

Stationäre Schwingungen in nichtlinearen dynamischen Systemen mit Totzeiten*

Von K. Magnus

1. Einführung. In Regelkreisen treten häufig Glieder auf, die mit Totzeiten behaftet sind. Bei ihnen verstreicht aus irgendwelchen gerätetechnischen Gründen stets eine gewisse Zeit — die Totzeit, auch Laufzeit genannt —, bis sich eine am Eingang des Gliedes auftretende Ursache als Wirkung im Ausgang bemerkbar macht. Soll beispielsweise das Mischungsverhältnis zweier Flüssigkeiten oder Gase auf Grund von Messungen an der Mischung geregelt werden, so darf die Messung selbst erst nach einer gewissen Mindestmischstrecke erfolgen. Die zum Durchlaufen der Mischstrecke gebrauchte Zeit geht als Totzeit in den Regelvorgang ein. Bei Verwendung von elektrischen Relaisvorrichtungen verstreicht zwischen dem Einschalten des Steuerstromes und der Kontaktgabe eine Ansprechzeit, die als Totzeit zu betrachten ist.

Mathematisch macht sich das Auftreten von Totzeiten dadurch bemerkbar, daß in den Differentialgleichungen Glieder vorkommen, bei denen das Argument um den Betrag der Totzeit in der Zeitachse verschoben ist. Die Gleichungen bilden dann ein System von einfachen Funktional-Differentialgleichungen, deren Lösungsmannigfaltigkeit im allgemeinen viel größer ist als bei demselben System ohne Totzeiten. Für lineare Systeme mit verzögerten Argumenten liegen zahlreiche Untersuchungen vor. *Perron*¹ und *E. Schmidt*² untersuchten Systeme n -ter Ordnung und gewinnen durch Diskussion der Wurzeln einer transzendenten charakteristischen Gleichung Bedingungen für den allgemeinen Charakter der vorhandenen Lösungen. *Collatz*³ behandelt ein System zweiter Ordnung und gibt Stabilitätsbereiche in Abhängigkeit von den Systemparametern an. *Hahn*⁴ gelingt es, für dasselbe System die Lösungen in Form konvergenter Reihen abzuleiten. Die Anwendung der eleganten Verfahren der *Laplace-Transformation* zur Lösung von Totzeitproblemen findet man bei verschiedenen Autoren z. B. *Bulgakow*⁵, *Küpfmüller*⁶ und *Oldenbourg-Sartorius*⁷.

Der einzige, dem Verfasser bekannt gewordene Versuch, auch nichtlineare Systeme mit Totzeitgliedern zu behandeln, findet sich in einer Arbeit von *Popow*⁸, die sich mit der Anwendung des von *Krylow* und *Bogoljubow* angegebenen Verfahrens der „Harmonischen Balance“ auf Systeme beliebiger Ordnung beschäftigt. Unter Verwendung der *Nyquistschen* Stabilitätskriterien gewinnt *Popow* Bestimmungsgleichungen für Amplitude und Frequenz von eventuell vorhandenen Dauerschwingungen. In einer früheren Arbeit⁹ konnte gezeigt werden, daß sich durch Kombination des Ansatzes von *Krylow-Bogoljubow* mit den *Routh-Hurwitzschen* Stabilitätskriterien ein sehr allgemein anwendbares Verfahren zur Bestimmung der wichtigsten Systemeigenschaften ableiten läßt. Das Ziel der jetzigen Untersuchungen ist der Nachweis, daß durch eine geringfügige Modifikation des *Popowschen* Ansatzes nun auch Totzeitprobleme in das früher gegebene Schema eingeordnet werden können. Es läßt sich also auch bei Auftreten von Totzeiten ein lineares Ersatzsystem ableiten, das keine Funktional-Differentialgleichungen enthält und zu dessen Lösung bekannte Methoden verwendet werden können.

Der Ansatz der *Harmonischen Balance* liefert eine über die Möglichkeiten der Methode der „Kleinen Schwingungen“ erheblich hinausgehende Theorie der ersten Näherung, die insbesondere dann vorteilhaft verwendet werden kann, wenn in den zu untersuchenden Systemen stationäre

* Diese Untersuchungen wurden im Rahmen eines Forschungsprogrammes durchgeführt, für dessen Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft zu danken ist.

¹ *O. Perron*, Math. Z. 45 (1939), S. 127.

² *E. Schmidt*, Math. Ann. 70 (1911), S. 499.

³ *L. Collatz*, Z. angew. Math. Mech. 25/27 (1947), S. 60.

⁴ *W. Hahn*, Z. angew. Math. Mech. 34 (1954), S. 316.

⁵ *B. W. Bulgakow*, Schwingungen, Bd. I, Kap. 4. Moskau 1949.

⁶ *K. Küpfmüller*, Tagungsheft „Die Laplace-Transformation und ihre Anwendung in der Regelungstechnik“. München 1955.

⁷ *R. C. Oldenbourg* und *H. Sartorius*, Dynamik selbsttätiger Regelungen. München 1944.

⁸ *E. P. Popow*, Doklady Akad. Nauk SSSR. 98 (1954), S. 545.

⁹ *K. Magnus*, VDI-Forschungsheft Nr. 451. Düsseldorf 1955.

Schwingungen auftreten können. Die im allgemeinen nichtharmonischen Schwingungen werden bei diesem Verfahren durch die Grundharmonische ihrer *Fourierzerlegung* ersetzt. Die Fehler des Verfahrens werden um so geringer sein, je weniger die Schwingungen von der Sinusform abweichen. Allgemeingültige Fehlerabschätzungen sind zwar bisher noch nicht gelungen, doch zeigte die Berechnung einiger auch streng zugänglicher Sonderfälle, daß die Fehler meist erstaunlich gering sind, selbst dann, wenn wegen starker Abweichungen der Schwingungen von der Sinusform die Brauchbarkeit des Näherungsansatzes von vornherein nicht feststeht. Wenn in einem System harmonische Schwingungen möglich sind — wie es im allgemeinen bei linearen Totzeitproblemen der Fall ist —, dann ist auch die Lösung des linearen nicht funktionalen Ersatzsystems streng gültig.

2. Herstellung eines linearen Ersatzsystems. Wie in der bereits erwähnten früheren Arbeit gezeigt wurde, kann man für ein System ohne Totzeit, das durch die Differentialgleichungen

$$\dot{x}_i = \sum_{v=1}^n f_{i_v}(x_v) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

mit den nichtlinearen Funktionen f_{i_v} beschrieben wird, ein lineares Ersatzsystem

$$\dot{x}_i = \sum_{v=1}^n (a_{i_v} x_v + a_{i_v}^* x_v) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

angeben, dessen Koeffizienten durch eine Integraltransformation aus den nichtlinearen Funktionen gewonnen werden:

$$a_{i_v} = \frac{1}{\pi A_v} \int_0^{2\pi} f_{i_v}(A_v \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi = K_s \{f_{i_v}\}, \quad (3)$$

$$a_{i_v}^* = \frac{1}{\pi A_v \omega} \int_0^{2\pi} f_{i_v}(A_v \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi = K_c \{f_{i_v}\}. \quad (4)$$

Diese kurz als *K-Transformation* bezeichnete Operation verwandelt die Funktionen f_{i_v} der Variablen x_v in die Funktionen a_{i_v} bzw. $a_{i_v}^*$ der Variablen A_v . Die Transformationsformeln (3) und (4) werden durch Einsetzen des harmonischen Ansatzes

$$x_v = A_v \sin(\omega t - \psi_v) \quad (5)$$

in die beiden Systeme (1) und (2) gewonnen. Bei harmonischer Veränderung der Argumente x_v werden auch die auf den rechten Seiten von (1) stehenden Funktionen $f_{i_v}(x_v)$ periodische Funktionen der Zeit sein, die in *Fourierreihen* zerlegt werden können. Berücksichtigt man von dieser Zerlegung nur jeweils das erste Glied, also die Grundharmonische, so kommt man durch einen Koeffizientenvergleich der rechten Seiten von (1) und (2) zu den angegebenen Transformationsformeln (3) und (4).

Dieser Ansatz kann nun in einfacher Weise auch für Systeme mit verzögerten Argumenten erweitert werden. Wenn die einzelnen Argumente x_v die Totzeiten τ_v haben, so hat man an Stelle von (1) das System:

$$\dot{x}_i = \sum_{v=1}^n f_{i_v}[x_v(t - \tau_v)] \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

Als Ersatzsystem wird auch jetzt wieder der frühere Ansatz (2) gewählt, nur sind für die Koeffizienten an Stelle von (3) und (4) andere Bestimmungsgleichungen abzuleiten. Geht man mit dem Ansatz (5) in die rechten Seiten von (6) ein, so erhält man wieder periodische Funktionen der Zeit, die sich in eine *Fourierreihe* zerlegen lassen. Bei Vernachlässigung der höheren Harmonischen dieser Entwicklungen ergibt der Koeffizientenvergleich mit den rechten Seiten von (2) die Bestimmungsgleichungen

$$a_{i_v} = \frac{1}{\pi A_v} \int_0^{2\pi} f_{i_v}[A_v \sin \omega(t - \tau_v)] \sin \omega t d(\omega t), \quad (7)$$

$$a_{i_v}^* = \frac{1}{\pi A_v \omega} \int_0^{2\pi} f_{i_v}[A_v \sin \omega(t - \tau_v)] \cos \omega t d(\omega t). \quad (8)$$

Setzt man darin

$$\begin{aligned}\sin \omega t &= \sin [\omega (t - \tau_v) + \omega \tau_v] \\ &= \sin \omega (t - \tau_v) \cos \omega \tau_v + \cos \omega (t - \tau_v) \sin \omega \tau_v,\end{aligned}$$

so folgt unmittelbar aus (7)

$$\begin{aligned}a_{i_v} &= \frac{1}{\pi A_v} \int_0^{2\pi} f_{i_v} [A_v \sin \omega (t - \tau_v)] \sin \omega (t - \tau_v) \cos \omega \tau_v d(\omega t) \\ &\quad + \frac{1}{\pi A_v} \int_0^{2\pi} f_{i_v} [A_v \sin \omega (t - \tau_v)] \sin \omega (t - \tau_v) \sin \omega \tau_v d(\omega t)\end{aligned}$$

oder

$$a_{i_v} = \cos \omega \tau_v K_s \{f_{i_v}\} + \omega \sin \omega \tau_v K_c \{f_{i_v}\}; \quad (9)$$

denn bei der Ausführung der Integration ist die Verschiebung des Integrationsbereiches um den Betrag $\omega \tau_v$ ohne Belang. Entsprechend folgt durch Einsetzen von

$$\cos \omega t = \cos \omega (t - \tau_v) \cos \omega \tau_v - \sin \omega (t - \tau_v) \sin \omega \tau_v$$

in (8)

$$\begin{aligned}a_{i_v}^* &= \frac{1}{\pi A_v \omega} \int_0^{2\pi} f_{i_v} [A_v \sin \omega (t - \tau_v)] \cos \omega (t - \tau_v) \cos \omega \tau_v d(\omega t) \\ &\quad + \frac{1}{\pi A_v \omega} \int_0^{2\pi} f_{i_v} [A_v \sin \omega (t - \tau_v)] \sin \omega (t - \tau_v) \sin \omega \tau_v d(\omega t)\end{aligned}$$

oder

$$a_{i_v}^* = \cos \omega \tau_v K_c \{f_{i_v}\} - \frac{\sin \omega \tau_v}{\omega} K_s \{f_{i_v}\}. \quad (10)$$

Die Koeffizienten des linearen Ersatzsystems (2) sind nunmehr grundsätzlich frequenzabhängig, während eine Frequenzabhängigkeit bei Systemen ohne Totzeiten nur dann auftrat, wenn Funktionen f_{i_v} vom Hystereseyp vorhanden waren.

Das lineare Ersatzsystem ergibt in bekannter Weise eine charakteristische Gleichung

$$|a_{i_v} + a_{i_v}^* \lambda - \delta_{i_v} \lambda| = \sum_{\nu=0}^n c_{n-\nu} \lambda^\nu = 0, \quad (11)$$

deren Koeffizienten c_ν für die weitere Rechnung gebraucht werden. δ_{i_v} ist das bekannte Kronecker-symbol ($\delta_{ii} = 1$, $\delta_{i_v} = 0$ für $i \neq v$).

3. Dauerschwingungen und ihre Stabilität. Dauerschwingungen treten auf, wenn die Koeffizienten von (2) solche Werte annehmen, daß sich das System gerade auf der Stabilitätsgrenze befindet. Legt man die Routh-Hurwitzschen Stabilitätskriterien zugrunde, so muß $H_\nu > 0$ ($\nu = 1, 2, \dots, n-2$), aber

$$R = H_{n-1} = 0 \quad (12)$$

sein¹. R ist die Routhsche Diskriminante, H_ν sind die Hurwitzdeterminanten. Die auf der Stabilitätsgrenze geltenden Frequenzen ω_s bekommt man in einfacher Weise aus

$$\omega_s^2 = \frac{c_n H_{n-3}}{H_{n-2}} \quad (H_0 = 1; n \geq 3), \quad (13)$$

wobei c_n das konstante Glied der charakteristischen Gleichung (11) ist². Die Beziehungen (12) und (13) enthalten als Unbekannte die $n+1$ Größen ω_s und A_v . Will man diese bestimmen, so sind also weitere $n-1$ Gleichungen notwendig, die sich aus dem linearen Ersatzsystem

¹ Vgl. Fußnote 9 von S. 341, dort Kap. 2.2.

² L. Cremer, Z. angew. Math. Mech. 25/27 (1947), S. 161.

unschwer ableiten lassen. Es sind die $n-1$ voneinander unabhängigen Verhältnisse der Amplituden A_v , die wie folgt gewonnen werden können:

Mit dem Ansatz

$$x_v = A_v e^{i t}$$

folgt aus (2)

$$A_i \lambda = \sum_{v=1}^n (a_{i v} A_v + a_{i v}^* A_v \lambda). \quad (14)$$

Wählt man A_n als Bezugsamplitude und bildet die Amplitudenverhältnisse

$$\kappa_i = \frac{A_i}{A_n}, \quad \kappa_n = 1,$$

so folgt ein inhomogenes lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der $n-1$ Größen κ_i :

$$\sum_{v=1}^{n-1} \kappa_v (a_{i v} + a_{i v}^* \lambda - \delta_{i v} \lambda) = -a_{i n} - a_{i n}^* \lambda \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (15)$$

Für λ ist dabei

$$\lambda = j \omega_s \quad (j = \sqrt{-1}),$$

mit ω_s aus (13) einzusetzen.

Die Lösung von (15) ist

$$\kappa_v = \frac{D_v}{D_N} \quad (v = 1, 2, \dots, n-1), \quad (16)$$

mit der Nennerdeterminante

$$D_N = |a_{i v} + j \omega_s a_{i v}^* - \delta_{i v}^*|.$$

Die Zählerdeterminante D_v folgt aus D_N , wenn dort an Stelle der v . Spalte der Wert $(-a_{i n} - j a_{i n}^* \omega_s)$ eingesetzt wird. Die Indizes i und v laufen jeweils von 1 bis $n-1$.

Die Werte κ_v für die Amplitudenverhältnisse sind komplex, d. h. zwischen den Maximalamplituden der einzelnen Koordinaten existieren irgendwelche Phasenverschiebungen, die aus dem Verhältnis von Imaginärteil zum Realteil leicht ausgerechnet werden könnten. Sie sind in unserem Falle jedoch unwichtig, da die Phasenwinkel bei der Durchführung der K -Transformationen (3) und (4) lediglich eine Verschiebung des Integrationsbereiches verursachen, also auf das Ergebnis keinen Einfluß haben. Wir interessieren uns daher weiterhin nur für die Beträge der Amplitudenverhältnisse und setzen

$$|A_v| = |\kappa_v| A_n \quad (v = 1, 2, \dots, n-1), \quad (17)$$

wobei A_n als Bezugsamplitude natürlich reell angenommen werden kann.

Mit (12), (13) und (17) hat man nunmehr $n+1$ Gleichungen zur Bestimmung der $n+1$ Unbekannten, also der Frequenz und der Amplitudenverteilung von Dauerschwingungen zur Verfügung.

Um auch die Stabilität der Dauerschwingungen beurteilen oder die Frage beantworten zu können, ob ein gegebenes System bzw. seine Stabilitätsgrenze gefährlich oder ungefährlich ist (im Sinne des von *Bautin* eingeführten Gefährlichkeitsbegriffes), muß auch das Verhalten in der Nachbarschaft der Stabilitätsgrenzen untersucht werden. In dieser Nachbarschaft ist (12) nicht mehr erfüllt. Auch die Frequenz (13) gilt nicht mehr streng, jedoch wird dieser Wert für die weitere Rechnung beibehalten. Es wird also für Amplitudenwerte, die nicht den oben ausgerechneten Werten von Dauerschwingungen entsprechen, für die Frequenz derjenige Wert eingesetzt, der sich ergeben würde, wenn die gewählte Amplitude zu einer Dauerschwingung gehörte, wenn sich also das System genau auf der Stabilitätsgrenze befinden würde. Dieser Näherungsansatz macht die weitere Rechnung erst möglich. Er hat zur Folge, daß die für eine Umgebung der Stabilitätsgrenze erhaltenen Aussagen quantitativ etwas verfälscht werden, jedoch werden Fragen qualitativen Charakters wie z. B. die nach der Stabilität und der Gefährlichkeit in richtiger Weise beantwortet.

Um das Verhalten eines Systems in der Umgebung der Stabilitätsgrenze untersuchen zu können, müssen Veränderungen der Amplituden A_v betrachtet werden. Da die Koeffizienten $a_{i v}$ und $a_{i v}^*$ nach (3) und (4) Funktionen der A_v sind, so kann man (17) auch als $n-1$ Beziehungen

zwischen den Amplituden A_ν auffassen:

$$f_\nu(A_1, A_2, \dots, A_n) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n-1), \quad (18)$$

wobei (13) zu berücksichtigen ist, da auch ω_s in (17) vorkommt.

Die Lösungen des Gleichungssystems (18) seien

$$A_\nu = g_\nu(A_n) \quad (\nu = 1, 2, \dots, n-1). \quad (19)$$

Zu jedem Wert der Bezugsamplitude A_n gehört also eine Schar von Werten A_1 bis A_{n-1} . Folglich können auch zu jedem A_n die Werte der Koeffizienten $a_{i\nu}$ und $a_{i\nu}^*$ angegeben werden. Bei einer Darstellung im Raume der Koeffizienten gibt es also zu jedem A_n einen Punkt, der sich bei Veränderungen von A_n längs einer Kurve, der „ A -Kurve“ bewegt. In früheren Untersuchungen wurde nun gezeigt, daß aus der Lage dieser A -Kurve zur Stabilitätsgrenzkurve oder Stabilitätsgrenzfläche die interessierenden Eigenschaften von Systemen, deren Ersatzsystem die Form (2) hat, abgelesen werden können. Die Ergebnisse können auch analytisch formuliert werden, wenn man die Abhängigkeit der Stabilitätsgrenze bestimmenden *Routhschen* Diskriminante von der Bezugsamplitude $A_n = A$ berücksichtigt. R ist nach Definition eine Funktion der Koeffizienten $a_{i\nu}$ und $a_{i\nu}^*$. Da diese von den A_ν abhängen und wegen (19) ist also R auch eine Funktion von A , deren Differentialquotient

$$R' = \frac{dR}{dA} = \sum_{i=1}^n \sum_{\nu=1}^n \left(\frac{\partial R}{\partial a_{i\nu}} \frac{da_{i\nu}}{dA} + \frac{\partial R}{\partial a_{i\nu}^*} \frac{da_{i\nu}^*}{dA} \right) \frac{dA_\nu}{dA} \quad (20)$$

alle wichtigen Eigenschaften zu bestimmen gestattet. Es gilt¹:

1. Die aus (12), (13) und (17) ausgerechneten Dauerschwingungen sind stabil, wenn

$$(R')_{R=0} > 0 \quad (21)$$

ist. Ist dieser Wert negativ, so sind die Dauerschwingungen instabil.

2. Eine Stabilitätsgrenze ist gefährlich im Kleinen (im Sinne von *Bautin*), wenn in ihrer Nähe

$$(R')_{A=0} < 0 \quad (22)$$

gilt. Bei Ungefährlichkeit im Kleinen ist der gleiche Ausdruck positiv.

3. Eine Stabilitätsgrenze ist gefährlich im Großen, wenn in ihrer Nähe

$$(R')_{A \rightarrow \infty} < 0 \quad (23)$$

gilt. Bei Ungefährlichkeit im Großen ist der Ausdruck positiv.

4. Die Erregung von Dauerschwingungen ist weich, wenn $R(0) < 0$ ist und zwischen dem Amplitudenwert der betrachteten Dauerschwingung $A = A_d$ und dem Wert $A = 0$ keine weitere Lösung des Systems (12), (13), (17), also keine weitere mögliche Dauerschwingung existiert. Hieraus folgt z. B. sofort, daß Systeme, die nur eine, und zwar stabile Dauerschwingungsamplitude besitzen, stets weich erregt werden können.

5. Die Erregung von Dauerschwingungen ist hart, wenn außer der betrachteten Amplitude $A = A_d$ der Dauerschwingung noch mindestens ein kleinerer Wert $A = A_c < A_d$ existiert, der zu einer instabilen Dauerschwingung gehört.

Bezüglich weiterer Einzelheiten muß auf die zitierte frühere Arbeit² verwiesen werden.

4. Beispiele. Es sollen im folgenden zwei besonders einfache Beispiele behandelt werden, die auch streng mit elementaren Mitteln lösbar sind. Der Fehler der Näherungsrechnung ergibt sich dann unmittelbar durch Vergleich. Ein komplizierteres nicht mehr elementar lösbares Problem dieser Art soll gesondert veröffentlicht werden.

a) Ein System erster Ordnung. *E. Schmidt*³ hat nachgewiesen, daß die lineare Funktional-Differentialgleichung

$$\dot{x} + cx(t - \tau) = 0, \quad (24)$$

harmonische Lösungen von der Form

$$x = a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad (25)$$

¹ Vgl. Fußnote 9 von S. 341, dort Kap. 2.3.

² Vgl. Fußnote 9 von S. 341.

³ Vgl. Fußnote 2 von S. 341.

mit beliebigen Konstanten a und b unter der Bedingung besitzt, daß

$$\omega = c = \frac{\pi}{2\tau} \pm \frac{2n\pi}{\tau} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (26)$$

ist. In jedem anderen Falle gibt es nur die triviale Lösung $x \equiv 0$.

Nach dem hier beschriebenen Verfahren bekommt man für das Totzeitglied einen linearen Ersatzausdruck

$$cx(t - \tau) = ax + a^* \dot{x}. \quad (27)$$

Mit $f(x) = cx$ folgt aus (3) und (4)

$$K_s\{f\} = c, \quad K_c\{f\} = 0,$$

so daß man aus (9) und (10) die Ersatzkoeffizienten

$$a = c \cos \omega \tau, \quad a^* = -\frac{c \sin \omega \tau}{\omega} \quad (28)$$

erhält. Für (24) ergibt sich somit die lineare gewöhnliche Ersatz-Differentialgleichung

$$\dot{x} \left(1 - \frac{c \sin \omega \tau}{\omega} \right) + xc \cos \omega \tau = 0. \quad (29)$$

Wenn periodische Lösungen dieser Gleichung möglich sein sollen, muß notwendigerweise

$$1 - \frac{c \sin \omega \tau}{\omega} = 0, \quad c \cos \omega \tau = 0, \quad (30)$$

gelten. Daraus folgt aber die schon von *Schmidt* streng abgeleitete Beziehung (26). Die Frequenz wird also von der Näherungslösung fehlerfrei wiedergegeben. Die Amplitude bleibt unbestimmt, wie es bei einem linearen Problem nicht anders zu erwarten ist.

Nun soll (24) durch Einführung der Vorzeichenfunktion sgn zu einer nichtlinearen Differentialgleichung gemacht werden:

$$\dot{x} + c \operatorname{sgn} x(t - \tau) = 0. \quad (31)$$

Es liegt hier ein besonders einfacher Fall einer „Zweipunktregelung“ vor, da das zweite Glied nur der beiden diskreten Werte $+c$ und $-c$ fähig ist. Die strenge Lösung von (31) ist

$$\dot{x} = \mp c, \quad x = \mp ct + x_0.$$

Beginnt man die Zeitählung beim Nulldurchgang der x -Koordinate, so bekommt man als $x(t)$ -Kurve eine Dreieckschwingung, wie sie Abb. 1 zeigt. Ihre Amplitude ist

$$A = c\tau, \quad (32)$$

ihre Frequenz

$$\omega = \frac{\pi}{2\tau}. \quad (33)$$

Nach der Näherungsrechnung hat man zunächst

$$c \operatorname{sgn} x(t - \tau) = ax + a^* \dot{x}. \quad (34)$$

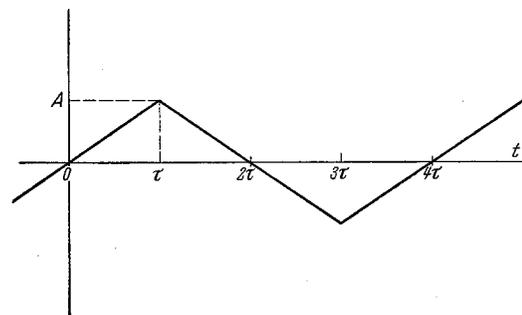


Abb. 1. Amplituden-Zeit-Kurve für die periodische Grundlösung von (31), (τ = Totzeit).

Für die Sprungfunktion $f(x) = c \operatorname{sgn} x$ folgt aus (3) und (4) bzw. aus einer Tafel von K -Transformierten:

$$K_s\{f\} = \frac{4c}{\pi A}, \quad K_c\{f\} = 0.$$

Dann ergibt (9) und (10)

$$a = \frac{4c}{\pi A} \cos \omega \tau, \quad a^* = -\frac{4c}{\pi A \omega} \sin \omega \tau,$$

so daß als lineare Ersatzdifferentialgleichung für (31)

$$\dot{x} \left(1 - \frac{4c}{\pi A \omega} \sin \omega \tau \right) + x \frac{4c}{\pi A} \cos \omega \tau = 0 \quad (35)$$

erhalten wird. Periodische Lösungen dieser Differentialgleichung sind nur möglich für

$$1 - \frac{4c}{\pi A \omega} \sin \omega \tau = 0, \quad \frac{4c}{\pi A} \cos \omega \tau = 0. \quad (36)$$

Da die Amplitude A nur positiver Werte fähig ist, folgen also Lösungen mit den Frequenzen und Amplituden

$$\omega = \frac{1}{\tau} \left(\frac{\pi}{2} \pm 2n\pi \right) \quad (n = 0, 1, 2 \dots), \quad (37)$$

$$A = \frac{4c}{\pi \omega} = \frac{4c\tau}{\pi \left(\frac{\pi}{2} \pm 2n\pi \right)}.$$

Im Falle $n=0$ ist der Frequenz Ausdruck identisch mit der strengen Lösung (33), während bei der Amplitude A der Faktor $8/\pi^2$ an Stelle von 1 steht, also ein um 18,9% zu kleiner Wert erhalten wird.

Für andere Werte von n bekommt man Schwingungen, bei denen innerhalb der Totzeit ein mehrmaliges Umschalten erfolgt. Wie man sich leicht überlegt, folgen dafür aus (37) jeweils die streng richtigen Frequenzwerte, jedoch Amplitudenwerte, die stets um den Faktor $8/\pi^2$ zu klein sind. Derartige höherfrequente Schwingungen sind zwar theoretisch und unter gewissen Voraussetzungen auch praktisch möglich, jedoch genügt zu ihrem Zustandekommen nicht die Vorgabe irgendwelcher bestimmter Anfangsbedingungen; es muß vielmehr eine Vorgeschichte von der Zeitdauer τ mit genau definierten Nulldurchgängen vorhanden sein.

b) Eine unstetige Regelung zweiter Ordnung. Ergänzt man die Differentialgleichung (31) noch durch ein „Schleppglied“, so findet man

$$T\ddot{x} + \dot{x} + c \operatorname{sgn} x(t-\tau) = 0, \quad (28)$$

wobei T als eine Zeitkonstante aufgefaßt werden kann. Eine Differentialgleichung dieser Art erhält man zum Beispiel bei der näherungsweise Berechnung der Kursregelung von Schiffen oder Flugzeugen, wenn nur die Momentengleichung berücksichtigt wird und der Regler selbst nach dem Schwarz-Weiß-Prinzip (Zweipunktregler) arbeitet.

Zunächst soll eine periodische strenge Lösung von (38) angegeben werden. Im Bereich $x(t-\tau) > 0$ folgt aus (38)

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= B_1 e^{-\frac{t}{T}} - c, \\ x &= -B_1 T e^{-\frac{t}{T}} - ct + B_2 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

mit den beiden Integrationskonstanten B_1 und B_2 . Für den Bereich $x(t-\tau) < 0$ erhält man entsprechende Ausdrücke, bei denen nur das Vorzeichen von c verändert ist. Wenn sich die Lösungen aus beiden Bereichen zu einer periodischen Gesamtlösung zusammensetzen sollen, so müssen die folgenden Anstückelungsbedingungen gelten:

$$\left. \begin{aligned} x(t_1) &= -x(0), \\ \dot{x}(t_1) &= -\dot{x}(0), \\ x(t_1 - \tau) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Die ersten beiden Bedingungen bringen zum Ausdruck, daß periodische Lösungen in beiden Bereichen symmetrisch sein müssen, die dritte Bedingung definiert die Zeit t_1 , in der die Lösung (39) die Grenze ihres Gültigkeitsbereiches erreicht. Hierbei ist t_1 gleich der halben Schwingungszeit.

Durch Einsetzen von (39) in (40) bekommt man zunächst zwei Gleichungen für B_1 und B_2 , aus denen die beiden Integrationskonstanten ausgerechnet werden können,

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{2c}{1 + e^{-\frac{1}{T}}}, \\ B_2 &= cT + \frac{c}{2} t_1, \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

sowie eine Gleichung für die unbekannte Schaltzeit t_1

$$t_1 - 2(\tau + T) + \frac{4T e^{\frac{\tau}{T}}}{1 + e^{-\frac{t_1}{T}}} = 0. \quad (42)$$

Hat man aus dieser Gleichung t_1 — zum Beispiel durch Iteration — gefunden, so ist die Frequenz der Schwingung

$$\omega = \frac{\pi}{t_1}. \quad (43)$$

Die Amplitude der periodischen Lösung folgt aus $\dot{x}(t_0) = 0$ und $x(t_0) = A$. Aus (39) findet man leicht

$$t_0 = -T \ln \frac{c}{B_1}, \quad (44)$$

$$A = B_2 - cT \left(1 - \ln \frac{c}{B_1}\right), \quad (45)$$

oder unter Berücksichtigung von (41) nach Umformung:

$$A = c \left\{ \frac{t_1}{2} + T \ln \left[\frac{1}{2} \left(1 + e^{-\frac{t_1}{T}} \right) \right] \right\}. \quad (46)$$

Für gegebene Parameter T , τ und c des Systems bestimmt man also zunächst aus (42) den Wert t_1 , der wegen (43) unmittelbar die Frequenz der Schwingung ergibt. Danach kann aus (46) der zugehörige Wert für die Amplitude A errechnet werden. Man beachte, daß die Frequenz der Schwingung nicht von dem Parameter c abhängt, während die Amplitude proportional zu ihm ist.

Nach der Näherungsrechnung bekommt man zunächst denselben linearen Ersatzausdruck (34) wie im vorigen Beispiel. Auch die Ausdrücke für die Koeffizienten a und a^* ändern sich nicht. Die lineare Ersatzdifferentialgleichung wird demnach

$$T \ddot{x} + \left(1 - \frac{4c}{\pi A \omega} \sin \omega \tau\right) \dot{x} + \left(\frac{4c}{\pi A} \cos \omega \tau\right) x = 0. \quad (47)$$

Die *Routhsche* Diskriminante reduziert sich in diesem einfachen Fall auf den Faktor von \dot{x} , während das Quadrat der Frequenz in bekannter Weise als Quotient der Faktoren von x und \ddot{x} erhalten wird. Man hat somit zur Bestimmung stationärer Schwingungen die beiden Gleichungen

$$R = 1 - \frac{4c}{\pi A \omega} \sin \omega \tau = 0, \quad (48)$$

$$\omega^2 = \frac{4c}{\pi A T} \cos \omega \tau. \quad (49)$$

Durch Elimination der Amplitude folgt daraus eine Gleichung für die Frequenz:

$$\operatorname{tg} \omega \tau = \frac{1}{\omega T}. \quad (50)$$

Da A nur positiver Werte fähig ist, so sieht man aus (48) und (49), daß nur solche Lösungen für ω physikalisch sinnvoll sind, für die $\cos \omega \tau > 0$ und $\sin \omega \tau > 0$ ist.

Hat man ω ermittelt, so folgt die Amplitude sofort z. B. aus (48)

$$A = \frac{4c}{\pi \omega} \sin \omega \tau. \quad (51)$$

Wie bei der strengen Lösung ist A proportional zu c , während ω von c unabhängig ist.

Für ein festes Wertepaar c und T ist der prozentuale Fehler der Näherungslösungen für ω und A als Funktion der Totzeit τ ausgerechnet und in Abb. 2 aufgetragen worden.

Zur Untersuchung der Stabilität sowie der Gefährlichkeit wird gebildet

$$\frac{dR}{dA} = \frac{\partial R}{\partial A} + \frac{\partial R}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dA}. \quad (52)$$

Mit dem Ausdruck von (48) bekommt man

$$\frac{dR}{dA} = \frac{4c}{\pi A^2 \omega} \sin \omega \tau - \frac{\omega T (\sin \omega \tau - \tau \cos \omega \tau)}{A (2 \cos \omega \tau + \tau \sin \omega \tau)} \quad (53)$$

Nach (21) entscheidet das Vorzeichen dieses Ausdruckes für den Fall $R = 0$ über die Stabilität. Berücksichtigt man (50) und (51), so folgt aus (53)

$$\left(\frac{dR}{dA}\right)_{R=0} = \frac{T + \tau + \tau \omega^2 T^2}{A(2T + \tau)} > 0. \quad (54)$$

Die ausgerechnete Dauerschwingung ist also stabil.

Zur Klärung der Frage der Gefährlichkeit im Kleinen ist in (53) der Grenzübergang $A \rightarrow 0$ vorzunehmen. Wegen $\cos \omega \tau \rightarrow 0$ und $\sin \omega \tau \rightarrow +1$ findet man

$$\left(\frac{dR}{dA}\right)_{A=0} \rightarrow +\infty.$$

Die Stabilitätsgrenze des Systems ist also nach (22) ungefährlich im Kleinen.

Im anderen Grenzfalle $A \rightarrow \infty$ bekommt man

$$\left(\frac{dR}{dA}\right)_{A \rightarrow \infty} \rightarrow 0,$$

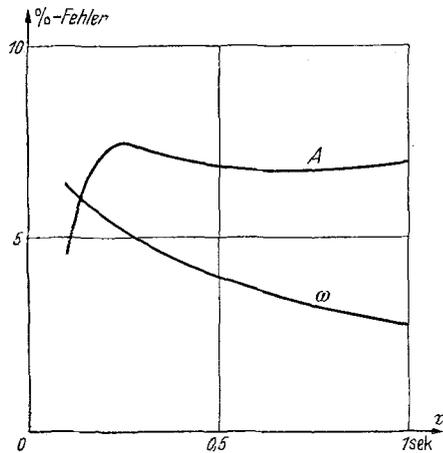


Abb. 2. Prozentualer Fehler der Näherungen für die Amplitude A und die Frequenz ω als Funktionen der Totzeit τ für das Beispiel b).

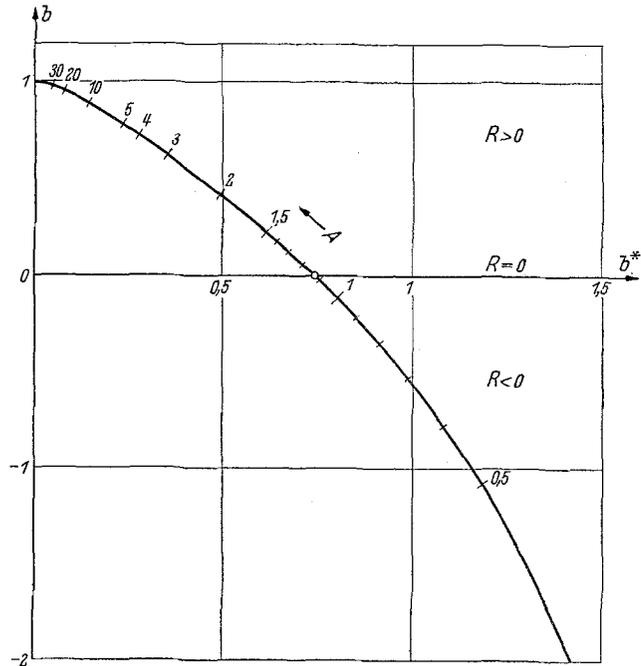


Abb. 3. Stabilitätsdiagramm für das Beispiel b).

wobei, wie man leicht feststellt, der Differentialquotient von positiven Werten gegen Null geht. Obwohl die Stabilitätsgrenze des Systems nach dem Kriterium (23) weder als gefährlich noch als ungefährlich im Großen bezeichnet werden kann, wird sie praktisch ungefährlich im Großen sein, da bei großen, aber endlichen Werten für A auf jeden Fall

$$\left(\frac{dR}{dA}\right) > 0$$

ist.

Man kann die hier analytisch aus den Kriterien (21), (22) und (23) ermittelten Eigenschaften auch durch eine Untersuchung des Verlaufs der „ A -Kurve“ bekommen. Wir zeichnen diese Kurve zusammen mit der Stabilitätsgrenzkurve in der Ebene der beiden Koeffizienten b und b^* , die durch Umschreiben von (47) in die Form

$$\ddot{x} + b \dot{x} + b^* x = 0$$

erhalten werden. b ist dann bis auf den Faktor $1/T$ gleich dem Wert R von (48), b^* ist gleich dem Wert ω^2 von (49). Aus (49) kann nun zu jedem Wert von A der zugehörige Wert von ω ausgerechnet werden. Dann folgt aus (48) für jedes Wertepaar A, ω der entsprechende Wert von R

und damit auch von b . Die so erhaltene A -Kurve in der bb^* -Ebene zeigt Abb. 3, wobei als Parameter auf der Kurve die Werte von A angeschrieben wurden. Die Kurve kommt aus dem negativ Unendlichen und geht mit $A \rightarrow \infty$ gegen den Punkt $b = 1; b^* = 0$. Die Stabilitätsgrenzkurve (R -Kurve) ist nach (48) durch $R = 0$ gegeben, d. h. in unserem Falle durch $b = 0$. Im oberen Quadranten ist $R > 0$ (stabiler Bereich), im unteren ist $R < 0$ (instabiler Bereich).

A -Kurve und R -Kurve schneiden sich im Punkte $A_0 = 1,12; b^* = \omega^2 = 0,740$. Damit sind Amplitude und Frequenz der Dauerschwingung bestimmt. Ihre Stabilität folgt einfach aus der Tatsache, daß die A -Kurve mit wachsendem A vom instabilen Bereich kommend in den stabilen eindringt. Für kleine Werte von A läuft die A -Kurve auf den Stabilitätsbereich zu, folglich ist die Stabilitätsgrenze als ungefährlich im Kleinen anzusprechen. Im Grenzfalle $A \rightarrow \infty$ wird die A -Kurve parallel zur Stabilitätsgrenze; das System ist also streng genommen im Großen neutral, jedoch kann es praktisch als im Großen ungefährlich angesehen werden, da die A -Kurve für endliche große Werte von A noch immer von der Stabilitätsgrenze fortläuft. Nach den im Kap. 3 angegebenen Kriterien können die Dauerschwingungen weich erregt werden, denn es existiert nur ein Schnittpunkt von A - und R -Kurve, und dieser gehört zu einer stabilen Dauerschwingung.

(Eingegangen am 14. Februar 1956.)

Anschrift des Verfassers: Dr. Kurt Magnus, Freiburg/Breisgau, Unterlinden 7.