Ein Beitrag zur Berechnung nichtlinearer Schwingungs- und Regelungs-Systeme *)

Von *K. Magnus* in Freiburg/Breisgau

Unter Verwendung der von Krylow und Bogoljubow eingeführten Methode der harmonischen Balance kann man für ein dynamisches System, dessen Differentialgleichungen in allgemeiner Form

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

lauten, ein lineares Ersatzsystem angeben von der Form

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} \left(a_{i\nu} x_\nu + a^*_{i\nu} \frac{dx_\nu}{dt}\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

Dieses unterscheidet sich von dem nach der Methode der kleinen Schwingungen erhaltenen Ersatzsystem in zwei Punkten: 1) die Koeffizienten sind nicht konstant, sondern Funktionen einer Hilfsvariablen A, die als Amplitude der Bewegungen des Systems gedeutet werden kann; 2) es sind Glieder mit den zeitlichen Ableitungen der Variablen enthalten, deren Mitnahme die Erfassung von Funktionen f_i vom Hysterese-Typ ermöglicht.

Wenn

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\nu=1}^{n} f_{i\nu}(x_\nu) \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

ist, so hat man zur Bestimmung der a die Integraltransformationen

$$a_{i\nu} = K_s\{f\} = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f_i(A \sin\varphi) \sin\varphi \, d\varphi, \quad a^*_{i\nu} = K_c\{f\} = \frac{1}{\pi A \omega}\int_0^{2\pi} f_i(A\sin\varphi)\cos\varphi\, d\varphi \quad (4),$$

durch die die Funktionen $f_{i\nu}$ der Variablen x_ν überführt werden in die Funktionen $a_{i\nu}$ und $a^*_{i\nu}$ der Variablen A. Die Durchführung der Transformation auch im Falle allgemeiner f_i bereitet keine wesentlichen Schwierigkeiten, ist aber etwas umständlicher.

Für das Ersatzsystem (2) kann man nun in bekannter Weise den Stabilitätsbereich im Raume der Koeffizienten a aufsuchen. Dieser Bereich wird durch eine Fläche begrenzt, deren wichtigster Teil aus der Beziehung $R = 0$ gewonnen wird, wobei R die „Routhsche Diskriminante" bzw. die $(n-1)$. Hurwitz-Determinante ist. Ein bestimmtes dynamisches System wird im gleichen Raume durch einen Bildpunkt charakterisiert, der je nach der Größe der jeweiligen Amplitude A wandert und dabei eine „A-Kurve" beschreibt.

Das Entscheidende des Verfahrens liegt nun in der Erkenntnis, daß aus der gegenseitigen Lage von „R-Fläche" und „A-Kurve" die wichtigsten Eigenschaften eines dynamischen Systems abgelesen werden können. Es lassen sich dafür eine Anzahl von Sätzen formulieren, von denen nur die folgenden angegeben werden sollen:

1. Liegt die A-Kurve ganz im Bereich $R > 0$, so ist das zugehörige System asymptotisch stabil im Großen.
2. Liegt die A-Kurve ganz im Bereich $R < 0$, so ist das zugehörige System labil.
3. Jeder Schnittpunkt der A-Kurve mit der R-Fläche repräsentiert eine mögliche periodische Bewegung. Die Amplitude dieser Bewegung kann am A-Maßstab der A-Kurve, die Frequenz aus einem ω-Netz der R-Fläche abgelesen werden.
4. Die durch 3) definierte periodische Bewegung ist stabil für

$$\left(\frac{dR}{dA}\right)_{R=0} = \sum_i \left(\frac{dR}{da_i}\right)_{R=0} \frac{da_i}{dA} > 0 \quad \ldots \ldots \quad (5);$$

sie ist labil, wenn dieser Ausdruck negativ wird.

(5) kann als verallgemeinertes Hurwitz-Kriterium für nichtlineare Systeme aufgefaßt werden. Weiterhin lassen sich Sätze über Gefährlichkeit bzw. Ungefährlichkeit der Stabilitätsgrenzen, über weiche oder harte Erregung in selbstschwingenden Systemen und über die Existenz von Grenzzyklen im Phasenporträt eines Systems ableiten.

Am Beispiel einer automatischen Kursregelung von Schiffen wurde die praktische Anwendung der Methode veranschaulicht. Vorteile des Verfahrens bestehen darin, daß der Rechenaufwand nicht wesentlich gegenüber dem für lineare Verfahren notwendigen erhöht ist, da die Trans-

*) Diese Untersuchungen werden in ausführlicher Form als Forschungsheft Nr. 451, 1955 im VDI-Verlag, Düsseldorf veröffentlicht werden.

formationen K_s und K_c in vielen Fällen aus einer Tafel entnommen werden können. Ein weiterer Vorteil ist darin zu sehen, daß der lineare Teil eines Problems — die R-Fläche — unabhängig von dem nichtlinearen Teil — der A-Kurve — ausgerechnet wird. Man kann daher zu einer einmal bestimmten R-Fläche meist ohne Schwierigkeiten verschiedene A-Kurven ausrechnen bzw. zeichnen. Das erweist sich besonders bei der Synthese von Regelkreisen als wertvoll. Ein Nachteil des Verfahrens besteht darin, daß es bisher nicht gelungen ist, die Fehler des Krylow-Bogoljubowschen Ansatzes für beliebige Systeme allgemein abzuschätzen. Jedoch kann man zeigen, daß diese Methode in jedem Falle mehr liefert, als die bisher meist in solchen Fällen verwendete Methode der kleinen Schwingungen.

Ein Aequivalenzsatz für Summengleichungen

Von *I. Paasche* in München

Alle vorkommenden Größen seien komplex, insbesondere λ, μ, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$. Ist $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu z^\nu$ in $|z| \leq q$ regulär und $\neq 0$, so auch $1/f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Gamma_\nu z^\nu$. Mit geeigneten γ, Q gilt dann also $\max\left(\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|\gamma_\nu|}, \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|\Gamma_\nu|}\right) < \gamma^{-1} < Q^{-1} < q^{-1}$. Nach diesen Vorbereitungen beweist man den folgenden

Satz: Die Summengleichung $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} x_{\mu+\nu} = c_\mu$ mit den Koeffizientenbedingungen $\overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{|c_\mu|} \leq q$, $|a_{\mu\nu}| \leq k_\mu Q^{-\nu}$, $\overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{k_\mu} < \gamma Q^{-1}$ besitzt unter der Nebenbedingung $\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|x_\nu|} \leq q$ genau die gleichen Lösungen wie die mittels der γ_ν linear transformierte Ausgangsgleichung, nämlich $\sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\mu\nu} x_{\mu+\nu} = C_\mu$, worin definitionsgemäß $A_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\mu+\lambda,\, \nu-\lambda} \gamma_\lambda$ und $C_\mu = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\mu+\lambda} \gamma_\lambda$ ist.

Zusatz: Von selbst gelten dann mit geeigneten K_μ die Beziehungen $\overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{|C_\mu|} \geq q$, $A_{\mu\nu}| \leq K_\mu Q^{-\nu}$, $\overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{K_\mu} < \gamma Q^{-1}$, $a_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=0}^{\nu} A_{\mu+\lambda,\, \nu-\lambda} \Gamma_\lambda$, $c_\mu = \sum_{\lambda=0}^{\infty} C_{\mu+\lambda} \Gamma_\lambda$.

Der obige Satz gestattet ein Wachstum der $|a_{\mu\nu}|$ mit μ und mit ν; er verallgemeinert daher sowohl die Koeffizientenbedingung $|a_{\mu\nu}| < K \vartheta^{\nu+1} < K$ von Perron [Math. Ann. 84 (1921) S. 1] als auch die des Verf. (Über das Verhalten der Integrale homogener und inhomogener Summengleichungen im Unendlichen, München 1954, § 5). Der Beweis (Umordnungssatz, Majorantenabschätzung) benutzt die Beziehungen $\overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{|C_\mu|} = \overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{|c_\mu|}$, $\sum_{\nu=0}^{\lambda} \gamma_{\lambda-\nu} \Gamma_\nu = 0^\lambda$, $\overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{k_\mu} < m < \gamma Q^{-1}$, $|\gamma_\nu| \leq k \gamma^{-\nu}$, $|\Gamma_\nu| \leq k \gamma^{-\nu}$, $k_\mu \leq k m^\mu$, $|a_{\mu\nu}| \leq k m^\mu Q^{-\nu}$, $|x_\nu| \leq k x^\nu (q < x < Q)$ und z. B. $K_\mu = \dfrac{k^2 m^\mu}{1 - m Q \gamma^{-1}}$.

Der Satz erlaubt etwa die Einteilung aller Summengleichungen u. a. in solche Klassen, die mit geeigneten Differenzengleichungen (Bandmatrizen) äquivalent sind, d. h. die gleichen Lösungen der Art $\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|x_\nu|} \leq q$ aufweisen; desgl. in solche Klassen, deren Repräsentanten in jeder Zeile fast die gleichen Koeffizienten, oder außerhalb der Bandmatrix statt der Nullen absolut kleine Elemente besitzen und daher der iterativen Auflösung ebenfalls bequem zugänglich sind.

Über eine Verbesserung der Ritzschen Methode

Von *Theodor Pöschl* in Karlsruhe

Bei der Anwendung der Ritzschen Methode in der gewöhnlich benützten Form stellt sich in manchen Fällen der Übelstand heraus, daß trotz richtiger Wahl der Folge der Annäherungsfunktionen die Differentialgleichung, um deren Integration es sich handelt, nur sehr unvollkommen erfüllt ist; auch entsteht eine Schwierigkeit dann, wenn es sich darum handelt, Lösung