 0 bezeichnete Kurve entspricht dem Normalzustand des anfangs erwähnten Lehrmodelles. Die Kurven 1 und 2 gelten für das gleiche Modell, jedoch mit Trägheitsmomenten, die durch Anbringen von Zusatzmassen am inneren Kardanring vergrößert wurden.

Bezieht man die Nutationsamplitude nicht auf den Winkel  $\alpha$ , sondern auf den Winkel  $\beta$ , so folgt aus (16) und (19):

$$\dot{\alpha} = \frac{(\Delta\beta)^2 J \sin \beta_0 (\Theta_{xA} + \Theta_{zJ})}{2 [\Theta_x \cos^2 \beta_0 + (\Theta_{xA} + \Theta_{zJ}) \sin^2 \beta_0]^2} \dots \dots \dots (20).$$

Diese Formel ist in Bild 4 für den Fall  $\omega = 31,4/\text{sec}$  und  $\Delta\beta = 10^\circ$  aufgetragen worden. Für den Fall kleiner Winkel  $\beta$  geht (20) in die von S e e b a c h auf anderem Wege abgeleitete Nähe-

rungsformel über. Wenn auch die Auswertung der Formeln (19) und (20) für den langsam laufenden Kreisel durchgeführt wurde, so zeigt doch der Faktor  $J$  im Zähler, daß die Auswanderung auch für den schnellaufenden Kreisel von Bedeutung sein kann, und zwar stets dann, wenn merkliche Nutationsschwingungen auftreten.

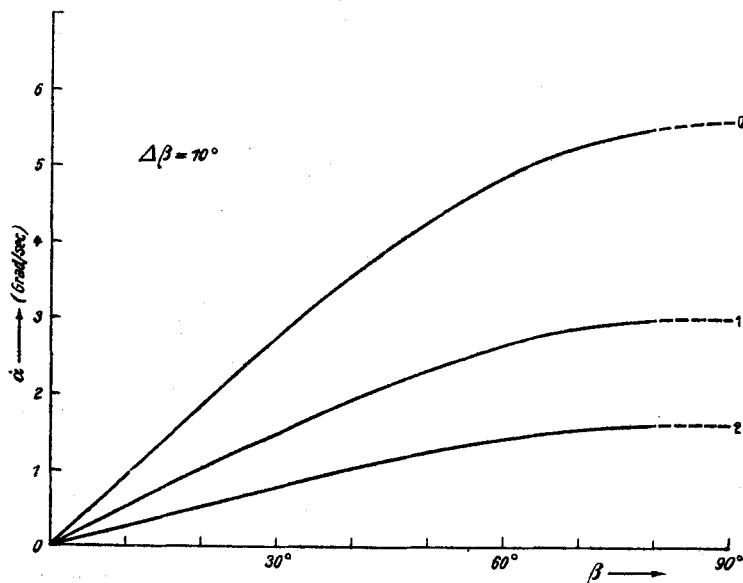


Bild 4

#### 4. Die Stabilität des unsymmetrischen Kreisels

##### a. Die Bewegungsgleichung im körperfesten Bezugssystem

Wenngleich die strenge Berechnung des kräftefreien, unsymmetrischen Kreisels ohne zusätzliche Massen (zum Beispiel beim spitzengelagerten Kreisel) nicht elementar durchführbar ist, so läßt sich doch die Bedingung der Stabilität in einfacher Weise nach der Methode der kleinen Schwingungen aus den Euler-Gleichungen ableiten. Nimmt man in (5) die Drehungskomponenten  $u_{xR}$  und  $u_{yR}$  als klein von erster Ordnung an, so findet man sofort aus der dritten der Gln. (5), daß die Drehgeschwindigkeit  $u_{zR}$  um die Figurenachse bis auf Größen zweiter Ordnung konstant ist. Man findet dann aus den homogen gemachten ersten beiden Gleichungen von (5), daß die Lösungen für  $u_{xR}$  und  $u_{yR}$  nur dann stabil sind, wenn:

$$(\Theta_{xR} - \Theta_{zR})(\Theta_{yR} - \Theta_{zR}) > 0$$

ist. Wenn — ohne Beschränkung der Allgemeinheit —  $\Theta_{xR} > \Theta_{yR}$  angenommen wird, so ist die Bewegung stets instabil für:

$$\Theta_{xR} > \Theta_{zR} > \Theta_{yR},$$

mit anderen Worten: Die „Figurenachse“ darf nicht Achse des mittleren Hauptträgheitsmomentes werden, wenn die Bewegung stabil verlaufen soll.

Der hier augenfällige Vorteil der Rechnung in einem körperfesten Bezugssystem soll nun auch für die Berechnung des unsymmetrischen Kreisels mit massebehafteter kardanischer Aufhängung ausgenützt werden. Es werden also jetzt die Gln. (6) und (7) mit Hilfe der Transformationen (2) und (3) auf das rotorfeste System transformiert. Als Unbekannte werden die Drehgeschwindigkeiten  $u_{xR}$   $u_{yR}$   $u_{zR}$  gewählt. Man erhält auf diese Weise zunächst aus (7)<sub>1</sub>:

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{xA} \{ & \dot{u}_{xR} \cos \varphi - \dot{u}_{yR} \sin \varphi - \dot{\varphi} (u_{xR} \sin \varphi + u_{yR} \cos \varphi) \} \cos \beta + (\dot{u}_{zR} - \ddot{\varphi}) \sin \beta \\ & - [(u_{zR}^2 - u_{yR}^2) \sin \varphi \cos \varphi + u_{xR} u_{yR} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)] \sin \beta \\ & + (u_{xR} \sin \varphi + u_{yR} \cos \varphi) (u_{zR} - \dot{\varphi}) \cos \beta \} = -M'_{xA} \end{aligned} \right\} (21).$$

Für den Innenring folgt aus (6) unter Berücksichtigung von (9):

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{xJ} [ & \dot{u}_{xR} \cos \varphi - \dot{u}_{yR} \sin \varphi - \dot{\varphi} (u_{xR} \sin \varphi + u_{yR} \cos \varphi) \\ & - (\Theta_{yJ} - \Theta_{zJ}) (u_{zR} - \dot{\varphi}) (u_{xR} \sin \varphi + u_{yR} \cos \varphi) ] = -M'_{xJ} + M'_{xA} \cos \beta - M'_{zA} \sin \beta, \\ \Theta_{yJ} [ & \dot{u}_{xR} \sin \varphi + \dot{u}_{yR} \cos \varphi + \dot{\varphi} (u_{xR} \cos \varphi - u_{yR} \sin \varphi) \\ & - (\Theta_{zJ} - \Theta_{xJ}) (u_{zR} - \dot{\varphi}) (u_{xR} \cos \varphi - u_{yR} \sin \varphi) ] = -M'_{yJ}, \\ \Theta_{zJ} ( & \dot{u}_{zR} - \ddot{\varphi}) - (\Theta_{xJ} - \Theta_{yJ}) [(u_{zR}^2 - u_{yR}^2) \sin \varphi \cos \varphi + u_{xR} u_{yR} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)] \\ & = M'_{zA} \sin \beta + M'_{xA} \cos \beta \end{aligned} \right\} (22).$$

Die Gln. (21) und (22) zusammen mit dem System (5) und den Beziehungen (8) beschreiben das Verhalten des unsymmetrischen Kreisels noch in völliger Strenge. Bevor jedoch eine Elimination der Lagerkräfte stattfindet, soll bei der weiteren Rechnung eine Beschränkung auf Nachbarbewegungen des Gleichgewichtszustandes  $u_{xR} = u_{yR} = 0$ ;  $u_{zR} \neq 0$  vorgenommen werden. Wie in dem schon angedeuteten Beispiel werden die Drehungskomponenten  $u_{xR}$  und  $u_{yR}$  als klein von erster Ordnung angesehen und Größen zweiter Ordnung vernachlässigt. Aus der dritten Gl. (5) folgt dann, daß  $u_{zR}$  bis auf Größen zweiter Ordnung eine Konstante ist, die gleich  $\omega$  gesetzt wird. Aus (11)<sub>3</sub> folgt dann:

$$\dot{\varphi} = u_{zR} - u_{zJ} = \omega - u_{zJ}$$

und aus (2), angewandt auf die Komponenten von  $u$ :

$$u_{zJ} \cos \beta - u_{xJ} \sin \beta = u_{zA} = 0.$$

Diese Beziehung in die obige Gleichung eingesetzt ergibt:

$$\dot{\varphi} = \omega - u_{xJ} \operatorname{tg} \beta = \omega - (u_{xR} \cos \varphi - u_{yR} \sin \varphi) \operatorname{tg} \beta \quad \left( |\beta| \neq \frac{\pi}{2} \right) \dots \dots (23).$$

Unter Berücksichtigung dieser Beziehung und bei Vernachlässigung quadratisch kleiner Glieder bekommt man als Ergebnis der Elimination der Lagerkräfte sowie nach trigonometrischen Umformungen das System:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_{xR} (\Theta_{xR} + \Theta_m) - u_{yR} (\Theta_{yR} + \Theta_m - \Theta_{zR}) \omega \\ = \Theta_d [(\dot{u}_{yR} + \omega u_{xR}) \sin 2\varphi - (\dot{u}_{xR} - \omega u_{yR}) \cos 2\varphi], \\ \dot{u}_{yR} (\Theta_{yR} + \Theta_m) + u_{xR} (\Theta_{xR} + \Theta_m - \Theta_{zR}) \omega \\ = \Theta_d [(\dot{u}_{xR} - \omega u_{yR}) \sin 2\varphi + (\dot{u}_{yR} + \omega u_{xR}) \cos 2\varphi] \end{aligned} \right\} \dots \dots (24).$$

Dabei ist zur Abkürzung gesetzt worden:

$$2 \Theta_m = \Theta_{xJ} + \Theta_{xA} \frac{1}{\cos^2 \beta} + \Theta_{zJ} \operatorname{tg}^2 \beta + \Theta_{yJ},$$

$$2 \Theta_d = \Theta_{xJ} + \Theta_{xA} \frac{1}{\cos^2 \beta} + \Theta_{zJ} \operatorname{tg}^2 \beta - \Theta_{yJ}.$$

In diesen beiden Kombinationen von Trägheitsmomenten sind offensichtlich die Trägheitseigenschaften der kardanischen Aufhängung erfaßt. Für eine masselose Aufhängung ( $\Theta_m = \Theta_d = 0$ ) geht (24) natürlich in die E u l e r s c h e Form über.

b. S o n d e r f ä l l e

Die rechte Seite von (24) mit den periodischen Gliedern kann in zwei Sonderfällen verschwinden: zunächst im Sonderfall  $\Theta_d = 0$ . Die dann verbleibende linke Seite des Systems (24) hat die Lösung:

$$u_{xR} = A e^{i\nu t}; \quad u_{yR} = B e^{i\nu t} \dots \dots \dots (25)$$

mit

$$\nu = i\omega \sqrt{\frac{(\Theta_{xR} + \Theta_m - \Theta_{zR})(\Theta_{yR} + \Theta_m - \Theta_{zR})}{(\Theta_{xR} + \Theta_m)(\Theta_{yR} + \Theta_m)}}.$$

$$\frac{A}{B} = -i \sqrt{\frac{(\Theta_{yR} + \Theta_m - \Theta_{zR})(\Theta_{yR} + \Theta_m)}{(\Theta_{xR} + \Theta_m - \Theta_{zR})(\Theta_{xR} + \Theta_m)}}.$$

Aus dem Ausdruck für die Frequenz sieht man sofort, daß die Bewegung instabil ist für:

$$\Theta_{xR} + \Theta_m > \Theta_{zR} > \Theta_{yR} + \Theta_m \dots \dots \dots (26).$$

Der Fall  $\Theta_d = 0$  liegt zwar bei der normalen kardanischen Aufhängung nie vor (dort ist vielmehr stets  $\Theta_d > 0$ ), jedoch ist der betrachtete Sonderfall sehr gut bei der kardanähnlichen Aufhängung des Kreisels von P r a n d t l (siehe Bild 5) verwirklicht. Es ist dort für nicht zu große  $\beta$  in guter Näherung:

$$\Theta_{xA} \approx 0; \quad \Theta_{zJ} \approx 0; \quad \Theta_{xJ} \approx \Theta_{yJ}.$$

Diese Beziehungen gelten auch dann noch, wenn — wie das bei dem P r a n d t l s c h e n Modell üblich ist — auf der verlängerten Rotorachse Zusatzgewichte angebracht werden. Die Zusatzgewichte vergrößern  $\Theta_{xJ}$  und  $\Theta_{yJ}$  in gleicher Weise.



Der zweite Sonderfall, in dem die rechten Seiten von (24) verschwinden, liegt dann vor, wenn die Differentialgleichungen

$$\dot{u}_{xR} - \omega u_{yR} = 0, \quad \dot{u}_{yR} + \omega u_{xR} = 0$$

erfüllt sind. Das ist der Fall für:

$$u_{xR} = A e^{i\omega t}; \quad u_{yR} = i A e^{i\omega t}.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die linken Seiten findet man, daß diese — außer in dem trivialen Fall  $\omega = 0$  — nur für  $\Theta_{xR} = \Theta_{yR}$ ;  $\Theta_{zR} = 0$  erfüllt sind. Der Rotor artet dann in einen dünnen, massebehafteten Stab aus, der um seine Längsachse rotiert.

c. Die Bestimmung der Stabilität im allgemeinen Fall

Für die weitere Rechnung wird das System (24) umgeformt, indem die Differentiationen nach der Zeit in solche nach dem Winkel umgewandelt werden:

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} u'.$$

Ferner wird vereinfachend  $u_{xR} = x$  und  $u_{yR} = y$  geschrieben und es werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$a = \frac{\Theta_{yR} + \Theta_m - \Theta_{zR}}{\Theta_{xR} + \Theta_m}; \quad b = \frac{\Theta_{xR} + \Theta_m - \Theta_{zR}}{\Theta_{yR} + \Theta_m}; \quad c = \frac{\Theta_{xR} + \Theta_m}{\Theta_{yR} + \Theta_m}; \quad \varepsilon = \frac{\Theta_d}{\Theta_{xR} + \Theta_m} \quad (27).$$

Aus (24) folgt nun unter Berücksichtigung von (23) und bei Vernachlässigung quadratisch kleiner Glieder:

$$\left. \begin{aligned} x' - a y &= \varepsilon [(y' + x) \sin 2\varphi - (x' - y) \cos 2\varphi], \\ y' + b x &= c \varepsilon [(x' - y) \sin 2\varphi + (y' + x) \cos 2\varphi] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (28).$$

Dieses System linearer Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten besitzt stabile und instabile Lösungsbereiche, deren Grenzen von der Größe der vier Parameter  $a, b, c, \varepsilon$  abhängen. Nach dem Theorem von Floquet werden die stabilen und labilen Bereiche durch Grenzen voneinander getrennt, auf denen rein periodische Lösungen mit der Periode  $\pi$  auftreten. Solche Lösungen sind aber bei gegebenen Werten von  $\varepsilon$  und  $c$  nur für bestimmte Eigenwerte von  $a$  und  $b$  möglich. Im Falle  $\varepsilon = 0$  sind diese — wie man aus (28) leicht feststellt —

$$\sqrt{ab} = 0, 2, 4, \dots, 2n.$$

Man kann zeigen, daß für das vorliegende Problem nur der Fall  $\sqrt{ab} = 0$  physikalisches Interesse besitzt, denn es gilt stets:

$$ab = \frac{(\Theta_{xR} + \Theta_m - \Theta_{zR})(\Theta_{yR} + \Theta_m - \Theta_{zR})}{(\Theta_{xR} + \Theta_m)(\Theta_{yR} + \Theta_m)} < 1$$

oder umgeformt:

$$(\Theta_{xR} + \Theta_m)(\Theta_{yR} + \Theta_m) - \Theta_{zR}(\Theta_{xR} + \Theta_{yR} + 2\Theta_m - \Theta_{zR}) < (\Theta_{xR} + \Theta_m)(\Theta_{yR} + \Theta_m).$$

Die Erfüllung dieser Ungleichung ist sofort einzusehen, wenn man bedenkt, daß für die drei Hauptträgheitsmomente eines starren Körpers die bekannte „Dreiecksungleichung“ gilt:

$$\Theta_{xR} + \Theta_{yR} > \Theta_{zR}.$$

Im Falle  $\varepsilon = 0$  ergeben sich somit periodische Lösungen von (28) sowohl für  $a = 0$  als auch für  $b = 0$ . Es ist nun zu untersuchen, wie die von diesen Eigenwerten ausgehenden Grenzen im Fall  $\varepsilon \neq 0$  verlaufen. Zu diesem Zweck werden — nach dem Vorbilde der Störungsrechnung — die Variablen und die Parameter  $a$  und  $b$  nach Potenzen von  $\varepsilon$  entwickelt (definitionsgemäß ist stets  $\varepsilon < 1$ ):

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots \\ y &= y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots \\ a &= a_0 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \dots \\ b &= b_0 + \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2 + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (29).$$

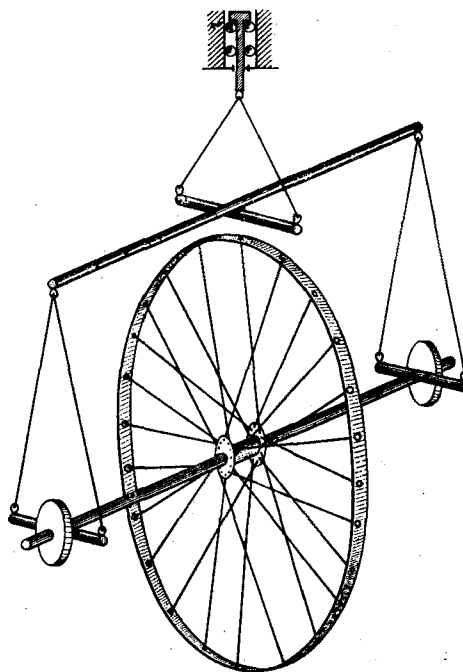


Bild 5

Geht man mit diesem Ansatz in (28) ein und ordnet nach Potenzen von  $\epsilon$ , so folgen Systeme von Differentialgleichungen, aus denen die  $x_i, y_i, a_i, b_i$  berechnet werden können:

$$\left. \begin{aligned} x'_0 - a_0 y_0 &= 0, \\ y'_0 + b_0 x_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (30),$$

$$\left. \begin{aligned} x'_1 - a_0 y_1 - a_1 y_0 &= (y'_0 + x_0) \sin 2\varphi - (x'_0 - y_0) \cos 2\varphi, \\ y'_1 + b_0 x_1 + b_1 x_0 &= c [(x'_0 - y_0) \sin 2\varphi + (y'_0 + x_0) \cos 2\varphi] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (31),$$

$$\left. \begin{aligned} x'_2 - a_0 y_2 - a_1 y_1 - a_2 y_0 &= (y'_1 + x_1) \sin 2\varphi - (x'_1 - y_1) \cos 2\varphi, \\ y'_2 + b_0 x_2 + b_1 x_1 + b_2 x_0 &= c [(x'_1 - y_1) \sin 2\varphi + (y'_1 + x_1) \cos 2\varphi] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (32)$$

..... usw.

Die Lösung von (30) ergibt periodische Schwingungen mit der Frequenz  $\lambda = \sqrt{a_0 b_0}$ . Da, wie bereits gezeigt wurde, nur der Fall  $\lambda = 0$  zu untersuchen ist, sind nunmehr zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall:  $a_0 = 0$ , daraus folgt wegen der Forderung nach Periodizität:

$$x_0 = 0; \quad y_0 = 1; \quad b_0 = b; \quad b_1 = b_2 = \dots = 0,$$

2. Fall:  $b_0 = 0$ , daraus folgt entsprechend:

$$x_0 = 1; \quad y_0 = 0; \quad a_0 = a; \quad a_1 = a_2 = \dots = 0.$$

Dabei ist die nicht weiter interessierende Amplitude willkürlich gleich eins gesetzt worden. Die weitere Behandlung der genannten Fälle ergibt die beiden Grenzlinien, die die stabilen und labilen Lösungsbereiche voneinander trennen. Der 1. Fall ergibt aus (31):

$$\left. \begin{aligned} x'_1 - a_1 &= \cos 2\varphi, \\ y'_1 + b x_1 &= -c \sin 2\varphi. \end{aligned} \right.$$

Soll die Lösung periodisch sein, so muß  $a_1 = 0$  gelten. Dann ist:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \\ y_1 &= \frac{1}{2} \left( c + \frac{b}{2} \right) \cos 2\varphi. \end{aligned} \right.$$

Geht man damit in (32) ein, so folgt in ähnlicher Weise aus der Forderung nach Periodizität eine Bedingung für  $a_2$ :

$$a_2 = \frac{1}{4} \left( 1 + c + \frac{b}{2} \right).$$

Die Lösungen  $x_2$  und  $y_2$  enthalten jetzt Glieder mit  $\sin 4\varphi$  und  $\cos 4\varphi$ , die in die nächsten Systeme einzusetzen sind. Man kann zeigen, daß die durch diesen Prozeß ausgerechneten  $a_i$  für alle ungeraden  $i$  verschwinden. Der bis zum zweiten Schritt ausgerechnete Wert für  $a$ :

$$a = a_0 + \epsilon a_1 + \epsilon^2 a_2 = \frac{\epsilon^2}{4} \left( 1 + c + \frac{b}{2} \right) \dots \dots \dots (33)$$

stellt also bereits eine Näherung dar, die den richtigen Wert bis auf Größen von der Ordnung  $\epsilon^4$  wiedergibt.

Behandelt man nun in gleicher Weise den zweiten Fall, so folgt nacheinander:

$$b_0 = 0; \quad b_1 = 0; \quad b_2 = \frac{c}{4} \left( 1 + c + \frac{ac}{2} \right); \quad b_3 = 0; \quad b_4 \neq 0.$$

Auch hier werden alle  $b$  mit ungeradem Index Null. Folglich erhält man den wieder bis auf Glieder mit  $\epsilon^4$  richtigen Wert für  $b$ :

$$b = \frac{\epsilon^2 c}{4} \left( 1 + c + \frac{ac}{2} \right) \dots \dots \dots (34).$$

Mit den Werten (33) und (34) wird man sich im allgemeinen begnügen können. In dem zahlenmäßig ausgewerteten Fall (Bild 6) war der Wert von  $\epsilon$  so gering, daß sich die Hinzunahme weiterer Potenzen von  $\epsilon$  nicht mehr auf das Ergebnis ausgewirkt hätte. In vielen Fällen wird man sogar mit der nullten bzw. ersten Näherung  $a = b = 0$  bereits ausreichend genaue Werte bekommen, zumindest solche, die gegenüber einer Rechnung bei vernachlässigter Masse der Aufhängung wesentlich verbessert sind.

Setzt man in (33) und (34) wieder die ursprünglichen Werte ein, so folgt:

$$\Theta_{xR} + \Theta_m - \Theta_{zR} = \frac{\Theta_d^2}{4(\Theta_{xR} + \Theta_m)(\Theta_{yR} + \Theta_m)} \left[ \Theta_{xR} + \Theta_{yR} + 2\Theta_m + \frac{1}{2}(\Theta_{yR} + \Theta_m - \Theta_{zR}) \right],$$

$$\Theta_{yR} + \Theta_m - \Theta_{zR} = \frac{\Theta_d^2}{4(\Theta_{xR} + \Theta_m)(\Theta_{yR} + \Theta_m)} \left[ \Theta_{xR} + \Theta_{yR} + 2\Theta_m + \frac{1}{2}(\Theta_{xR} + \Theta_m - \Theta_{zR}) \right].$$

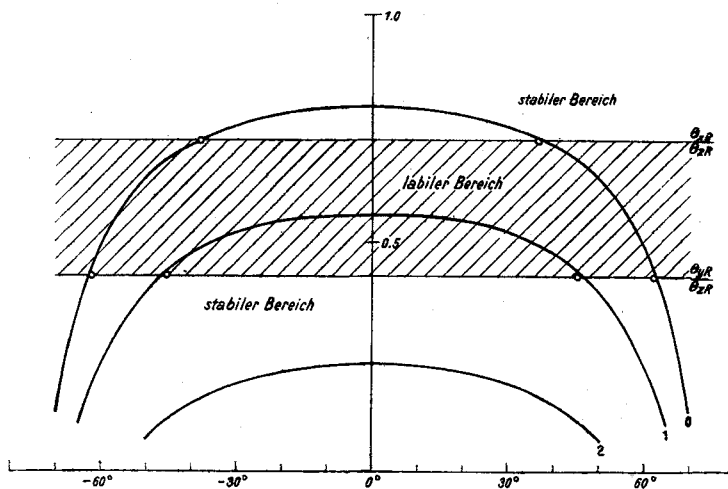


Bild 6

Für die Auswertung ist es zweckmäßig, die Ausdrücke so umzuformen, daß auf den rechten Seiten die gleiche Funktion steht. Zu diesem Zweck werden die in der runden Klammer der rechten Seite stehenden Glieder  $\frac{1}{2} \Theta_{xR}$  bzw.  $\frac{1}{2} \Theta_{yR}$  auf die linken Seiten geschafft, und dann die linken Seiten nach  $\Theta_{xR}$  und  $\Theta_{yR}$  aufgelöst. Wegen der Symmetrie der Gleichungen folgt dann:

$$\Theta_{xR} = F(\beta), \quad \Theta_{yR} = F(\beta) \dots \dots \dots (35),$$

wobei alle von der Schräglage  $\beta$  des inneren Kardanringes abhängigen Größen in die Funktion  $F(\beta)$  hereingenommen wurden. (35) gibt die Grenzen des Stabilitätsgebietes an. Man überzeugt sich leicht, daß das System instabil ist für:

$$\Theta_{xR} > F(\beta) > \Theta_{yR} \dots \dots \dots (36),$$

dagegen stabil für:

$$F(\beta) > \Theta_{xR} \quad \text{oder} \quad \Theta_{yR} > F(\beta).$$

Macht man alle Trägheitsmomente durch Bezug auf das Rotorträgheitsmoment  $\Theta_{zR}$  dimensionslos, so nimmt die Bedingung (36) die Form an:

$$\frac{\Theta_{xR}}{\Theta_{zR}} > \frac{1 - \frac{\Theta_m}{\Theta_{zR}} + \frac{\Theta_d^2}{4(\Theta_{xR} + \Theta_m)(\Theta_{yR} + \Theta_m)} \left( \frac{\Theta_{xR}}{\Theta_{zR}} + \frac{\Theta_{yR}}{\Theta_{zR}} + \frac{5\Theta_m}{2\Theta_{zR}} - \frac{1}{2} \right)}{1 - \frac{\Theta_d^2}{8(\Theta_{xR} + \Theta_m)(\Theta_{yR} + \Theta_m)}} > \frac{\Theta_{yR}}{\Theta_{zR}}$$

Trägt man sich die in der Mitte stehende Funktion in Abhängigkeit vom Winkel  $\beta$  auf ( $\Theta_m$  und  $\Theta_d$  sind nach (24) Funktionen von  $\beta$ ), so erhält man die parabelähnlichen Kurven von Bild 6. Als horizontale Gerade sind die beiden Werte

$$\frac{\Theta_{xR}}{\Theta_{zR}} \quad \text{und} \quad \frac{\Theta_{yR}}{\Theta_{zR}}$$

eingezeichnet. Der zwischen beiden Geraden liegende horizontale Streifen ist der instabile Bereich. Liegt der Arbeitspunkt auf den Parabelkurven innerhalb des Streifens, so ist die Bewegung instabil. Für die Kurve 0, die dem Normalzustand des Modelles von Bild 1 entspricht, liegt Instabilität vor für  $38,0^\circ < |\beta| < 62,8^\circ$ . Werden an den Lagerstellen der Kreiselachse am inneren Kardanring Zusatzgewichte angebracht, so erhält man die Kurve 1, bei der Instabilität vorhanden ist für  $|\beta| < 46,7^\circ$ . Wählt man noch größere Zusatzgewichte, so kommt man zu Kurven, die vollkommen außerhalb des instabilen Streifens liegen (Kurve 2). Wollte man die

bei einem einzelnen starren Körper eingeführten Begriffe auf die vorliegenden Verhältnisse übertragen, so könnte man für hinreichend kleine  $\beta$  sagen: die Kurve 0 entspricht dem „abgeplatteten Kreisel“ (perizykloidischer Fall), bei dem das Trägheitsmoment um die Rotorachse das größte der drei Hauptträgheitsmomente bildet; die Kurve 2 gibt den „gestreckten Kreisel“ (epizykloidischer Fall), bei dem das Trägheitsmoment um die Rotorachse das kleinste der drei Hauptträgheitsmomente ist; bei der Kurve 1 liegt das Trägheitsmoment um die Rotorachse zwischen den beiden anderen Hauptträgheitsmomenten. Für hinreichend große  $\beta$  wird das System in jedem Falle epizykloidisch. Die in Bild 6 eingetragenen Kreise entsprechen den an dem Kreiselmmodell gemessenen Grenzwerten für die Stabilität.

Auch für den symmetrischen Kreisel besitzen die hier durchgeführten Stabilitätsrechnungen ein gewisses Interesse. Wenn auch ein instabiler Bereich beim symmetrischen Kreisel nicht vorkommen kann (wegen  $\Theta_{xR} = \Theta_{yR}$ ), so muß doch bei gewissen Verhältnissen der Trägheitsmomente oder bei bestimmten Schräglagen des inneren Kardanringes mit einem unruhigen Lauf gerechnet werden, insbesondere dann, wenn kleine Unwuchten vorhanden sind. Die Grenzkurven des labilen Streifens von Bild 6 gehen zwar für  $\Theta_{xR} = \Theta_{yR}$  ineinander über, aber der Schnittpunkt mit der parabelähnlichen Kurve kann dennoch auftreten. In seiner Umgebung muß mit unruhigem Lauf des Kreisels gerechnet werden. Es ist daher zweckmäßig, bei Kreiselgeräten die Trägheitsmomente der kardanischen Aufhängung von vornherein groß genug zu wählen, so daß keine Schnittpunkte auftreten können.

### 5. Schrifttum

- [1] F. Bohnenberger: *Gilb. Ann.* **60**, 60 (1817).
  - [2] C. Maxwell: *Edinburgh, Royal Soc. Trans.* **21**, IV (1857).
  - [3] D. Bobylew: *Zeitschr. f. Math. u. Phys.* **47**, 354 (1902).
  - [4] R. Grammel: *Handbuch der Physik*, Bd. V, **8** (1927).
  - [5] M. Schuler: *Lehrbuch der Physik von Müller-Pouillet*, Bd. I, 1.
  - [6] L. Nikolai: *Prikladnaja Math. i Mechanika*, Bd. **3** (1939).
  - [7] R. Fuchs: *Dissertation*, Universität Göttingen, 1941.
  - [8] A. Weigand: *Luftfahrtforschung*, Bd. **18** (1941) S. 378.
  - [9] A. Weigand: *Forschungsbericht Nr. 1495 der DVL-Adlershof*, 1941.
  - [10] K. Seebach: *Bericht der DFS, Ainring* 1944.
  - [11] H. Seyfahrt: *Bericht der Firma Anschütz & Co, Kiel*, 1944.
  - [12] L. Nikolai: „Der kardanisch gelagerte Kreisel. — Theorie des schnelllaufenden Kreisels mit einer Berechnung des Einflusses der Reibung um die Kardanachsen“, Moskau 1944.
  - [13] K. Stellmacher: *Vortrag im Kolloquium über Fragen der angew. Mechanik der Universität Göttingen*, WS. 1945/46.
  - [14] R. Grammel: *Der Kreisel. Seine Theorie und seine Anwendung*. 2. Aufl, Berlin 1950. Bd. I. § 5, 4.
- Eingegangen am 27. 4. 1954.

## Zur Behandlung der kompressiblen Unterschallströmung durch axiale und radiale Schaufelgitter

Von Wolfgang-Hermann Isay in Berlin

*Es wird eine Methode zur näherungsweise Berechnung der kompressiblen Unterschallströmung durch axiale und radiale Schaufelgitter mit beliebig stark gekrümmten Schaufelprofilen angegeben. Dabei werden wesentlich die Ergebnisse benutzt, die der Verfasser in zwei vorangehenden Arbeiten für die inkompressible Strömung durch solche Schaufelgitter abgeleitet hat.*

*A method for the approximate calculation of the compressible subsonic flow through axial and radial paddle-gratings with paddle profiles of any bend is shown, whereby essentially are used the results deduced by the author for the incompressible flow through such paddle-gratings in two preceding articles.*

*Une méthode pour le calcul approximatif du courant subsonique, compressible à travers des grilles d'aube axiales et radiales avec des profils d'aube courbement d'intensité quelconque est indiquée. A cela essentiellement est fait usage des résultats l'auteur a déduits dans deux articles précédents pour le courant incompressible à travers de telles grilles d'aube.*

Дается метод приближенного вычисления сжимаемого дозвукового течения через осевые и радиальные решетки, образуемые лопатками турбины, с профилями произвольной сильной кривизны. При этом существенно используются результаты, выведенные автором в двух предыдущих работах для несжимаемого течения через такие решетки турбинных лопаток.

### 1. Einleitung

Die Behandlung der inkompressiblen Potentialströmung durch ebene Schaufelgitter nach der Singularitätenmethode durch Verwendung von Zirkulationsverteilungen kann heute theoretisch als gelöst angesehen werden<sup>1)</sup>. Wenn man die Zirkulationsverteilungen auf den Profilkonturen selbst anbringt, läßt sich das Strömungsfeld eines Einzelgitters sowie einer Gitterstufe

<sup>1)</sup> W. H. Isay: *Beitrag zur Potentialströmung durch axiale Schaufelgitter*; *Diss. T. U. Berlin* 1952, *Z. angew. Math. Mech.* **33** (1953) S. 397. W. H. Isay: *Beitrag zur Potentialströmung durch radiale Schaufelgitter*; *Ing. Arch.* **22** (1954) S. 203. Die Kenntnis dieser beiden Arbeiten wird hier vorausgesetzt.