

REGELUNGSTECHNIK

Moderne Theorien und ihre Verwendbarkeit

Bericht über die Tagung in Heidelberg
vom 25. bis 29. September 1956
veranstaltet von der
VDI/VDE-Fachgruppe Regelungstechnik
unter Mitwirkung des
Fachausschusses Regelungsmathematik der
Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik (GAMM)

Im Auftrage der VDI/VDE-Fachgruppe Regelungstechnik
herausgegeben von
Gerd Müller

Mit 898 Bildern und 48 Tabellen

1957



VERLAG R. OLDENBOURG MÜNCHEN



1457.3745

© 1957 R. Oldenbourg, München

Alle Rechte vorbehalten. Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es auch nicht gestattet, das Buch oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

Gesamtherstellung: R. Oldenbourg Graphische Betriebe GmbH, München. Printed in Germany

Näherungskriterien für Stabilität und Gefährlichkeit in nichtlinearen Regelkreisen

Von K. Magnus, Freiburg i. Br. (Deutschland)

Wenn man nach der von *Krylov* und *Bogoljubov* vorgeschlagenen Methode der „Harmonischen Balance“ für das Gleichungssystem eines nicht-linearen Regelkreises ein lineares Ersatzsystem mit amplitudenabhängigen Koeffizienten ableitet, so lassen sich mit Hilfe der *Hurwitz*-Bedingungen Näherungskriterien für die Stabilität nichtlinearer Regelkreise finden. Gleichzeitig kann die Frage nach der Gefährlichkeit oder Ungefährlichkeit der Stabilitätsgrenzen in einfacher Weise analytisch oder geometrisch beantwortet werden. Der bisher nur für kleine Amplituden verwendete Gefährlichkeitsbegriff läßt sich damit so erweitern, daß er auch „im Großen“ gültig ist.

With the aid of the *Krylov-Bogoljubov* method of „Harmonic Balance“ it is possible to transform a system of non-linear differential equations representing a control-loop into a set of linear differential equations, the coefficients of which depend on the amplitudes of the periodic solutions. Applying the *Hurwitz* criteria to the latter, approximating criteria are obtained for the stability of nonlinear control systems. Likewise the method offers simple analytical or geometrical ways of determining dangerous resp. non-dangerous parts of the margins of stability. The concept of dangerousness — up to now being used only for small oscillations — can be generalised so that it is valid „in the large“ too.

Einleitung

Während für die Beurteilung der Stabilität linearer Regelkreise zahlreiche Kriterien vorliegen, sind zur Untersuchung von Stabilitätsproblemen in nichtlinearen Regelkreisen als strenge Verfahren nur die von *Ljapunov* und *Poincaré* bekannt geworden. Ihre praktische Verwendbarkeit für Regelaufgaben ist jedoch gering, da zu ihrer Anwendung äußerst umfangreiche Rechenarbeiten erforderlich sind. Wenngleich es gelungen ist (*Lur'e* und *Letov*), das *Ljapunov*sche Verfahren für Regelkreise, bei denen lediglich eine nichtlineare Funktion (und zwar in der Stellgliedcharakteristik) auftritt, so zu vereinfachen, daß es routinemäßig angewendet werden kann, so bleibt dennoch das Bedürfnis nach allgemeiner brauchbaren Kriterien bestehen. Solange die Differentialgleichungen des Regelkreises eine niedere Ordnung haben, wird man mit Untersuchungen im Phasenraum (Phasenporträt) zum Ziel kommen können; bei Systemen höherer Ordnung ist vielfach das auf *Krylov* und *Bogoljubov* zurückgehende Verfahren der „Harmonischen Balance“ verwendet worden. *Goldfarb* [1] kombinierte es mit dem Nyquistkriterium und erhielt so Näherungskriterien für die Stabilität nichtlinearer Systeme. Entsprechendes gelang *Kochenburger* [2] mit Hilfe der „Beschreibungsfunktion“, deren Definition den Ansatz von *Krylov-Bogoljubov* implizit enthält.

Hier soll nun gezeigt werden, daß eine Kombination des Ansatzes der Harmonischen Balance mit den *Routh-Hurwitz*schen Kriterien zu sehr allgemein anwendbaren Näherungskriterien führt, mit deren Hilfe nicht nur die Stabilität, sondern auch die Frage nach der Gefährlichkeit bzw. Ungefährlichkeit der Stabilitätsgrenzen beurteilt werden kann. Abweichend von den genannten Verfahren (*Goldfarb*, *Kochenburger*) wird hier für das System der beschreibenden Differentialgleichungen ein lineares Ersatzsystem geschaffen, dessen Koeffizienten nicht konstant (wie bei der Methode der „Kleinen Schwingungen“), sondern Funktionen der Amplitude sind.

Stabilitätskriterien

Die Differentialgleichungen des Regelkreises seien in der Form

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

gegeben, wobei die f_i irgendwelche, im allgemeinen nicht-lineare Funktionen der n Koordinaten x_i sind. Man kann nun zeigen [3], daß sich für (1) ein lineares Ersatzsystem von der Form

$$\dot{x}_i = \sum_{v=1}^n (a_{iv} x_v + a_{iv}^* \dot{x}_v) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

angeben läßt, dessen Koeffizienten durch einen Vergleich harmonischer Lösungen von (2) mit der Grundharmonischen periodischer Lösungen von (1) („Harmonische Balance“) als eine Art Fourierkoeffizienten gewonnen werden. Für den häufig vorkommenden Sonderfall, daß

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{v=1}^n f_{iv}(x_v),$$

ist, gewinnt man die Koeffizienten beispielsweise durch die Integraltransformationen

$$\left. \begin{aligned} a_{iv} &= \frac{1}{\pi A_v} \int_0^{2\pi} f_{iv}(A_v \sin \Phi) \sin \Phi d\Phi = K_s \{f_{iv}\}, \\ a_{iv}^* &= \frac{1}{\pi A_v \omega} \int_0^{2\pi} f_{iv}(A_v \sin \Phi) \cos \Phi d\Phi = K_c \{f_{iv}\}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

die für eine Anzahl häufig vorkommender Funktionen unmittelbar aus Tabellen [1, 3] entnommen werden können. Die „ K -Transformationen“ (3) verwandeln die Funktionen f_{iv} der Variablen x_v in die Funktionen a_{iv} bzw. a_{iv}^* der Variablen A_v . Die a_{iv} sind übrigens nichts anderes als die „Beschreibungsfunktionen“ der durch die f_{iv} gekennzeichneten nichtlinearen Elemente des Regelkreises.

Aus dem Ersatzsystem (2) bekommt man nun in bekannter Weise mit dem Ansatz

$$x_v = A_v e^{\lambda t}$$

ein homogenes Gleichungssystem für die Amplitudenfaktoren A_v :

$$\sum_{v=1}^n A_v (a_{iv} + a_{iv}^* \lambda - \delta_{iv} \lambda) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

δ_{iv} ist das Kroneckersymbol, für das $\delta_{ii} = 1$ und $\delta_{iv} = 0$ für $i \neq v$ gilt. (4) hat nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Determinante des Systems verschwindet. Diese Forderung führt auf die charakteristische Gl.

$$|a_{iv} + a_{iv}^* \lambda - \delta_{iv} \lambda| = \sum_{\mu=0}^n c_{n-\mu} \lambda^\mu = 0. \quad (5)$$

Man kann übrigens zeigen, daß dieselbe charakteristische Gleichung auch ohne das Verfahren der Harmonischen Balance aus dem System (1) durch einen allgemeineren Variationsansatz gewonnen werden kann, dessen Verwendung für Schwingungs- und Regelungsprobleme von *Klotter* [4] vorgeschlagen wurde.

Eine für das Ersatzsystem existierende Gleichgewichtslage ist stabil, wenn alle Koeffizienten c_v sowie die aus ihnen gebildeten Hurwitzdeterminanten H_v positiv sind. Angestoßene Schwingungen kommen in dem durch diese Bedingungen gekennzeichneten Stabilitätsbereich wieder zur Ruhe. An der Grenze des Stabilitätsbereiches, deren uns hier interessierender Teil durch die Bedingung

$$R = H_{n-1} = 0, \tag{6}$$

($R = Routhsche$ Diskriminante) gegeben ist, sind dagegen stationäre Schwingungen möglich. Wie verschiedene Autoren gezeigt haben, gilt auf der „Schwinggrenze“ die Frequenz

$$\omega^2 = \frac{c_n H_{n-3}}{H_{n-2}}, \quad (H_0 = 1). \tag{7}$$

Während lineare Regelkreise nur in praktisch kaum vorkommenden Sonderfällen genau auf der Schwinggrenze arbeiten, ist dieser Fall in nichtlinearen Regelkreisen von entscheidender Bedeutung. Bei ihnen nehmen die amplitudenabhängigen Koeffizienten oft gerade solche Werte an, daß die Bedingungen für Dauerschwingungen erfüllt sind. Zur Berechnung der Frequenz ω sowie der n Amplituden A_v derartiger Schwingungen stehen nun außer den beiden Beziehungen (6) und (7) noch die Gleichungen (4) zur Verfügung. Da (4) ein System von n homogenen Gleichungen ist, so sind durch sie nur die Verhältnisse der Amplituden bestimmbar. Wählt man eine der Amplituden, z. B. $A_1 = A$, als Bezugsamplitude (man wird dazu die Amplitude der am meisten interessierenden Koordinate, also z. B. der Regelabweichung, wählen), so lassen sich aus (4) die Amplituden aller anderen Koordinaten als Funktionen von A und ω ermitteln:

$$A_v = g_v(A, \omega) \quad (v = 2, 3, \dots, n). \tag{8}$$

Die $n + 1$ -Gleichungen (6), (7) und (8) reichen nun zur Bestimmung der Frequenz und Amplitudenverteilung von möglichen stationären Schwingungen aus.

Die Stabilität der Schwingungen wird in bekannter Weise durch die Realteile der Wurzeln der charakteristischen Gleichung (5) bestimmt. Der Hurwitzsche Satz garantiert bei Erfüllung der Stabilitätsbedingungen negative Realteile für alle Wurzeln. Unter den zuvor genannten Voraussetzungen wird auf der Schwinggrenze der Realteil einer der Wurzeln, z. B. $Re(\lambda_k)$, gleich Null. Bei Überschreiten der Grenze in das instabile Gebiet ($R < 0$) hinein wird $Re(\lambda_k) > 0$. Es ist also

$$\text{sign } Re(\lambda_k) = - \text{sign } R \tag{9}$$

und $Re(\lambda_k) = 0 \quad \text{für } R = 0.$

Betrachten wir nun eine kleine Veränderung der stationären Amplitudenverteilung, bei der sich die Bezugsamplitude A um den Betrag ΔA ändern möge, so folgen daraus wegen (8) entsprechende Veränderungen der anderen Amplituden und damit nach (3) auch Veränderungen der Koeffizienten a_{iv} und a_{iv}^* . Für diese ist aber (6) nicht mehr erfüllt; vielmehr wird auch die Routhsche Diskriminante R um den Betrag ΔR verändert werden. Ist nun das zu einem positiven ΔA gehörige ΔR ebenfalls positiv, so ist wegen (9) $Re(\lambda_k)$ negativ und, abgesehen von hier nicht interessierenden Sonderfällen, dem Betrage nach nicht beliebig klein. Das mit der veränderten Amplitudenverteilung schwingende System ist also gedämpft, so daß die Amplituden kleiner werden und sich der stationären Amplitude ($\Delta A = 0$) nähern. Ist umgekehrt $\Delta A < 0$ und das zugehörige $\Delta R < 0$, so wird $Re(\lambda_k) > 0$; die Schwingungen wachsen an und nähern sich damit wieder der stationären Amplitude. Wenn also der Differentialquotient

$$\left(\frac{dR}{dA}\right)_{R=0} > 0 \tag{10}$$

ist, so nähern sich Nachbarbewegungen stets der stationären Schwingung; diese ist also stabil. Entsprechend zeigt man leicht, daß die Schwingung instabil wird, wenn der Ausdruck (10) negativ ist. Eine Nachbarbewegung entfernt sich dann von der stationären Schwingung.

In der allgemeinsten Form wird der Differentialquotient (10) aus

$$\frac{dR}{dA} = \sum_{i=1}^n \sum_{v=1}^n \left[\frac{\partial R}{\partial a_{iv}} \frac{da_{iv}}{dA} + \frac{\partial R}{\partial a_{iv}^*} \frac{da_{iv}^*}{dA} \right] \frac{dA_v}{dA} \tag{11}$$

errechnet.

Geometrische Deutung

Das Kriterium (10) läßt sich auch anschaulich geometrisch deuten. Man kann dazu entweder Darstellungen in einer R - A -Ebene oder aber in einem a_k -Raum verwenden, wobei a_k die von der Amplitude abhängigen Koeffizienten von (2) sind. Die erste Art der Darstellung ist bei Systemen höherer Ordnung mit zahlreichen nichtlinearen Gliedern meist vorzuziehen, während die zweite im allgemeinen vorteilhafter ist, wenn nicht mehr als 3 nichtlineare Glieder im Regelkreis vorkommen. Bild 1 zeigt eine $R(A)$ -Kurve, wie sie unter Berücksichtigung von (7) und (8) errechnet werden kann. Jedem Schnittpunkt dieser Kurve mit der Abszisse ($R = 0$) entspricht eine mögliche stationäre Schwingung im Regelkreis. Durchschneidet die Kurve die Achse von oben nach unten, so ist die Schwingung instabil (Punkt A'), im anderen Fall ist sie stabil (Punkt A''). Das ist auch anschaulich klar, wenn man bedenkt, daß die Kurve im oberen Quadranten wegen $R > 0$ und (9) nur im Sinne kleiner werdender Amplituden durchlaufen werden kann, während im unteren Quadranten ($R < 0$) die Amplituden nur anwachsen können (siehe die Pfeilrichtungen).

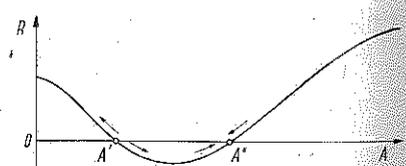


Bild 1. Stabilitätsdiagramm in der R - A -Ebene

In einer a_1 - a_2 -Ebene (Bild 2) bekommt man aus der Forderung $R = 0$ eine R -Kurve (Stabilitätsgrenze) und außerdem eine von dieser unabhängige „ A -Kurve“, die aus der Amplitudenabhängigkeit der a_1 und a_2 gewonnen wird. Jedem Schnittpunkt von A - und R -Kurve entspricht eine mögliche stationäre Schwingung im Regelkreis. Diese Schwingungen sind stabil, wenn die im Sinne steigender A -Werte durchlaufene A -Kurve aus dem instabilen Bereich ($R < 0$) in den stabilen Bereich ($R > 0$) läuft (Punkt A''). Im anderen Falle sind die Schwingungen instabil (Punkt A'). Die zu stationären Schwingungen gehörigen Amplitudenwerte können an der A -Kurve unmittelbar abgelesen werden. Aber auch die Frequenz kann bestimmt werden. Mit Hilfe von (7) läßt sich nämlich die R -Kurve mit einer ω -Skala versehen; die Schnittwerte mit der A -Kurve ergeben die Frequenzen der stationären Schwingungen.

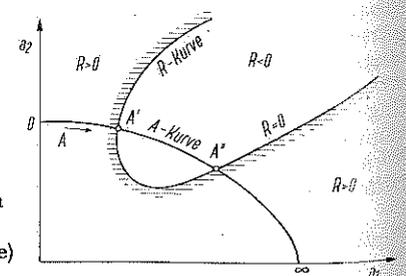


Bild 2. Stabilitätsdiagramm in einer a_1 - a_2 -Ebene (R -Kurve und A -Kurve)

Gefährlichkeit der Stabilitätsgrenze

Die Stabilitätsgrenze eines Regelkreises ist nach *Bautin* [5] gefährlich, wenn nach einer durch Veränderung irgendwelcher Systemparameter bedingten Überschreitung der Grenze Schwingungen angefacht werden, deren Amplitude keine stetige Funktion des Betrages der Grenzüberschreitung ist. Systeme mit gefährlichen Grenzen sind irreversibel, da die Schwingungen nach dem Rücküberschreiten

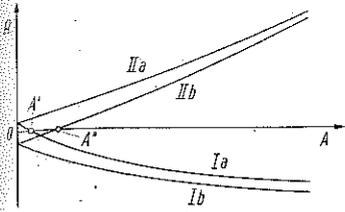


Bild 3. R-A-Diagramm von Regelkreisen mit gefährlicher (I) und ungefährlicher (II) Stabilitätsgrenze

nicht verschwinden. Eine Grenze ist ungefährlich, wenn die nach Überschreiten der Grenze entstehenden Schwingungen stetige Funktionen des Betrages der Grenzüberschreitung sind. Systeme mit ungefährlichen Grenzen sind reversibel, da die Schwingungen nach dem Rücküberschreiten wieder verschwinden.

Ein Kriterium für die Gefährlichkeit bzw. Ungefährlichkeit der Grenze läßt sich nun aus den erwähnten Darstellungen unmittelbar ablesen. In der R-A-Darstellung (Bild 3) sind gefährliche Systeme durch Kurven mit fallender Tendenz für $A = 0$, ungefährliche durch Kurven mit steigender Tendenz für $A = 0$ gekennzeichnet. Die Kurven Ia und IIa repräsentieren Systeme mit stabiler Gleichgewichtslage. Rutscht nun der Anfangspunkt der Kurven durch Veränderung irgendeines Parameters über die Stabilitätsgrenze $R = 0$ (Kurven Ib und IIb), so verschwindet die stabile Gleichgewichtslage, d.h., die Systeme werden im Kleinen instabil. Die Amplituden der entstehenden Schwingungen wachsen im Falle Ib unbegrenzt an, während sie sich im Falle IIb nur bis zu der Amplitude A'' aufschaukeln können.

Entsprechend kann man auch aus der zweiten Art der Darstellung (Bild 4) schließen, daß eine Grenze gefährlich ist, wenn das Anfangsstück der A-Kurve die Tendenz hat, aus

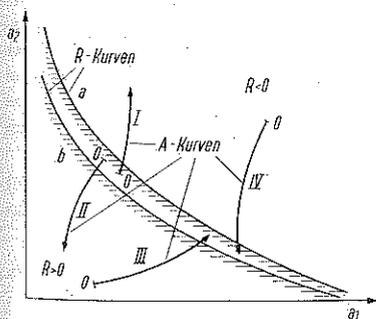


Bild 4. a_1 - a_2 -Diagramm mit R-Kurven und A-Kurven von Regelkreisen mit gefährlicher (I und III) und ungefährlicher (II und IV) Stabilitätsgrenze

dem Bereich $R > 0$ (Stabilitätsbereich) herauszulaufen (Kurve I); umgekehrt ist eine Grenze ungefährlich, wenn das Anfangsstück der A-Kurve die Tendenz hat, in den Bereich $R > 0$ hereinzulaufen (Kurve II). Die Grenzüberschreitung kommt in diesem Falle durch eine Verlagerung der R-Kurve zustande (Kurve a vor, b nach Überschreitung). Das analytische Kriterium für diese *Bautinsche* Gefährlichkeit, die hier als „Gefährlichkeit im Kleinen“ bezeichnet werden soll, da sie sich nur auf kleine Amplituden, also auf das Anfangsstück der A-Kurve bezieht, lautet:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial A}\right)_{A=0} < 0. \tag{12}$$

Ist der Ausdruck positiv, so ist die Grenze ungefährlich im Kleinen. Der Verzweigungspunkt, der die im Kleinen gefährlichen Teile der Grenze von den ungefährlichen trennt, wird erhalten, wenn in (12) das Gleichheitszeichen steht.

Es muß noch betont werden, daß diese Formulierungen nur sinnvoll sind, wenn tatsächlich Grenzüberschreitungen vorkommen können. Anderenfalls reichen die herkömmlichen Begriffe der Stabilität und Instabilität völlig zur Kennzeichnung des dynamischen Verhaltens eines Regelkreises aus.

Es erscheint zweckmäßig, die *Bautinschen* Begriffe zu erweitern und von einer Gefährlichkeit bzw. Ungefährlichkeit „im Großen“ zu sprechen, je nach dem Vorzeichen des Ausdruckes

$$\left(\frac{\partial R}{\partial A}\right)_{A \rightarrow \infty} \tag{13}$$

Bei der geometrischen Festlegung hat man dann auf das Verhalten der A-Kurve im Bereich großer A zu achten. Hat das letzte Stück der A-Kurve die Tendenz, aus dem Stabilitätsbereich herauszulaufen (Bild 4, Kurve III), so ist die Grenze gefährlich im Großen, anderenfalls ist sie ungefährlich im Großen (Bild 4, Kurve IV). Auch hier sind die getroffenen Formulierungen nur sinnvoll, wenn der Endpunkt der A-Kurve die Stabilitätsgrenze wirklich überschreiten kann.

Ohne auf das hier beschriebene Verfahren Bezug zu nehmen, könnte man auch definieren: Ein System ist „gefährlich im Großen“, wenn bei Parameteränderungen in seinem Phasenporträt ein instabiler Grenzyklus bei großen Amplituden entstehen kann.

Es sei bemerkt, daß Gefährlichkeit bzw. Ungefährlichkeit weder Eigenschaften der Regelstrecke noch des Reglers sind. Sie kennzeichnen vielmehr das dynamische Verhalten geschlossener, nichtlinearer Regelkreise. Bei linearen Regelkreisen sind die Gefährlichkeitsbegriffe entbehrlich.

Die außerordentliche praktische Bedeutung dieser Begriffe kann an Beispielen leicht klagemacht werden (siehe z.B. [3, 5]). Für eine Fahrzeug-Kursregelung mit quadratischen Dämpfungskräften und nichtlinearer Stellgliedcharakteristik kann der Regelkreis beispielsweise bei bestimmten Werten der Parameter im Kleinen zwar stabil, aber gefährlich sein. Schwerpunktsverlagerungen durch Treibstoffverbrauch können zum Überschreiten der Stabilitätsgrenze führen und Dauerschwingungen großer Amplitude anregen. Bei Stellgliedcharakteristiken mit Sättigung kann im Kleinen zwar Stabilität und Ungefährlichkeit erreicht werden, dennoch ist Gefährlichkeit im Großen möglich, die bei entsprechend großen Störungen zum völligen Versagen der Kursregelung führen kann.

Zur praktischen Verwendbarkeit des hier beschriebenen Verfahrens sei bemerkt, daß es brauchbar bleibt, wenn die nichtlinearen Funktionen von (1) unstetig sind (Zwei- und Drei-Punkt-Regelungen) oder von den Geschwindigkeiten bzw. Frequenzen abhängen (Hysterese). Auch Totzeiten in den Koordinaten können berücksichtigt werden, nur sind die a_j dann nicht aus (3), sondern aus einem etwas abgeänderten Ausdruck zu gewinnen.

Literatur:

- [1] Goldfarb, L. S.: Avtomatika i Telemekhanika, 8 (1947), 349—383.
- [2] Kochenburger, R. I.: Trans. AIEE, 69 (1950), 270—284.
- [3] Magnus, K.: VDI-Forschungsheft Nr. 451, Düsseldorf 1955.
- [4] Klotter, K.: Proc. IRE, CT-1, 4 (1954) 13—18.
- [5] Bautin, N. N.: Das Verhalten dynamischer Systeme in der Nähe der Stabilitätsgrenzen, Moskau 1949.

Diskussionsbemerkungen

M. SCHULER (Göttingen). Ich glaube, daß der Hinweis von Herrn Magnus sehr lehrreich ist. Er zeigt, daß bei nichtlinearen Regelsystemen — und praktisch enthält jeder Regelkreis nicht-lineare Glieder — leicht Labilitäten auftreten können, die man gar nicht geahnt hat. Bei der automatischen Steuerung des Kur-ses hat Herr Magnus dies so schön gezeigt. Ich habe manche von meinen Schülern bei den Versuchen mit automatischen Flugzeug-steuerungen verloren. Jetzt, nach den Ausführungen von Herrn Magnus, wird mir mit einem Schlage klar, wie so etwas möglich war.

F. H. EFFERTZ (Aachen). Über eine Parameterdarstellung für Stabilitätsgrenzflächen und über Stabilitätsprüfung harmonisch linearisierter Systeme mittels Cremer-Leonhard-scher Ortskurvenscharen

Die Stabilitätsaussagen für das harmonisch linearisierte System werden nach dem Verfahren von K. Magnus aus der gegenseitigen Lage von Stabilitätsgrenzfläche und A-Kurve gewonnen. Explizite Darstellungen der Stabilitätsgrenzflächen im Raum der Koeffizienten der charakteristischen Gleichung sind bisher für Systeme bis zur fünften Ordnung von verschiedenen Autoren angegeben worden. Für Systeme vierter Ordnung hat K. Schmidt [1] eine Parameterdarstellung der Stabilitätsgrenzfläche mitgeteilt, während W. P. Nikitin, W. K. Turkin und N. F. Kunichij [2] sowie H. A. Hogan und T. J. Higgins [3] unabhängig voneinander graphische Darstellungen der durch die Hurwitzschen Bedingungen gelieferten Stabilitätsbereiche für Systeme fünfter Ordnung hergeleitet haben.

K. H. Breuer und der Verfasser haben eine einfache und übersichtliche Parameterdarstellung der Stabilitätsgrenzfläche für Systeme beliebiger Ordnung gewonnen, welche die vorhin erwähnten Ergebnisse als Sonderfälle enthält. Allen Punkten dieser Stabilitätsgrenzfläche sind dabei Polynome zugeordnet, deren Koeffizienten allen Stabilitätsbedingungen genügen mit der Ausnahme, daß die Routhsche Diskriminante verschwindet.

Man erhält zum Beispiel für ein System sechster Ordnung mit der normierten charakteristischen Gleichung

$$f(\lambda) = 1 + c_5 \lambda + c_4 \lambda^2 + c_3 \lambda^3 + c_2 \lambda^4 + \lambda^5 + c_0 \lambda^6$$

die folgende Parameterdarstellung für die Stabilitätsgrenzfläche im fünfdimensionalen Raum:

$$\begin{aligned} c_0 &= T_0, \\ c_2 &= T_1 + T_0 T_2 + \frac{T_0 T_3}{T_1} + \frac{T_0}{T_3}, \\ c_3 &= T_2 + \frac{T_3}{T_1} + \frac{1}{T_3}, \\ c_4 &= T_3 + \frac{T_1}{T_3} + \frac{T_0 T_2}{T_3} + \frac{T_0}{T_1}, \\ c_5 &= \frac{T_2}{T_3} + \frac{1}{T_1}. \end{aligned}$$

Hierbei gilt $T_0, T_1, T_2, T_3 > 0$. Wird $c_0 > 0$ und $c_5 > 0$ als konstant angenommen, so erhält man als Stabilitätsgrenzfläche die durch die folgende Darstellung gegebene Regelfläche:

$$\begin{aligned} c_2 &= T_1 + c_0 c_5 T_3 + \frac{c_0}{T_3}, \\ c_3 &= c_5 T_3 + \frac{1}{T_3}, \\ c_4 &= T_3 + \frac{T_1}{T_3} + c_0 c_5. \end{aligned}$$

Dabei ist $T_1 > 1/c_5$ und $T_3 > 0$ zu wählen.

Den Systemen mit gleicher Schwingfrequenz ω an der Stabilitätsgrenze entsprechen Geraden auf der Stabilitätsgrenzfläche, die durch die folgende Parameterdarstellung gegeben sind:

$$\begin{aligned} c_2 &= T_1 + \frac{c_0 c_5}{\omega^2} + c_0 \omega^2, \\ c_3 &= \frac{c_5}{\omega^2} + \omega^2, \\ c_4 &= \frac{1}{\omega^2} + T_1 \omega^2 + c_0 c_5. \end{aligned}$$

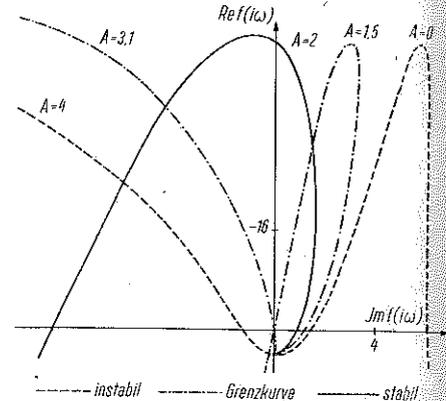


Bild 5. Stabilitätsortkurvenschar für eine Kreisel-Einschienenbahn

Diese Ergebnisse lassen sich auf Systeme beliebiger Ordnung verallgemeinern und werden an anderer Stelle mitgeteilt.

Näherungskriterien für die Stabilität harmonisch linearisierter Systeme können auch aus einer naheliegenden Kombination des Verfahrens der harmonischen Balance mit der Cremer-Leonhard-schen Ortskurvenmethode [4], [5] gewonnen werden. Dabei gewinnt man zunächst aus dem linearen Ersatzsystem durch Exponentialansatz die charakteristische Gleichung mit von der Bezugsamplitude abhängigen Koeffizienten.

Man zeichnet dann die Schar der Cremer-Leonhard-schen Ortskurven, die verschiedenen Werten der Bezugsamplitude entsprechen. Aus diesen Ortskurven kann dann auch auf Stabilität bzw. Instabilität und Gefährlichkeit bzw. Ungefährlichkeit (im Kleinen oder Großen) in entsprechender Weise wie in der vortrefflichen Arbeit von K. Magnus geschlossen werden. Es entfällt bei dieser Methode die Berechnung der Stabilitätsgrenzfläche, doch tritt an Stelle einer A-Kurve die Ortskurvenschar auf. Das Verfahren bleibt auch anwendbar, wenn mehr als drei Systemparameter oder Koeffizienten variabel sind und man eine Stabilitätsgrenzfläche in einem höheren als dreidimensionalen Raum erhalten würde.

Betrachtet man z. B. die von N. N. Bautin und K. Magnus [6] untersuchte Kreisel-Einschienenbahn, so erhält man die charakteristische Gleichung:

$$f(\lambda) = \lambda^4 + (1 - \bar{a}_{33}) \lambda^3 + (15 - \bar{a}_{33}) \lambda^2 + (4 \bar{a}_{33} - 1) \lambda + 4 = 0.$$

Hierbei sind für die Parameter folgende Werte angenommen:

$$\Theta = 1, \quad \zeta = 4, \quad \beta = 0,1, \quad \chi = 1, \quad \xi = 20$$

und es gilt

$$\bar{a}_{33} = 1 - 0,075 A^2.$$

Zeichnet man die durch die Darstellung

$$\begin{aligned} f(i\omega) &= [\omega^4 - (0,075 A^2 + 14) \omega^2 + 4] + \\ &+ i[-0,075 A^2 \omega^3 + (3 - 0,3 A^2) \omega] \end{aligned}$$

gegebene Ortskurve für

$$A = 0; 1,5; 2; 3,1 \text{ und } 4,$$

so erkennt man leicht die ungefährliche Stabilitätsgrenze für $A \approx 1,5$ und die gefährliche Stabilitätsgrenze für $A \approx 3,1$ (s. Bild 5).

J. E. Koenig [7] hat vorgeschlagen, zur Stabilitätsprüfung von nichtlinearen Systemen, deren charakteristische Gleichungen komplexe Koeffizienten besitzen, zwei Kettenbruchtheoreme von E. Frank [8] zu benutzen. Er hat auch bemerkt, daß die Stabilitätsprüfung nur einiger dieser charakteristischen Gleichungen gewöhnlich genügenden Aufschluß über das Stabilitätsverhalten des Systems gibt.

A. Leonhard [9] verdankt man ein einfaches graphisches Verfahren zur Stabilitätsprüfung von Polynomen mit komplexen Koeffizienten. Besitzt ein harmonisch linearisiertes System charakteristische Gleichungen mit komplexen Koeffizienten, so führt das Leonhardsche Verfahren zu einer Ortskurvenschar, aus der man leicht auf die Stabilitätseigenschaften des untersuchten Systems schließt.

Literatur

- [1] Schmidt, K.: Stabilität und Aperiodizität bei Bewegungsvorgängen vierter Ordnung. Arch. Elektrotechn., Bd. 37 (1943), S. 217.
- [2] Nikitin, W. P., Turkin, W. K., Kunickij, N. P.: Stabilitätsdiagramme für Systeme fünfter Ordnung. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. Bd. 58 (1947), S. 591.
- [3] Hogan, H. A., Higgins, T. J.: Stability Boundaries for Fifth-Order Servomechanisms. Proc. Nat. Elect. Conf., vol. XI (1955), University of Wisconsin Eng. Exp. Stat. Reprint 279.
- [4] Cremer, L.: Ein neues Verfahren zur Beurteilung der Stabilität linearer Regelungssysteme. Z. angew. Math. Mech., Bd. 25/27 (1947), S. 161.
- [5] Leonhard, A.: Neues Verfahren zur Stabilitätsuntersuchung. Arch. Elektrotechn., Bd. 38 (1944), S. 17.
- [6] Magnus, K.: Über ein Verfahren zur Untersuchung nichtlinearer Schwingungs- und Regelungssysteme. VDI-Forschungsheft 451, Düsseldorf 1955, S. 14.
- [7] Koenig, J. F.: Stability of Nonlinear Feedback Control Systems. National Bureau of Standards, Report 3619, Washington, August 1954.
- [8] Frank, E.: On the Zeros of Polynomials with Complex Coefficients. Bull. Amer. Math. Soc., vol. 52 (1946), S. 144.
- [9] Leonhard, A.: Über Selbsterregung elektrischer Maschinen. Arch. Elektrotechn., Bd. 40 (1950/52), S. 343.

E. PESTEL (Hannover). Mein Diskussionsbeitrag ist einmal dadurch hervorgerufen, daß bei der Behandlung von Regelvorgängen mit Totzeit die von Herrn Magnus stammende Variante des Krylov-Bogoljubov-Verfahrens in der vorliegenden Form nicht ohne weiteres angewendet werden kann, zum anderen durch die Diskussionsbemerkung von Herrn Effertz, da die von ihm vorgeschlagene Art des Vorgehens der Methode zu ähneln scheint, über die eine ausführliche Arbeit von E. P. Popov [1] vorliegt. Das dort entwickelte Verfahren wird in einem Aufsatz des Verfassers [2] benutzt, um eine einfache Methode zur Ermittlung des Verhaltens nichtlinearer Regelkreise zu entwickeln.

Für den häufig vorkommenden Fall, daß die linearen und die nichtlinearen Elemente des Regelkreises in je einen Block entsprechend Bild 6 zusammengefaßt werden können, ist es verhältnismäßig einfach, nach vorheriger Anwendung der Methode der Harmonischen Balance den Frequenzgang auch des nichtlinearen Blocks zu bestimmen und die Schließbedingung für den geschlossenen Regelkreis wie folgt aufzustellen:

$$-\frac{1}{F_l} = F_n. \quad (1)$$

Darin bezeichnet F_l den Frequenzgang des linearen Blocks und F_n den des nichtlinearen Blocks. Man beachte dabei, daß wegen der Nichtlinearitäten der Frequenzgang des letzteren nicht nur von ω sondern auch von der Amplitude A des harmonischen Eingangssignals abhängig ist.

$$F_l = \frac{Z_l(i\omega)}{N_l(i\omega)}; \quad F_n = \frac{Z_n(i\omega, A)}{N_n(i\omega, A)}. \quad (2)$$

Die Schließbedingung führt dann auf folgende Gleichung

$$N_l(i\omega) \cdot N_n(i\omega, A) + Z_l(i\omega) \cdot Z_n(i\omega, A) = 0. \quad (3)$$

Aus der Aufspaltung in Real- und Imaginärteil folgt

$$X(\omega, A) + i Y(\omega, A) = 0.$$

Diese Gleichung ist nur erfüllt, wenn sowohl der Real- wie auch der Imaginärteil verschwinden

$$X(\omega, A) = 0 \quad \text{und} \quad Y(\omega, A) = 0. \quad (4)$$

Wir erhalten somit zwei Gleichungen für die Bestimmung der Unbekannten A und ω , welche die Dauerschwingung der Regelgröße bei geschlossenem Regelkreis bestimmen.

Es ist zu beachten, daß diese Gleichungen für den Fall, daß Totzeit im Regelkreis auftritt, transzendent werden, und daher ihre numerische Auflösung erheblichen Rechenaufwand erfordert. Dieser Umstand führte dazu, die Aufgabe auf zeichnerischem Wege zu lösen. Dabei wird nach dem Vorgang von Oppelt [3] der negative inverse Frequenzgang des einen Blocks in der komplexen Ebene aufgetragen und entsprechend der Frequenzgang des anderen Blocks. Im vorliegenden Fall ist es zweckmäßig, die Totzeit in den linearen Block hineinzunehmen¹⁾ und für diesen den negativen inversen Frequenzgang aufzutragen, da für den linearen Block nur eine Kurve zu zeichnen ist — im Gegensatz zu dem Frequenzgang des nichtlinearen Blocks, der ja nicht nur von der Frequenz sondern auch von der Amplitude der Eingangsschwingung abhängt und somit bei seiner Darstellung in der komplexen Ebene für jede Amplitude das Zeichnen einer Ortskurve erfordert. In den Schnittpunkten der Ortskurve des negativen inversen Frequenzganges des linearen Teils mit der Ortskurve bzw. den Ortskurven des Frequenzganges des nichtlinearen Blocks, in denen ω für beide Frequenzgänge den gleichen Wert besitzt, erhalten wir die entsprechenden Lösungen für die Dauerschwingungen nach Frequenz und Amplitude, die wir rechnerisch aus (4) erhalten würden. Dabei finden wir als Amplitude den Wert, der als Parameter die durch den Schnittpunkt bzw. die Schnittpunkte gehende Ortskurve des nichtlinearen Teils erzeugt. Der Vorteil dieser graphischen Lösung wird noch deutlicher erkennbar, wenn man die Stabilität der so gefundenen periodischen Lösungen untersucht. In seiner vorerwähnten Arbeit leitet Popov als Stabilitätsbedingung folgende Ungleichung ab

$$\frac{\partial X}{\partial A} \frac{\partial Y}{\partial \omega} - \frac{\partial Y}{\partial A} \frac{\partial X}{\partial \omega} > 0, \quad (5)$$

deren Lösung für den Fall des Auftretens von Totzeit äußerst mühsame numerische Rechnungen erfordert.

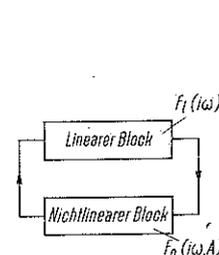


Bild 6.

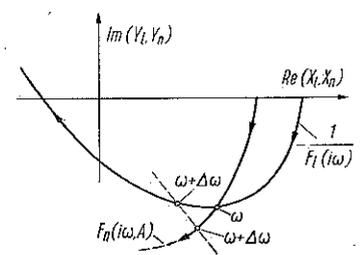


Bild 7.

Im folgenden sei deshalb der Weg zu einem einfachen graphischen Stabilitätskriterium aufgezeigt. Im Hinblick darauf, daß der negative inverse Frequenzgang des linearen Blocks und entsprechend der Frequenzgang des nichtlinearen Blocks

$$-\frac{1}{F_l} = X_l + i Y_l \quad \text{und} \quad F_n = X_n + i Y_n$$

geschrieben werden kann, liefert die Schließbedingung (1) folgende Gleichung

$$X_l + i Y_l = X_n + i Y_n,$$

¹⁾ Voraussetzung ist, daß das Totzeitglied nicht zwischen zwei Nichtlinearitäten liegt.

aus der nach Zusammenfassung der Real- und der Imaginärteile folgende Gleichungen entstehen

$$X_l - X_n = 0 \quad \text{und} \quad Y_l - Y_n = 0.$$

Wenn man diese Differenzen an Stelle von X und Y in Ungleichung (5) einsetzt und beachtet, daß nur der Frequenzgang des nichtlinearen Blocks von der Amplitude A abhängt, so erhält man an Stelle von (5) die folgende Stabilitätsbedingung

$$\frac{\partial Y_n}{\partial A} / \frac{\partial X_n}{\partial A} > \frac{\partial Y_l}{\partial \omega} - \frac{\partial Y_n}{\partial \omega} / \frac{\partial X_l}{\partial \omega} - \frac{\partial X_n}{\partial \omega}. \quad (5a)$$

Man kann der rechten Seite der Ungleichung (5a) folgende Form geben

$$\frac{Y_l(\omega + \Delta\omega) - Y_n(\omega + \Delta\omega)}{X_l(\omega + \Delta\omega) - X_n(\omega + \Delta\omega)},$$

die sich beim Übergang vom Differentialquotienten auf Differenzenquotienten ergibt. Bild 7 zeigt, daß dieser Quotient die Steigung der gestrichelten Geraden bedeutet, die durch Punkte gelegt wird, welche von dem Schnittpunkt der Lösungsortskurve des nichtlinearen Frequenzganges und der Ortskurve des negativen inversen Frequenzganges des linearen Blocks um $\Delta\omega$ entfernt liegen. Stabilität liegt dann vor, wenn die Steigung dieser Geraden kleiner ist als die linke Seite der Ungleichung (5a), die rechnerisch leicht zu bestimmen ist, weil X_n und Y_n nach der vorgegangenen harmonischen Linearisierung bereits als Funktionen von A und ω vorliegen. Natürlich kann auch die rechte Seite von (5a) ohne Schwierigkeit rechnerisch ausgewertet werden, wenn der negative inverse Frequenzgang des linearen Blocks in mathematischer Form vorliegt.

Literatur

- [1] *Popov, E. P.*: Angenäherte Untersuchung von Eigenschwingungen nichtlinearer Systeme höherer Ordnung auf der Grundlage der harmonischen Linearisierung der Nichtlinearitäten. Izv. Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1954, Nr. 5, S. 3—38 (Russisch).
- [2] *Pestel, E.*: Anwendung der *Ljapunovschen* Methode und des Verfahrens von *Krylov-Bogoljubov* auf ein technisches Beispiel. Aufsatz in „Nichtlineare Regelungsvorgänge“, Beihefte zur Regelungstechnik, Verlag R. Oldenbourg München 1956.
- [3] *Oppelt, W.*: Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge. Chemie-Verlag Weinheim 1956.

Schlußbemerkung des Verfassers

Für die in den Diskussionsbemerkungen gegebenen Anregungen danke ich allen Diskussionsrednern.

Die von Herrn *Effertz* erwähnte Parameterdarstellung für die Stabilitätsgrenzen darf sicher großes Interesse beanspruchen, denn sie könnte dazu beitragen, die vielfach recht mühsame Ausrechnung dieser Grenzen zu erleichtern.

Für lineare Systeme existieren bekanntlich eine große Anzahl verschiedener Stabilitätskriterien. Jedes von ihnen kann auch auf harmonisch linearisierte Systeme angewendet werden und führt dann auf ein Verfahren, das prinzipiell dem im Vortrag dargestellten äquivalent ist. Die Frage, für welche dieser verschiedenen Kombinationen man sich entscheidet, hängt von der Zweckmäßigkeit bezüglich des zu untersuchenden Problems und — nicht zu vergessen — von der Gewohnheit des Bearbeiters ab. Der von Herrn *Effertz* gemachte Vorschlag, die *Cremer-Leonhard*schen Hodographen jeweils für bestimmte Amplitudenwerte auszurechnen, ist in entsprechender Weise auch schon für den *Nyquist*-Hodographen durchgeführt worden. Zwei Gründe hat-

ten mich jedoch bewogen, diese Art der Darstellung nicht zu übernehmen. Erstens scheint es mir zweckmäßig zu sein, die Amplitude — für die man sich ja interessiert — als Variable und nicht nur als Parameter zu verwenden. Zweitens aber hat man bei getrennter Auftragung die Möglichkeit, zu einer einmal ausgerechneten Stabilitätsgrenze ganze Scharen von A -Kurven zu zeichnen und aus dem Diagramm dann die Eigenschaften des Gesamtsystems für variierte nichtlineare Charakteristiken abzulesen. In solch einem Falle dürfte die Rechenarbeit erheblich geringer sein als nach dem *Effertz*schen Verfahren, bei dem für jede neue Charakteristik eine neue Hodographenschare gezeichnet werden muß.

Das in meinem Beitrag angegebene Verfahren ist auch noch anwendbar, wenn mehr als drei Systemparameter variiert werden sollen. Nur ist es dann zweckmäßig, zu einer Darstellung im R - A -Diagramm überzugehen, wie sie zum Beispiel in den Bildern 1 und 3 des Beitrages gezeigt ist.

Die von Herrn *Cyphin* (s. S. 163) mitgeteilten Näherungsformeln scheinen mir besonders wertvoll zu sein, wenn die nichtlineare Charakteristik lediglich als gemessene Kurve vorliegt. Eine Annäherung derartiger Kurven durch Polynome 4. Grades dürfte im allgemeinen völlig ausreichen, zumal man damit oft schon in den Bereich der Meßfehler hereinkommt.

Für sehr wichtig halte ich den Hinweis auf solche Fälle, in denen die auf der Vernachlässigung der höheren Harmonischen beruhenden Näherungsverfahren versagen können. Hier liegt ein Ansatzpunkt für die Weiterarbeit! Aber es wird sicher nicht leicht sein, hinreichende Kriterien für derartige Versagerfälle abzuleiten. Bei allen bisher angeführten Versagerbeispielen handelt es sich um Systeme, in denen offensichtlich die vernachlässigten Oberschwingungen eine entscheidende Rolle spielen. Wenn es gelingen würde, strenge Abschätzungen für die Größe der Fehler der Näherungsverfahren abzuleiten, könnte auch die Frage nach den Versagerfällen mit Aussicht auf erfolgreiche Lösung aufgegriffen werden.

Zu dem Hinweis von Herrn *Schuler* möchte ich bemerken, daß die „Gefährlichkeit im Großen“ vornehmlich dann auftreten kann, wenn die Regelstrecke selbst instabil ist oder zumindest werden kann, wenn also der Regler erst für die Stabilität des geschlossenen Regelkreises sorgen muß. Das trifft gerade für die Lagenregelungen mancher Flugzeuge und die Kursregelung von Schiffen zu — ein Gebiet, auf dem gerade Herr *Schuler* Pionierarbeit geleistet hat. Seine Bestätigung freut mich daher ganz besonders.

Zu den Ausführungen von Herrn *Pestel* möchte ich ergänzend mitteilen, daß inzwischen eine Veröffentlichung erschienen ist, in der die Behandlung von Totzeitproblemen nach der in meinem Beitrag angegebenen Methode dargestellt wird („Stationäre Schwingungen in nichtlinearen dynamischen Systemen mit Totzeiten“, Ing. Arch. 24, 1956, 341—350). Das von Herrn *Pestel* dargestellte Verfahren dürfte aber zweckmäßiger sein, wenn die Ortskurve des linearen Teilsystems bekannt ist oder sowieso ausgerechnet werden muß. Überhaupt wird der im Ortskurvendenken erzogene Regelungsfachmann die von den Herren *Pestel* und *Effertz* beschriebenen Verfahren bevorzugen. Den Grund, weshalb ich einen anderen Weg gegangen bin, habe ich bereits anfangs (Stellungnahme zur Bemerkung von Herrn *Effertz*) dargelegt. Auch bei Herrn *Pestel* tritt die Amplitude nur als Parameter auf, nicht als Variable. Es kann daher in schwieriger gelagerten Fällen notwendig werden, eine größere Anzahl von $F_n(i\omega, A)$ -Kurven zu zeichnen, um den Schnittpunkt mit gleichem ω -Wert auf den beiden Teilortskurven einigermaßen sicher zu bestimmen. Gegenüber dem *Effertz*schen Verfahren hat jedoch das *Pestelsche* den Vorteil, daß bei Änderungen der nichtlinearen Charakteristik die inverse Ortskurve des linearen Teiles nicht noch einmal berechnet zu werden braucht.