

VDI BERICHTE

BAND 4 1955

DK 534.1: 534.83:621

Schwingungstechnik

Vorträge der VDI-Tagung Darmstadt 1954

120 Seiten, 205 Bilder

VDI-VERLAG GMBH DÜSSELDORF





155.2566

Über einige neuere sowjetische Arbeiten auf dem Gebiet der nichtlinearen Schwingungen

Von Dr. K. Magnus, Freiburg/Breisgau

Wer das wissenschaftliche Schrifttum der Sowjetunion in den vergangenen Jahren verfolgt hat, der gewinnt zweifellos den Eindruck, daß nichtlineare Probleme eines der Lieblingsthemen russischer Wissenschaftler darstellen. Nicht nur auf dem Gebiet der Schwingungen, sondern auf fast allen Gebieten der modernen Physik und Technik — z. B. Strömungslehre, Festigkeitslehre (Statik und Plastizitätstheorie), Akustik und elektrische Nachrichtentechnik — werden vorzugsweise nichtlineare Probleme behandelt. Daneben steht die Zahl der rein mathematischen Arbeiten, die sich mit ähnlichen Fragen beschäftigen, nicht zurück. Bedenkt man, daß in den in Frage kommenden wissenschaftlichen Zeitschriften (siehe Schrifttumsverzeichnis) in jeder Nummer meist sogar mehrere Aufsätze nichtlinearen Problemen gewidmet sind, so wird man verstehen, daß es praktisch ausgeschlossen ist, im Rahmen eines Referates mehr als einen nur flüchtigen Überblick zu geben. Wenn gleich das vorliegende Material seit 5 Jahren in einer Reihe von Lehrbüchern ([4; 6; 7; 9; 14]) und Monographien ([5; 10; 11; 15; 16]) schon in etwas gesichteter und geordneter Form bereitsteht, so ist doch keineswegs ein Abschluß erreicht. Daher kam im vorliegenden Referat keine Vollständigkeit angestrebt werden, weder im Hinblick auf die herausgegriffenen Themen, noch bezüglich der Bearbeiter. Die hier getroffene Auswahl ist zum Teil einfach durch die Schwierigkeiten der Beschaffung russischsprachiger Bücher und Zeitschriften; zum anderen Teil aber durch die Interessen des Referenten bedingt. Es ist ja leider eine Tatsache, daß der Zugang zum russischen Schrifttum nicht so sehr durch die sprachlichen Schwierigkeiten versperrt wird, als durch die mangelnde Erreichbarkeit. Wenn schon die Beschaffung wissenschaftlicher Bücher innerhalb der Sowjetunion nicht immer einfach ist — wegen ihrer Billigkeit sind die Auflagen guter Bücher meist in sehr kurzer Zeit vergriffen —, so wird die Beschaffung spezieller Werke außerhalb der Sowjetunion fast aussichtslos.

Wenn man die zahlreichen Arbeiten auf dem Gebiet der nichtlinearen Schwingungen durchsieht, so stellt man fest, daß das durchschnittliche Niveau dieser Arbeiten recht hoch ist. Bei den sich gegenseitig überschneidenden und überholenden Zeitschriftenaufsätzen lassen sich naturgemäß häufige Wiederholungen nicht immer vermeiden. Allgemein fällt eine starke Betonung der formalen, mathematischen Seite auf, die in manchen Fällen sogar den Zugang zum eigentlich physikalischen Kern erschwert. Der Grund dafür liegt zum Teil darin, daß fast alle Theorien sofort in größtmöglicher Allgemeinheit vorgetragen werden, während die Anwendung auf spezielle Aufgaben häufig erst nach vollständiger Darlegung und Sicherung der Theorie behandelt wird. Gelegentlich kommt es auch vor, daß die Freude am mathematischen Formalismus so weit getrieben wird, daß das notwendige Gleichgewicht zwischen den verwendeten Mitteln und dem praktischen Endergebnis gestört erscheint.

Auf dem Gebiet der nichtlinearen Schwingungen ist zweifellos die Moskauer Schule (z. B. [4; 5; 6; 14; 15]) auch

heute noch vorherrschend, die auf eine mehr als 20jährige Tradition auf diesem Gebiet zurückblicken kann. Daneben sind jedoch auch in anderen Städten, insbesondere in Leningrad, Arbeitsgruppen und einzelne Wissenschaftler bekannt geworden ([10; 11; 12; 13]). An Stelle einer notwendigerweise unvollständigen Aufzählung der mit Arbeiten über nichtlineare Schwingungen hervorgetretenen Forscher sollen im folgenden einige der wichtigsten Veröffentlichungen herausgegriffen werden, um auf diese Weise wenigstens eine ungefähre Vorstellung von den erreichten Ergebnissen zu vermitteln.

Sowohl von der rein stofflichen als auch von der methodischen Seite aus überdecken die neueren Arbeiten praktisch den gesamten Bereich der bei nichtlinearen Schwingungen auftretenden Probleme. Die klassischen, auf *Poincaré* zurückgehenden Verfahren der Störungsrechnung werden ebenso häufig angewandt wie das *van der Pol'sche* Verfahren der Variation der Parameter. Ganz besonders werden in den letzten Jahren jedoch die von *Liapunow* eingeführten Methoden kultiviert und zwar in so starkem Maße, daß man geradezu von einer *Liapunow-Renaissance* sprechen kann. Die Bedeutung der bereits 1892 veröffentlichten *Liapunow'schen* Arbeit [1] über die Stabilität von Bewegungen ist eigentlich erst mehr als 40 Jahre später erkannt worden. Inzwischen scheint sich die *Liapunow'sche* Methode zum wichtigsten neuzeitlichen Hilfsmittel bei der Behandlung nichtlinearer Stabilitätsprobleme zu entwickeln.

Da die Originalarbeit von *Liapunow* — selbst nach Ansicht sowjetischer Autoren — nicht angenehm zu lesen und ausgesprochen schwer verständlich ist, fehlt es nicht an Versuchen, diese Theorien in genießbarer Form zu servieren. Zweifellos gebührt *Malkin* ([11]) das Verdienst, in seiner Monographie diese Aufgabe mit Erfolg durchgeführt zu haben. Der Titel der Monographie, die aus Vorlesungen an der Universität der Stadt Ural hervorgegangen ist, ist eigentlich zu bescheiden gewählt. Denn tatsächlich bringt *Malkin* nicht nur eine Darlegung der klassischen Verfahren von *Liapunow* und *Poincaré*, sondern gibt einerseits manchen neuen Hinweis, wie die praktische Anwendung dieser Verfahren am zweckmäßigsten geschieht, andererseits aber macht er durch eine Art Kombination der Verfahren von *Liapunow* und *Poincaré* eine weitere Klasse von Differentialgleichungen einer Behandlung zugänglich. Um das etwas deutlicher zu machen, sei daran erinnert, daß sich das Verfahren von *Poincaré* vor allem bei solchen Systemen von Differentialgleichungen bewährt, die den linearen Systemen benachbart sind, die sich also von diesen im wesentlichen durch kleine Zusatzglieder (Störglieder) unterscheiden. Wir können solche Systeme auf die allgemeine Form bringen:

$$\dot{x}_i = \sum_{\nu=1}^n a_{i\nu} x_\nu + \varepsilon_i f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1)$$

$a_{i\nu}$ sind konstante Koeffizienten, f_i sind analytische Funktionen der n Variablen x_1, \dots, x_n sind Störparameter, deren

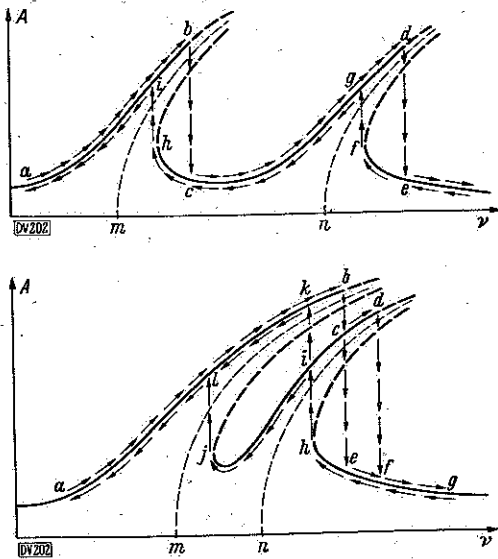


Bild 1 und 2. Resonanzfunktionen eines nichtlinearen Schwingers, auf den zwei Erregerkräfte mit den Frequenzen m und n wirken.

— stabile Lösungen - - - - - labile Lösungen.

Bild 1 (oben). m und n liegen hinreichend weit auseinander.

Bild 2 (unten). m und n liegen dicht beieinander.

Kleinheit maßgebend für die Konvergenz der *Poincaré*-schen Reihenentwicklungen ist. Setzt man $n = 2$, so kann man die bekannte Gleichung einer Schwingung von einem Freiheitsgrad bekommen, bei der die Nichtlinearität sowohl in den Geschwindigkeitsgliedern als auch in den Rückstellkräften oder auch in beliebiger Kombination beider liegen kann. *Liapunow* behandelt nichtlineare Systeme von der Form:

$$\ddot{x}_i = \sum_{\nu=1}^n a_{i\nu} x_\nu + X_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2)$$

wobei er von seinen Zusatzfunktionen X_i nicht voraussetzt, daß sie klein bleiben müssen. Allerdings verlangt er eine Reihe anderer Voraussetzungen; so darf zum Beispiel die Reihenentwicklung der X_i für die jeweilige Gleichgewichtslage nur Glieder von zweiter und höherer Ordnung enthalten. Für diese, von *Malkin* als „*Liapunow'sche* Systeme“ bezeichneten Gleichungen werden hinreichende Bedingungen für die Existenz periodischer Lösungen und Vorschriften für ihrer Ausrechnung angegeben. Als eines der wesentlichen physikalischen Kennzeichen *Liapunow'scher* Systeme ist dabei festzustellen, daß die Frequenz der periodischen Lösungen von den Anfangsbedingungen abhängt. *Malkin* erweitert nun die Betrachtungen für solche Systeme, die den *Liapunow'schen* benachbart sind, die sich also allgemein durch ein System von der Form:

$$\ddot{x}_i = \sum_{\nu=1}^n a_{i\nu} x_\nu + X_i(x_1, \dots, x_n) + \varepsilon_i f_i(x_1, \dots, x_n, \varepsilon_i, t) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3)$$

beschreiben lassen. Dabei sind die $a_{i\nu}$ Konstante, die Zusatzfunktionen X_i analytische Funktionen der Veränderlichen $x_1 \dots x_n$, deren Reihenentwicklung wieder mit Gliedern nicht kleiner als von zweiter Ordnung beginnt, die f_i sind ebenfalls analytische Funktionen der Veränderlichen $x_1 \dots x_n$ sowie des Störparameters ε_i ; außerdem können die f_i periodische, aber stetige Funktionen der Zeit t sein. *Malkin* gibt hinreichende Bedingungen für die Existenz periodischer Lösungen an und untersucht deren Stabilität. Besonders ausführlich wird der wichtige Fall einer Schwingung von einem Freiheitsgrad ($n = 2$) behandelt. Als Anwendungsbeispiel wird hier das Verhalten eines Schwingers mit kubischer Rückstellkraft und linearer Dämpfung

untersucht, der durch zwei harmonische Erregungen verschiedener Frequenz angeregt wird:

$$\ddot{x} + \nu^2 x + \gamma x^3 = \varepsilon (-\delta \dot{x} + a \cos mt + b \cos nt) \quad (4)$$

Bei linearen Systemen würde — wegen der Gültigkeit des Superpositionsprinzips — die Behandlung einer Erregung durch zwei harmonische Erregerfunktionen ohne jedes Interesse sein. Bei nichtlinearen Systemen aber ergeben sich neue Erscheinungen, die in den Bildern 1 und 2 qualitativ erläutert werden sollen. Es sind dabei die Amplituden A als Funktion der „linearen Eigenfrequenz“ ν des Schwingers aufgetragen — nicht wie sonst üblicherweise bei Resonanzproblemen als Funktion der Erregerfrequenz. Je nach dem Vorzeichen der Konstanten γ hängen die Resonanzspitzen nach rechts (überlineare Rückstellkurve) oder nach links (unterlineare Rückstellkurve) über. Der Einfachheit halber ist in den Bildern der ungedämpfte Fall ($\delta = 0$) gewählt worden. Analytisch setzt sich die Lösung aus insgesamt 7 Teillösungen zusammen: einer Grundlösung, je zwei Resonanzlösungen für jeden der beiden überhängenden Resonanzäste und je einer Lösung in unmittelbarer Umgebung der Punkte $\nu = m$ und $\nu = n$. Die stabilen Gleichgewichtslagen sind dabei ausgezogen, die labilen gestrichelt gezeichnet worden. Verändert man den Wert von ν , von kleinen Werten beginnend, langsam, so bewegt sich der Arbeitspunkt zunächst längs der gezeichneten Pfeile auf dem stabilen Ast der Resonanzkurve bis zum Punkt b , an dem die Lösung instabil wird. Da bei weiterer Vergrößerung von ν nur noch die unterste der drei Lösungen stabil bleibt, springt der Arbeitspunkt von b nach c herunter — eine Erscheinung, die für die erzwungenen Schwingungen nichtlinearer Systeme bei Erregung durch nur eine harmonische Störkraft seit *Duffing* bekannt ist. Sofern die beiden Eigenfrequenzen m und n wie in Bild 1 hinreichend weit auseinanderliegen, ergeben sich keine neuen Erscheinungen; es wird vielmehr das schon Bekannte zweimal hintereinander wiederholt. Der Arbeitspunkt rutscht also bei weiterer Vergrößerung von ν von c nach d , springt von dort nach e herunter, um dann weiterhin auf der Grundlösung zu verbleiben. Läßt man danach ν wieder kleiner werden, so wandert der Arbeitspunkt auf dem Wege $e \rightarrow f$, springt von dort nach g , rutscht weiter über e nach h , springt noch einmal herauf nach i um dann auf dem eindeutigen, stabilen Ast der Resonanzkurve nach a herunterzuwandern.

Neuartig und komplizierter werden die Verhältnisse, wenn die beiden Erregerfrequenzen m und n so nahe beieinanderliegen, daß sich die beiden Resonanzäste gegenseitig überlappen. In diesem Falle kann die Resonanzkurve stellenweise fünfdeutig werden. Allerdings scheiden zwei der fünf Lösungen wegen Instabilität von vornherein aus. Bei langsamem Vergrößern von ν wandert der Arbeitspunkt zunächst von a bis zum Punkte b , an dem dieser Ast instabil zu werden beginnt. Bei weiterem Vergrößern von ν stehen nun zwei Möglichkeiten zur Auswahl: entweder der Sprung von b nach c oder der Sprung von b bis herunter auf die Grundlösung e . Im ersteren Falle würde der Arbeitspunkt noch ein Stückchen längs des stabilen Astes $c \rightarrow d$ wandern, um dann schließlich doch auf die Grundlösung herunterzuspringen ($d \rightarrow f$). Ähnlich ergeben sich auch beim Zurückgehen wieder zwei Möglichkeiten. Der Sprung im Punkte h kann entweder bis nach i oder auch bis k erfolgen; im ersteren Falle ist später ein weiterer Sprung von j nach l notwendig, um auf den eindeutigen Ast für $\nu < m$ zu gelangen. Die Hinzunahme von Dämpfungskräften ändert an den hier beschriebenen Erscheinungen nichts Wesentliches.

Es sei noch erwähnt, daß sich in der *Malkin'schen* Monographie auch eine Theorie der linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten findet; denn die Aufgabe, die Stabilität der stationären periodischen Lö-

sung irgendeiner nichtlinearen Differentialgleichung durch Betrachtung von Nachbarbewegungen zu untersuchen, führt zwangsläufig auf derartige Gleichungen.

Unter den Büchern, die sich mit der Frage der selbst-erregten Schwingungen und ihrer Stabilität beschäftigten, nimmt zweifellos die Monographie von *Teodortschik* ([15]) eine besondere Stellung ein. Dieses Buch, das im Laufe von fünf Jahren bereits drei Auflagen erlebte, überrascht durch seine Vielseitigkeit und die mehr der Praxis zugewandte Behandlung der untersuchten Probleme. Dafür wird der mathematisch interessierte Leser vielfach eine strengere Begründung der verwendeten Methoden vermissen. Insbesondere trifft das für die von *Teodortschik* selbst entwickelte energetische Methode zu, die er mit einer gewissen Virtuosität handhabt, und mit deren Hilfe erstaunlich viele Probleme bewältigt werden können. Der Grundgedanke dieser Methode sei an einem einfachen Beispiel erklärt. Wir betrachten die nichtlineare Gleichung eines mechanischen Schwingers von einem Freiheitsgrad:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} = f(x, \dot{x}) \quad (5)$$

Multipliziert man die Gleichung mit \dot{x} und integriert über die Zeit, so gewinnt man in bekannter Weise eine Energiebeziehung:

$$\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{c}{2} x^2 = \int f(x, \dot{x}) \dot{x} dt \quad (6)$$

Auf der linken Seite stehen die kinetische und die potentielle Energie, auf der rechten Seite derjenige Energiebetrag, der infolge der Nichtlinearität jeweils hinzugefügt oder entzogen wird. Beschränkt man sich nun auf die Betrachtung stationärer, periodischer Bewegungen, so nimmt die linke Seite nach Ablauf einer vollen Periode T stets wieder denselben Wert an. Folglich muß für eine derartige Schwingung gelten:

$$\int_0^T f(x, \dot{x}) \dot{x} dt = 0 \quad (7)$$

Diese Beziehung gibt somit die Möglichkeit, periodische Lösungen für das nichtlineare System aufzusuchen. Freilich läßt sich aus ihr nicht die Form der Schwingung, also $x(t)$ ermitteln. Wenn aber z. B. durch Versuche die Form der Schwingung bekannt ist, oder aus der Stärke des Einflusses der nichtlinearen Glieder schon zu entnehmen ist, daß die zu erwartenden Schwingungen fast harmonisch verlaufen werden, dann ergibt Gl. (7) eine Bestimmungsgleichung für die gesuchte Amplitude der stationären Schwingungen. Auch die Stabilität der erhaltenen Lösung läßt sich mit Hilfe des Integrals Gl. (7) bestimmen: eine stationäre Lösung ist stabil, wenn das Integral Gl. (7) bei einer Vergrößerung der Amplitude negativ, bei einer Verkleinerung der Amplitude dagegen positiv wird.

Mit dieser „energetischen Methode“ werden nun nicht nur die üblichen, nichtlinearen Systeme behandelt — *Teodortschik* untersucht besonders ausführlich die verschiedensten Formen von Röhrgeneratoren — sondern auch Systeme mit verzögertem Argument, wie sie beispielsweise bei der Anwendung von Relaisystemen und in den verschiedensten Regelkreisen häufig auftreten. So wird eine Gleichung von der Form:

$$\ddot{x} + v^2 x = f(x, \dot{x}) - v^2 x_\tau \quad (8)$$

behandelt, wobei

$$x_\tau(t) = x(t + \tau)$$

ein um die feste Zeit τ hinter der Veränderlichen $x(t)$ herlaufendes Glied darstellt. Auch erzwungene Schwingungen können ohne Schwierigkeiten behandelt werden, da bei ihnen die Frequenz von vornherein festliegt. Die Methode gestattet jedoch auch Systeme mit periodischen Koeffizienten zu behandeln. Beispielsweise untersucht *Teodortschik* die durch ein nichtlineares Glied erweiterte *Mathieu'sche* Differentialgleichung:

$$\ddot{x} + v^2 (1 + \lambda \cos 2\omega t) x + f(x, \dot{x}) = 0 \quad (9)$$

Für den Fall kubischer Rückstellkraft und linearer Dämpfung:

$$f(x, \dot{x}) = \gamma x^3 + \delta \dot{x} \quad (10)$$

sind die erhaltenen Ergebnisse in den Bildern 3 und 4 dargestellt. Dort ist das Quadrat der Schwingungsamplitude über dem Quadrat der halben Parameterfrequenz ω aufgetragen. Die Gleichung (9) unter Berücksichtigung von Gl. (10) läßt zunächst einmal die triviale Lösung $x = 0$ zu. Diese ist allerdings in einem gewissen Bereich $a-b$ um die Stelle $\omega = v$ herum instabil (gestrichelt gezeichnet). Außer der trivialen Lösung existieren noch zwei weitere stationäre Lösungen, die in Bild 3 von den Punkten a und b ausgehen und bei der gewählten Auftragung Geraden bilden. Die Neigung dieser beiden Geraden hängt von der Größe und dem Vorzeichen von γ ab — ähnlich wie bei den erzwungenen Schwingungen nichtlinearer Systeme Gl. (4) das Überhängen der Resonanzspitzen durch den Faktor γ bestimmt wird. Am einfachsten sind die Verhältnisse für den dämpfungslosen Fall zu übersehen, wie er in Bild 3 gezeichnet ist. Läßt man die Parameterfrequenz ω von kleinen Werten beginnend langsam immer größer werden, so wird keine Schwingung auftreten, solange $\omega^2 < a$ ist. Der Arbeitspunkt wird jedoch bei weiterer Vergrößerung auf der stabilen Gleichgewichtslage von Punkt a bis zum Punkte c hinaufsteigen. An diesem Punkte, der senkrecht über dem zweiten Verzweigungspunkt b liegt, wird der obere Ast instabil, so daß die Schwingungen abbrechen und der Arbeitspunkt für $\omega^2 > b$ wieder auf der Nulllösung liegt. Die vom Punkte b ausgehende Gleichgewichtslage ist stets instabil, hat also praktisch keine Bedeutung.

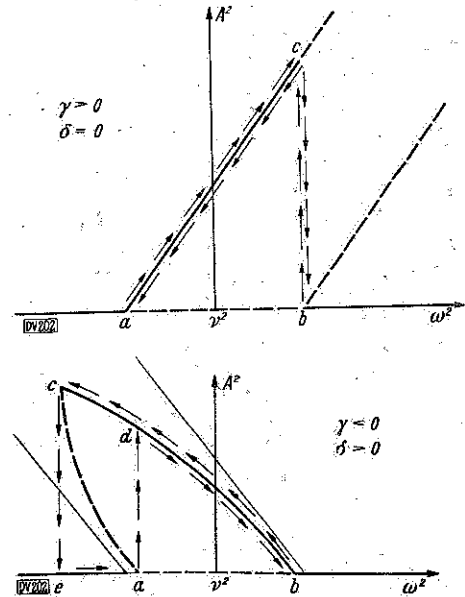


Bild 3 und 4. Gleichgewichtslösungen für einen nichtlinearen Schwinger mit periodischen Koeffizienten.

— stabile Lösungen — gestrichelt — labile Lösungen.

Bild 3 (oben). Ohne Dämpfung, $\gamma > 0$.

Bild 4 (unten). Mit Dämpfung, $\gamma < 0$.

Nimmt man Dämpfung hinzu, so ergeben sich die in Bild 4 gezeichneten Verhältnisse. An Stelle der beiden schrägliegenden Geraden bilden die Gleichgewichtslagen jetzt eine Art schiefstehenden Spitzbogen. Die für den ungedämpften Fall geltenden Geraden sind als dünne Linien mit eingezeichnet worden. Die Neigung der Geraden ist der in Bild 3 entgegengesetzt, weil zur Abwechslung das Vorzeichen von γ geändert wurde. Während der Fall $\delta = 0$ bezüglich der stabilen Gleichgewichtslagen vollständig eindeutige Verhältnisse ergab, finden wir im Falle $\delta = 0$ einen Bereich, in dem zwei stabile Gleichgewichts-

lagen möglich sind. Welche von diesen wirklich eingenommen wird, hängt von der Vorgeschichte bzw. den Anfangsbedingungen ab. Verändert man die Parameterfrequenz langsam von kleinen Werten beginnend, so wandert der Arbeitspunkt zunächst wieder auf der Nulllösung bis zum Punkte a, von dort springt er auf den stabilen Ast zum Punkte d, gleitet herunter bis zum Verzweigungspunkt b, um dann weiterhin auf der Nulllösung zu verbleiben. Beim Zurückgehen wird der stabile Ast von b aus bis zur Spitze c durchlaufen, von wo aus der Arbeitspunkt dann auf die Nulllösung im Punkte e herunterfällt. Es liegen also — trotz der gänzlich verschiedenen Problemstellung — analoge Verhältnisse vor, wie sie von der Theorie der erzwungenen Schwingungen nichtlinearer Systeme bekannt sind. Bemerkenswert ist die Tatsache, daß infolge der Nichtlinearität eine Begrenzung der Amplituden auftritt, auch wenn keine Dämpfung vorhanden ist. Im Falle der linearen, *Mathieu'schen* Gleichung entspricht der Bereich $a < \omega^2 < b$ von Bild 3 einem instabilen Bereich der *Strutt'schen* Karte, in dem theoretisch unendlich große Amplituden möglich wären.

Die Untersuchung der Stabilität der verschiedenen stationären und instationären Bewegungen nimmt in den neueren russischen Arbeiten einen breiten Raum ein. Dabei erweist es sich als notwendig, zusätzliche Begriffe zu schaffen. Keineswegs reicht der bei linearen Systemen übliche Stabilitätsbegriff aus, um die bei nichtlinearen Systemen möglichen Erscheinungen zu erfassen. Entsprechend der bei nichtlinearen Systemen vorhandenen Amplitudenabhängigkeit kann jetzt auch die Stabilität von der Größe der Schwingung abhängen. Man unterscheidet daher zwischen einer „Stabilität im Kleinen“, einer „Stabilität im Großen“ und schließlich „unbegrenzter Stabilität“. Um diese Begriffe näher zu erläutern, betrachten wir die Darstellung einer Schwingung in der „Phasenebene“, das sogenannte „Phasenporträt“ der Schwingung. Im allgemeinen werden als Koordinaten der Phasenebene die Schwingungsweite und die Schwingungsgeschwindigkeit gewählt. In Sonderfällen, z. B. bei manchen Schwingungen in Regelkreisen, kann man jedoch auch andere, die Schwingung kennzeichnende Größen verwenden, oder auch eine Darstellung im 3- oder mehrdimensionalen Phasenraum wählen (z. B. bei [5]). Das Phasenporträt einer stabilen Schwingung ist eine irgendwie geartete Spirale, die sich von außen kommend in den als stabile Gleichgewichtslage angenommenen Nullpunkt hineinwindet (Bild 5). Die Spirale beginnt in einem durch die

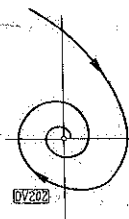


Bild 5.
Phasenporträt einer stabilen Schwingung.

Anfangsbedingungen gegebenen Punkt. Wenn es möglich ist, um die stabile Gleichgewichtslage herum einen gewissen Bereich der Phasenebene abzugrenzen, derart, daß jede in diesem Bereich beginnende Spirale im Nullpunkt endet, so nennen wir dieses System stabil im Kleinen. Wenn der Bereich die gesamte Phasenebene überdecken kann, so ist das System stabil im Großen, bzw. unbegrenzt stabil. Daneben sind aber auch Fälle möglich, wie sie z. B. Bild 6 zeigt. Es existiert hier neben der stabilen Gleichgewichtslage im Nullpunkt ein gestrichelt gezeichneter instabiler Grenzzyklus. Alle innerhalb des Grenzzyklus beginnenden Bahnkurven winden sich spiralgig in den Nullpunkt herein, dagegen entfernen sich die außerhalb des Grenzzyklus beginnenden Kurven immer mehr von diesem

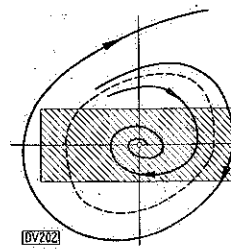


Bild 6.
Phasenporträt eines Systems mit instabilem Grenzzyklus.

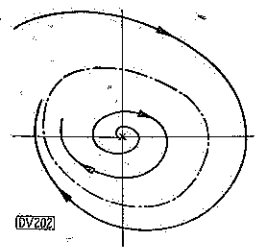


Bild 7.
Phasenporträt eines Systems mit stabilem Grenzzyklus.

und laufen spiralgig ins Unendliche. Ein solches System ist zwar im Kleinen stabil, nicht aber im Großen. Wenn z. B. der durch die praktisch möglichen Anfangsbedingungen des Systems gegebene Bereich das schraffierte Rechteck von Bild 6 ist, so ist das System instabil innerhalb dieses „großen“ möglichen Bereiches. Natürlich gibt es auch Systeme, die im Kleinen instabil, im Großen dagegen stabil sind. Dazu gehören z. B. alle selbstschwingenden Systeme und Schwinggeneratoren. Bei ihnen befindet sich ein instabiler Punkt im Ursprung der Phasenebene, der von einem stabilen Grenzzyklus eingerahmt ist (Bild 7).

Sieht man von praktisch nicht weiter interessierenden Sonderfällen ab, so ist jedes System, das eine stabile Gleichgewichtslage besitzt, auch stabil im Kleinen. Die Frage nach der Stabilität im Großen ist also mit dem Auffinden einer stabilen Gleichgewichtslage beantwortet. Es interessieren hauptsächlich die Bedingungen, unter denen mit Stabilität im Großen oder unbegrenzter Stabilität zu rechnen ist. Hinreichende Bedingungen dafür sind bereits von *Liapunow* [1] angegeben worden. Der Grundgedanke seiner Methode, die neuerdings nach mehreren Richtungen ausgebaut wurde, soll kurz angedeutet werden. Wir denken uns eine beliebige Funktion

$$V(x, y) = C$$

der beiden Koordinaten x und y , die so beschaffen ist, daß zu jedem festen Wert von C eine geschlossene Kurve in der Phasenebene gehört. Die zu verschiedenen Werten von C gehörigen Kurven dürfen sich gegenseitig nicht durchdringen, und für $C = 0$ soll sich die Kurve auf den Nullpunkt zusammenziehen. Im einfachsten Fall ist V eine quadratische Funktion der x und y , und die zugehörigen Kurven bilden eine Schar sich gegenseitig umhüllender Ellipsen. Selbstverständlich lassen sich die Betrachtungen auch auf mehrere Freiheitsgrade übertragen. V ist dann z. B. eine quadratische Funktion von n Variablen, und die zugehörigen Flächen bilden eine Schar von Ellipsoiden im n -dimensionalen Raum. Betrachten wir nun das Phasenporträt einer Schwingung (Bild 8), so ist Stabilität sicher dann vorhanden, wenn es eine Schar geschlossener V -Kurven gibt, derart, daß die Spirale jede dieser V -Kurven nur von außen nach innen durchdringt. Wenn wir uns also mit wachsendem t längs der Bahnkurve der Schwin-

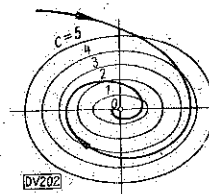


Bild 8.
Phasenkurven in einer Schar Liapunow'scher V -Kurven.

gung bewegen, so müssen die C -Werte der jeweils passierten V -Kurven immer kleiner werden. Die mathematische Bedingung dafür ist, daß die unter Berücksichtigung der zu untersuchenden Schwingung gebildete zeitliche Ableitung dV/dt negativ ist. Die Kunst des Rechners besteht also

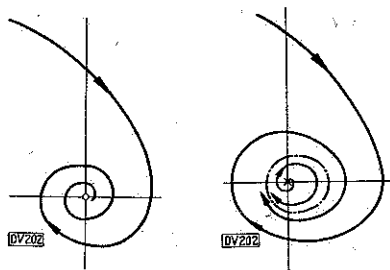


Bild 9 und 10. Qualitative Änderung des Phasenportraits beim Überschreiten eines ungefährlichen Teiles der Stabilitätsgrenze.
Bild 9 (links). Vor dem Überschreiten.
Bild 10 (rechts). Nach dem Überschreiten.

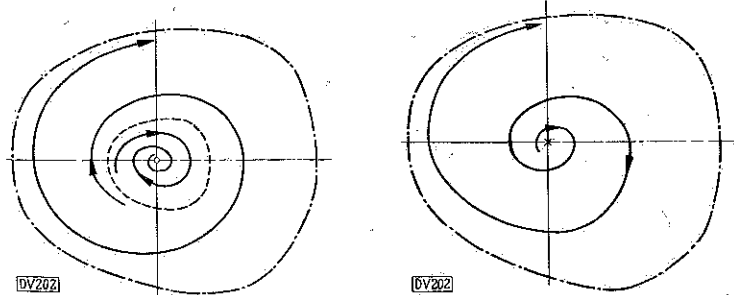


Bild 11 und 12. Qualitative Änderung des Phasenportraits beim Überschreiten eines gefährlichen Teiles der Stabilitätsgrenze.
Bild 11 (links). Vor dem Überschreiten.
Bild 12 (rechts). Nach dem Überschreiten.

darin, zu einer gegebenen Schwingung eine solche Schar von V -Kurven zu finden, die den allgemeinen Bedingungen genügt, die an die V -Kurven zu stellen sind, und deren zeitliche Ableitung negativ ist. Verfahren zum Auffinden solcher Kurven wurden für einfachere Fälle von *Liapunow* angegeben.

In letzter Zeit ist die *Liapunow*'sche Methode vor allem von *Lurje* [10] verwendet und ausgebaut worden. Durch Verwendung komplizierterer Kurven- bzw. Flächen-scharen — u. a. auch solcher, die aus verschiedenen Einzelstücken zusammengeflocht werden — gelang es ihm zum Beispiel, die hinreichenden Bedingungen für die Stabilität eines Regelvorganges aufzustellen, bei dem die Charakteristik des Stellmotors nur durch die Annahme einer maximalen Stellgeschwindigkeit eingeschränkt, sonst aber vollkommen beliebig ist.

Dieses Verfahren zur Stabilitätsuntersuchung ist auch auf Systeme mit zeitlich veränderlichen Koeffizienten anwendbar. Allerdings nur auf solche, deren Koeffizienten sich für $t \rightarrow \infty$ asymptotisch einem festen Grenzwert nähern, nicht dagegen auf Systeme mit periodischen Koeffizienten.

Die *Liapunow*'schen Methoden sind auch noch in anderer Richtung, vor allem von *Bautin* ausgebaut worden. *Bautin* [5] beschäftigt sich mit solchen Systemen, für deren lineares Ersatzsystem eine Stabilitätsgrenze existiert. Da diese Grenze durch die bekannten *Hurwitz*'schen Kriterien bestimmt wird, wollen wir sie kurz als *Hurwitz*-Grenze bezeichnen. *Bautin* stellt die Frage: was passiert bei Überschreiten der für das lineare Ersatzsystem geltenden *Hurwitz*-Grenze? Ohne auf die Einzelheiten der Rechnungen einzugehen, soll hier nur das Ergebnis veranschaulicht werden. Es zeigt sich, daß zwei Fälle zu unterscheiden sind: a) Es entstehen bei geringfügiger Überschreitung der *Hurwitz*-Grenze kleine Dauerschwingungen begrenzter Amplitude, wobei die Amplitude eine Funktion der Größe der Grenzüberschreitung ist. Wird die Grenzüberschreitung wieder rückgängig gemacht, dann verschwinden auch die Schwingungen wieder. Der Vorgang ist umkehrbar. Diejenigen Teile der Grenze, an denen dieses Verhalten auftritt, werden als ungefährlich bezeichnet. b) Es entstehen beim Überschreiten der Grenze wiederum Dauerschwingungen. Ihre Amplitude hängt jedoch nicht von der Größe der Grenzüberschreitung ab, sondern nähert sich einem davon unabhängigen Grenzwert oder wächst unbegrenzt an. Beim Rücküberschreiten der Grenze in das stabile Gebiet verschwinden die Schwingungen nicht, der Vorgang ist also nicht umkehrbar. Diesen Teil der Grenze bezeichnen wir als den gefährlichen.

Die Bilder 9 bis 12 sollen den Unterschied dieses Verhaltens an Hand des Phasenportraits erklären. In Bild 9 und 10 ist zunächst der Fall der ungefährlichen Grenze gezeichnet. Das System befindet sich in beiden Fällen in der

Nähe der *Hurwitz*-Grenze, jedoch bei Bild 9 noch im stabilen Bereich, während bei Bild 10 die *Hurwitz*-Grenze überschritten wurde. Die Überschreitung wirkt sich derart aus, daß aus dem stabilen Gleichgewichtspunkt im Nullpunkt von Bild 9 beim Überschreiten ein stabiler Grenzzyklus herauswächst, während der Nullpunkt zu einer instabilen Gleichgewichtslage wird. Alle Schwingungen nähern sich asymptotisch dem stabilen Grenzzyklus, sowohl von innen, als auch von außen. Beim Rücküberschreiten der *Hurwitz*-Grenze zieht sich der Grenzzyklus wieder zu einem Punkt zusammen und verschluckt dabei den instabilen Gleichgewichtspunkt im Ursprung der Phasenebene.

Etwas schwieriger sind die Verhältnisse im Falle der gefährlichen Grenze zu übersehen. Diese kann dann auftreten, wenn das System „im Großen“ instabil, dagegen „im Kleinen“ stabil ist, wenn also außer dem stabilen Gleichgewichtspunkt im Ursprung noch ein instabiler Grenzzyklus existiert (Bild 11). Wenn sich dieser instabile Grenzzyklus nun beim Überschreiten der Grenze auf null zusammenzieht und dabei den stabilen Gleichgewichtspunkt im Ursprung verschluckt, dann wird jede Schwingung entweder unbegrenzt, oder zumindest bis zu einem bei realen Systemen immer existierenden größeren stabilen Grenzzyklus anwachsen (Bild 12). Beim Rücküberschreiten der Grenze in das stabile Gebiet hinein erscheint zwar wieder der stabile Gleichgewichtspunkt im Ursprung der Phasenebene, aber die einmal aufgeschaukelte Schwingung hat keine Veranlassung, sich dieser Gleichgewichtslage zu nähern. Ja, sie kann es gar nicht, da der instabile Grenzzyklus die stabile Gleichgewichtslage und den äußeren stabilen Grenzzyklus voneinander trennt.

Es sei noch erwähnt, daß die geschilderten Unterschiede zwischen ungefährlicher und gefährlicher Grenze mit den bei der Erregung von Schwingungen in Röhrengeneratoren seit langem bekannten Unterschieden zwischen „weicher“ (ungefährlicher) und „harter“ (gefährlicher) Erregung verwandt sind.

Nach dem für lineare Systeme üblichen Stabilitätsbegriff, der auf die Forderung negativer Realteile für alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung hinausläuft, ist natürlich alles Gebiet jenseits der *Hurwitz*-Grenze als instabil zu bezeichnen. Bei Zugrundelegung einer auch wieder auf *Liapunow* zurückgehenden Definition der Stabilität könnte man jedoch einen jenseits des ungefährlichen Teiles der *Hurwitz*-Grenze liegenden Bereich noch als stabil bezeichnen. Wenn $x_0(t)$ eine mögliche stationäre Bewegung und $x(t)$ eine Nachbarbewegung davon ist, so daß gilt:

$$|x(t) - x_0(t)| < \delta \quad (\delta > 0) \quad \dots \dots (11)$$

und wenn ferner zu Beginn der Bewegung:

$$|x(0) - x_0(0)| \leq \epsilon \quad (\epsilon > 0) \quad \dots \dots (12)$$

war, dann ist Stabilität nur vorhanden, wenn es zu jedem beliebig kleinen δ ein von diesem abhängiges, kleines ε gibt derart, daß Gl. (11) für alle $t > 0$ gültig bleibt. Diese Definition ist realen Systemen erheblich besser angepaßt, als die für die linearisierten Systeme geltende asymptotische Stabilität, die besagt, daß

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0(t)$$

gelten soll. Man könnte somit vernünftigerweise die sehr häufig vorkommenden Regelkreise, die im Normalfall Dauerschwingungen kleiner Amplitude ausführen, als stabil bezeichnen.

Wie kann man nun die gefährlichen Teile der Hurwitz-Grenze von den ungefährlichen unterscheiden? *Bautin* zeigt, daß man zu diesem Zweck eine bereits von *Liapunow* eingeführte Funktion L verwenden kann, die im wesentlichen aus den quadratischen und kubischen Gliedern der Reihenentwicklung der nichtlinearen Glieder des Gleichungssystems zusammengesetzt ist. Der gefährliche Teil der Grenze ist durch $L > 0$, der ungefährliche durch $L < 0$ charakterisiert. Zur praktischen Ausrechnung muß also in der Ebene (oder im Raume) der interessierenden Parameter des Systems die Hurwitz-Grenze durch Nullsetzen der Hurwitz'schen Determinanten bestimmt werden. Dazu wird dann die sich in derselben Ebene aus der Bedingung $L = 0$ ergebende Kurve ausgerechnet. Der Schnittpunkt dieser Kurve mit der Hurwitz-Grenze teilt auf dieser die gefährlichen von den ungefährlichen Teilen ab. Bedenkt man nun, daß die Funktion L in ihrem Aufbau erheblich komplizierter als die Hurwitz-Determinanten ist, so bekommt man eine ungefähre Vorstellung von dem Umfang der Rechenarbeit, die die praktische Anwendung dieses Verfahrens mit sich bringt. *Bautin* sagt selbst, daß die Ausrechenarbeit bei Systemen von höherem als 4. Grade nur noch in Sonderfällen zu bewältigen sein dürfte.

Trotz ihres stark theoretischen Charakters enthalten die letztgenannten Monographien von *Lurje* [10] und *Bautin* [5] eine Fülle von praktischen Aufgaben, die bis zu konkreten Endergebnissen durchgerechnet wurden. So finden wir z. B. bei *Lurje* die Berechnungen eines Vibrationsreglers für elektrische Spannungen, einer Kreiselstabilisierung sowie verschiedener Regelkreise unter Berücksichtigung von Nichtlinearitäten, wie sie infolge von Festreibung, Unempfindlichkeit, Lose, Sättigung und Hysteresis häufig auftreten. *Bautin* bringt an praktischen Beispielen: Bahnkurven der Längsbewegung eines Flugzeugs bei konstantem Anstellwinkel, Kursstabilisierung eines Flugzeuges, verschiedene Typen von Röhrgeneratoren, Flüssigkeitsstandregelung, Folgesysteme, Drehzahlregelung, Einschienenbahn und Schlingerkreisel.

Im Rahmen dieses kurzen Berichtes ist es natürlich nicht möglich, alle wichtigen Arbeiten anzuführen, zu denen u. a. auch die vielseitigen Untersuchungen von *Bulgakow* gehören, die zum Teil in dem Lehrbuche über Schwingungen [6] zu finden sind. Als eine Art Kuriosum sei schließlich

noch das kleinere Buch von *Charkewitsch* [7] erwähnt, in dem sich der Verfasser die Aufgabe stellt, die bei selbst-erregten Schwingungen auftretenden Probleme auf rund 150 Seiten anschaulich zu erklären, ohne eine einzige mathematische Formel dabei zu verwenden. Man wird sich hüten müssen, diesen Versuch als populärwissenschaftlich abzutun, eine Klassifizierung, die ja leider in Fachkreisen stets mit einer gewissen Geringschätzung verbunden ist. Tatsächlich gelingt es *Charkewitsch* auf Grund von anschaulichen Energiebetrachtungen, unterstützt durch zahlreiche Abbildungen und Diagramme, eine ganze Reihe von Erscheinungen zu erklären. Sein Verdienst besteht vor allem darin, diese Probleme vor einem weiteren Kreise auseinandergesetzt und auf diese Weise Interesse geweckt zu haben, das letzten Endes wieder der forschenden Wissenschaft zugute kommt.

Schrifttum

Das folgende Verzeichnis enthält mit Ausnahme der drei erstgenannten „klassischen“ Werke nur Bücher, die nach Kriegsende erschienen sind. Zeitschriftenaufsätze werden nicht im einzelnen aufgeführt; ihre Aufzählung würde diese Liste um ein Vielfaches umfangreicher werden lassen. Statt dessen sind nur die wichtigsten Zeitschriften zitiert, in denen laufend Arbeiten über nichtlineare Probleme erscheinen.

Abkürzung: Gostechisdat = Staatlicher Verlag für technisch-theoretisches Schrifttum, Moskau-Leningrad.

- [1] *A. M. Liapunow*: Die allgemeine Aufgabe der Stabilität von Bewegungen, 1892.
- [2] *N. M. Krylow* und *N. N. Bogoljubow*: Einführung in die nichtlineare Mechanik, Kiew 1937.
- [3] *A. A. Andronow* und *S. E. Chaikin*: Theorie der Schwingungen, Moskau 1937.
- [4] *M. A. Aiserman*: Die Theorie der Regelung von Triebwerken. Gostechisdat, 1952.
- [5] *N. N. Bautin*: Das Verhalten dynamischer Systeme in der Nähe der Stabilitätsgrenzen; erschienen in der Reihe „Gegenwartsprobleme der Mechanik“, Gostechisdat, 1949.
- [6] *B. W. Bulgakow*: Schwingungen, Bd. 1 (Bd. 2 war bis 1953 noch nicht erschienen). Gostechisdat, 1949.
- [7] *A. A. Charkewitsch*: Selbsterregte Schwingungen. Gostechisdat, 1953.
- [8] *A. A. Feldbaum*: Einführung in die Theorie nichtlinearer Kreise. Staatlicher Verlag für Energiewesen, Moskau 1948.
- [9] *G. S. Gorelik*: Schwingungen und Wellen. Gostechisdat, 1950.
- [10] *A. I. Lurje*: Einige nichtlineare Aufgaben der Regelungstheorie; erschienen in der Reihe „Gegenwartsprobleme der Mechanik“, Gostechisdat, 1950.
- [11] *I. G. Malkin*: Die Methoden von *Liapunow* und *Poincaré* in der Theorie der nichtlinearen Schwingungen; erschienen in der Reihe „Gegenwartsprobleme der Mechanik“, Gostechisdat, 1949.
- [12] *I. G. Malkin*: Die Theorie der Stabilität von Bewegungen. Gostechisdat, 1952.
- [13] *N. D. Moissejew*: Die Entwicklung der Stabilitätstheorie. Gostechisdat, 1949.
- [14] *S. P. Strelkow*: Einführung in die Theorie der Schwingungen. Gostechisdat, 1951.
- [15] *K. F. Teodortschik*: Selbstschwingende Systeme. Gostechisdat, 3. Aufl. 1952.
- [16] *N. G. Tschetajew*: Die Stabilität der Bewegung. Gostechisdat, 1946.

Zeitschriften (vorwiegend aus dem Akademie-Verlag, Moskau):

- [17] „Automatik und Telemechanik“ (awtomatika i telemechanika).
- [18] „Angewandte Mathematik und Mechanik“ (prikladnaja matematika i mehanika).
- [19] „Vorträge der Akademie der Wissenschaften der UdSSR“ (doklady akademii nauk).
- [20] „Nachrichten der Akademie der Wissenschaften der UdSSR“ (iswestija akademii nauk).
- [21] „Ergebnisse der Physik“ (uspechi fiziki).
- [22] „Zeitschrift für technische Physik“ (jurnal technitscheskoifiziki).
- [23] „Radiotechnik“ (radiotekhnika).
- [24] „Die Elektrizität“ (elektrischestwo).