reihe IV trotz Erregung im unterkritischen Bereich der Einfluß der Endfeder so stark, daß überlineares Verhalten eintrat.

Aus dem Institut für Mechanische Schwingungstechnik der Technischen Hochschule Karlsruhe.

Literatur

[1] F. Melde, Pogg. Ann. **109** (1860) S. 193 und ***111*** (1860) S. 513.
[2] K. Schlesinger, Z. techn. Physik **12** (1931) S. 33.
[3] E. Mettler und F. Weidenhammer, Z. angew. Math. Mech., im Druck.

Kreiseleigenschaften des umlaufenden Kettenringes

Von *K. Magnus* in Freiburg/Breisgau

Bei einem Kettenring sei dadurch eine stationäre Drehung aufrechterhalten, daß die Kettenglieder durch masselose Fäden an eine drehende Scheibe gebunden sind — ähnlich wie bei einem Rad der Radkranz durch Speichen mit der Nabe verbunden wird (Bild 1). Es soll die Kettenbewegung bei feststehender und gleichförmig bewegter Drehachse der Antriebsscheibe ermittelt werden.

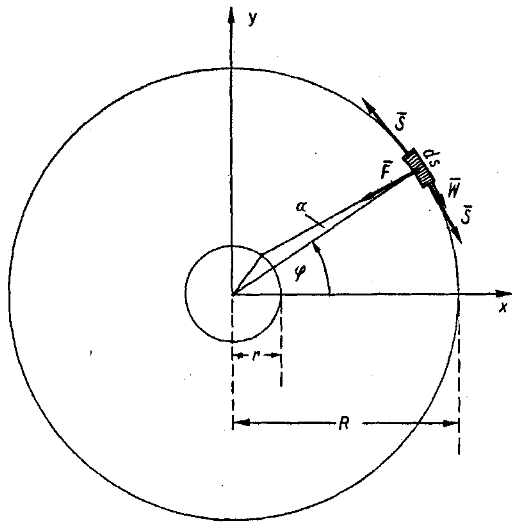

Bild 1. Bezeichnungen und Kräfte an einem Kettenelement von der Länge ds.

Die Gleichungen für die Bewegung eines Kettenelementes von der Länge ds und der Masse $\mu\,ds$ lauten in einem mit der antreibenden Scheibe verbundenen Koordinatensystem:

$$\mu\,ds\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}-[\bar{v}\,\bar{\omega}]\right)=\sum d\bar{K}=\left[\left(\frac{\bar{S}}{\varrho}\right)+\bar{F}+\bar{W}\right]ds \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

v = Vektor der Absolutgeschwindigkeit des Kettenelementes,
$\bar{\omega}$ = Drehvektor der Antriebsscheibe,
$\bar{K}$ = Vektor der am Kettenelement angreifenden Kräfte,
$\bar{S}/\varrho$ = Vektor der auf die Längeneinheit bezogenen Querkraft, die bei gekrümmter Kette (Krümmungsradius ϱ) infolge der Kettenspannung S entsteht,
$\bar{F}$ = Vektor der auf die Längeneinheit bezogenen Fadenkraft,
$\bar{W}$ = Vektor der auf die Längeneinheit bezogenen Widerstandskraft.

Schwerkräfte werden vernachlässigt. Wenn die Antriebsscheibe stationär um eine raumfeste z-Achse senkrecht zur Scheibenebene dreht, so findet man leicht eine physikalische plausible Lösung von (1), bei der die Kette als ebener Kreisring gleichförmig rotiert:

$$\left.\begin{array}{l}\bar{v}=(-R\,\omega_z\sin\varphi,\ R\,\omega_z\cos\varphi,\ 0); \qquad z=0\\ W_0=\alpha F_0; \quad \mu\,R\,\omega_z^2=F_0+\dfrac{S_0}{R}\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Die Widerstandskräfte W_0 werden durch eine Komponente αF_0 der Fadenkräfte kompensiert; die Zentrifugalkräfte werden zum Teil von den Fäden, zum anderen Teil von der Kettenspannung aufgenommen. Linearisiert man nun die Gln. (1) für Nachbarbewegungen von (2), so wird die Gleichung für die z-Komponente von den anderen beiden Gleichungen entkoppelt. Sie hat die Form der bekannten Telegraphengleichung und lautet:

$$\mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 0 = S_0 \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - \frac{F_0}{R-r} z - \frac{W_0}{R\,\omega_z} \frac{\partial z}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Im Sonderfall eines völlig frei umlaufenden Ringes ($F_0 = 0$), der keine Widerstände erfährt ($W_0 = 0$) fallen die beiden letzten Glieder fort. Es bleibt die Differentialgleichung für die eindimensionale Wellenbewegung (schwingende Saite) mit der Wellengeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{S_0}{\mu}}.$$

Wegen (2) findet man $c = R\,\omega_z$: die Wellengeschwindigkeit im mitgedrehten Koordinatensystem ist gleich der Umfangsgeschwindigkeit der Kettenelemente. Von einem raumfesten Beobachter aus gesehen bleiben also z-Verbeulungen des Kettenringes in Ruhe, während sich die Kettenglieder darüber hinwegbewegen. Diese Erscheinung bildet ein räumliches Analogon zur bekannten Formstabilität des ebenen Kettenringes (Radinger sches Seilphänomen).

Für die allgemeine Differentialgleichung (3) soll ein Anfangswertproblem betrachtet werden: die Kette drehe für $t = 0$ als ebener Kreisring, dessen Ebene einen gewissen Winkel β mit der Ebene der Antriebsscheibe bildet. Dann wird (3) gelöst durch:

$$\left.\begin{array}{c} z = R\,\beta \cos\frac{s}{R}\, e^{-\lambda t} \cos \nu t \\ \text{mit} \\ \lambda = \dfrac{W_0}{2\,\mu\,R\,\omega_z}; \qquad \nu^2 = \dfrac{\omega_z^2}{1+k}\left[1 + k\,\dfrac{R}{R-r} - \dfrac{\alpha^2 k^2}{4\,(1+k)}\right] \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (4)$$

$s = R\,\varphi =$ Bogenlänge der Kette; $k = F_0\,R/S_0 =$ Verhältnis der Fadenkraft zum radialen Komponente der Kettenkraft. (4) sagt aus, daß der für $t = 0$ ebene Kettenring auch für jedes andere $t > 0$ einen ebenen Ring bildet. Die Ringebene führt jedoch eine gedämpfte Taumelbewegung gegenüber der Scheibenebene aus und nähert sich dieser für $t \to \infty$ asymptotisch. Der Dämpfungsexponent λ ist den Widerstandskräften W_0 proportional. (4) kann als Präzession des als Kreisel aufgefaßten Kettenringes angesehen und berechnet werden. Wenn die fiktive Figurenachse des Kettenkreisels, die senkrecht zur Ringebene steht, von der Richtung der Antriebsachse abweicht, entstehen Rückführmomente, die gerade eine Präzession von der Form (4) bewirken. Die Bewegung ist völlig analog zur gedämpften Präzession eines Kreiselpendels.

Interessanterweise ergeben sich aus dem Ausdruck für ν auch noch vernünftige Werte, wenn $k \to \infty$ geht, wenn also die ganze Zentrifugalkraft von den Fäden aufgenommen wird. Man kann sich in diesem Grenzfall die Kette zerschnitten denken, so daß jedes einzelne Kettenglied als Massenpunkt an einem Faden auf einer Kreisbahn herumgeschleudert wird.

Eine weitere partikuläre Lösung von (1) läßt sich für den Fall finden, daß die Antriebsachse der Scheibe zusätzlich um eine zur z-Achse senkrechte, aber raumfeste Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω^* gedreht wird. Die z-Komponentengleichung von (1), bei der jetzt das Coriolisglied nicht verschwindet, kann dann durch

$$z = z_0 \cos\frac{s}{R} \sin(\omega_z t - \varphi_0)$$

mit

$$z_0 = -\frac{\omega^* R\,(1+k)}{\omega_z k \sqrt{\dfrac{r^2}{(R-r)^2} + \alpha^2}}; \qquad \operatorname{tg}\varphi_0 = \alpha\,\frac{R-r}{r}$$

gelöst werden. Der Kettenring liegt zu jedem Zeitpunkt in einer Ebene. Aber diese Ebene ist gegenüber der Ebene der Antriebsscheibe um den Winkel $\psi \approx z_0/R$ geneigt. ψ ist proportional zu ω^*; man kann daher von einem „Wendezeigereffekt" sprechen. Die Neigung erfolgt — wie bei einem gewöhnlichen Kreisel — in einem solchen Sinne, daß der Impulsvektor des Kettenringes sich gleichsinnig parallel mit dem Vektor der äußeren Zwangsdrehung ω^* zu stellen sucht. Sofern man voraussetzt, daß die Kettenelemente für jedes t in einer Ebene liegen, läßt sich diese Erscheinung wie bei einem gefesselten gewöhnlichen Kreisel durch Betrachten des Gleichgewichtes von Kreiselmoment und Rückführmoment berechnen.

Die Analogien zwischen dem Verhalten des Kettenringes und eines Kreisels lassen sich noch weiter verfolgen. Lagert man die antreibende Achse des Kettenringes frei drehbar — zum Beispiel in einem Kardansystem — und übt ein konstantes Moment auf sie aus, so führt die fiktive Figurenachse des Kettenringes bei geeigneten Anfangsbedingungen eine „reguläre Präzession" aus.