

Forschung

auf dem Gebiete des Ingenieurwesens

Band 23

Düsseldorf 1957

Nr. 5

DK 621.316.79 : 536.587

Schwingungen in einem un stetigen Temperatur-Regelkreis mit Totzeit

Von K. Magnus, Freiburg/Breisgau

Aus Gründen der apparativen Vereinfachung verwendet man an Temperatur-Regelstrecken häufig Relaisregler und nimmt damit ein gewisses Pendeln der Regelgröße auch im stationären Zustand in Kauf. Der Einfluß einer fast immer vorhandenen Totzeit auf die Amplitude und die Schwingungsdauer der stationären Schwingungen wird für zwei verschiedene Relais-Charakteristiken (mit Hysterese bzw. mit Totzone) untersucht; die allgemeinen Eigenschaften des Systems gehen aus einem Stabilitätsdiagramm hervor.

1. Aufgabenstellung

Der Einfluß von Totzeiten auf das Verhalten eines Regelkreises ist für den Fall, daß der Regler und die Regelstrecke in guter Näherung durch lineare Differentialgleichungen beschrieben werden können, bereits mehrfach untersucht worden (vgl. z. B. [1 bis 4]). Man weiß, daß Totzeiten in vielen Fällen die Ursache für das Auftreten von Regelschwingungen bilden, und strebt daher an, diese Zeiten in der Praxis möglichst klein zu machen. Bei bestimmten Typen von Temperaturreglern lassen sich jedoch Totzeiten grundsätzlich nicht vermeiden. Sie entstehen durch die endliche Laufzeit des Heizmittels (oder auch des Kühlmittels) und hängen z. B. bei einer Warmwasserheizung von der Länge der Leitungen zwischen dem Ofen und dem Heizkörper, vom Leitungsquerschnitt und von der Strömungsgeschwindigkeit ab.

Bild 1 zeigt ein kennzeichnendes Beispiel eines solchen Regelkreises. Der Behälter a, in dem die Temperatur geregelt werden soll, enthält eine Rohrschlange b, durch die das Heizmittel gepumpt wird. In einem Behälter d heizt man das wärmeübertragende Mittel wieder auf, z. B. mittels eines Tauchsieders. In diese Regelstrecke greift nun der Temperaturregler mit dem Meßgerät e (Thermoelement) ein. Ein Meß-

werk f dient dazu, die gemessene Temperatur mit dem gewünschten Sollwert zu vergleichen und dann mit Hilfe der Differenz beider Werte, der sog. Regelabweichung, das Ein- und Ausschalten des elektrischen Stromes für den Tauchsieder vorzunehmen. Der Regler arbeitet un stetig nach dem Relaisprinzip. Im folgenden werden zwei der wichtigsten Relais Typen untersucht: ein einfaches Ein-Aus-Relais mit Hysterese (Zweipunkt-Charakteristik mit Hysterese) und ein Relais mit Totzone ohne Hysterese (Dreipunkt-Charakteristik). Der Temperatur-Regelkreis nach Bild 1 soll lediglich als ein kennzeichnendes Beispiel für eine Gruppe ähnlich aufgebauter Regelkreise dienen. Man findet ein entsprechendes Wirkungsschema bei den verschiedenen Arten von industriellen Wärmeübertragern, bei der Warmwasserheizung, in Klimaanlageanlagen und bei Kühleinrichtungen wieder.

Das Ziel der Untersuchungen bestand darin, die Einflüsse einerseits der Totzeit und andererseits der Relais-Charakteristik auf die nach dem Abklingen von Einschwingvorgängen im Regelkreis vorhandenen Dauerschwingungen zu klären. Dabei wurde ein in einer früheren Arbeit [5] ausführlich beschriebenes Rechenverfahren verwendet. Dieses beruht darauf, daß man von dem Prinzip der harmonischen Balance Gebrauch macht und für das System der nichtlinearen Differentialgleichungen, die das Verhalten des un stetigen Regelkreises beschreiben, ein lineares Ersatzsystem aufstellt, dessen Koeffizienten amplituden- und frequenzabhängig sind. Die Bedingung, nach der im Falle des Auftretens von Dauerschwingungen die Koeffizienten gerade solche Werte haben müssen, daß sich das System an der Grenze der Stabilität befindet, liefert dann eine Möglichkeit, die Daten der Dauerschwingungen selbst zu berechnen.

- a Arbeitsbehälter
- b Rohrschlange
- c Umwälzpumpe für das Heizmittel
- d Aufheizbehälter
- e Thermoelement
- f Meßwerk
- g Stromquelle
- h Vorschaltwiderstand
- i Meßwerk-Abgriff mit Relais-Charakteristik

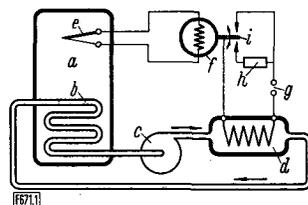


Bild 1. Grundsätzlicher Aufbau des Temperatur-Regelkreises.

2. Ausgangsgleichungen und ihre Umformung

Das Blockschaltbild für den Regelkreis nach Bild 1 geht aus Bild 2 hervor. Die Regelgröße (Temperatur im Behälter a) werde mit x bezeichnet; x_h sei die Tem-

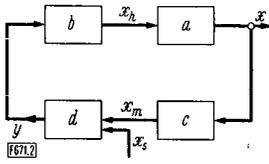


Bild 2. Blockschaltbild für den Temperatur-Regelkreis nach Bild 1.

a Arbeitsbehälter, b Aufheizbehälter (Erhitzer), c Meßgerät, d Relais, x Temperatur im Behälter (Regelgröße), x_h Temperatur des Heizmittels, x_m gemessene Temperatur, x_s Sollwert der Temperatur, y Temperatur, die sich einstellen würde, wenn das Relais dauernd eine seiner möglichen Lagen einnähme (Stellgröße).

peratur des Heizmittels im Erhitzer, x_m entsprechend die Temperatur des Meßgliedes (Thermometer). Zwischen x und $x_h = x_h(t - \tau)$ besteht eine Beziehung von der Form

$$T_1 \dot{x} + x = x_h(t - \tau) \dots \dots \dots (1).$$

Dabei bedeuten \dot{x} die Ableitung von x nach der Zeit t , τ die Totzeit und T_1 die durch die Wärmekapazität des Behälters und die Daten der Heizschlange bestimmte Zeitkonstante. Das Argument von x_h ist um die Totzeit τ verschoben, die das Heizmittel braucht, um vom Erhitzer b in den Behälter a zu fließen. Für die Temperatur x_h des Heizmittels gilt eine entsprechende Differentialgleichung

$$T_2 \dot{x}_h + x_h = y \dots \dots \dots (2).$$

Damit in Gl. (2) kein neuer Beiwert erscheint, ist hier als Stellgröße y die stationäre Temperatur gewählt worden, die sich im Laufe der Zeit einstellen würde, wenn das Relais jeweils eine seiner möglichen Lagen beibehielte. Die Zeitkonstante T_2 hängt von der Art des Heizmittels und den Daten des Erhitzers ab.

Die Beziehungen gemäß Gl. (1) und (2), die das Verhalten der Regelstrecke beschreiben, sind durch die Gleichungen des Reglers zu ergänzen, die sich aus den Teilgleichungen des Meßgliedes und des Kraftschalters zusammensetzen. Für die Meßglied-Teilgleichung gelte

$$T_3 \dot{x}_m + x_m = x \dots \dots \dots (3)$$

mit der Meßzeitkonstanten T_3 . Die von der Art des Relais bestimmte Kraftschalter-Charakteristik sei

$$y = -f(x_m) \dots \dots \dots (4).$$

Für die beiden in diesen Untersuchungen zu betrachtenden Relaisarten hat die Funktion $f(x_m)$ den in Bild 3a und b gezeichneten Verlauf.

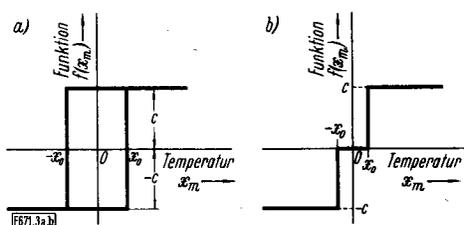


Bild 3a und b. Charakteristiken des Kraftschalter-Relais.

a) Zweipunkt-Relais mit Hysterese (x_0 halbe Hysteresebreite, c und $-c$ die beiden möglichen Werte der Funktion $f(x_m)$), b) Dreipunkt-Relais mit Totzone (x_0 halbe Breite der Totzone, c , 0 und $-c$ die drei möglichen Werte der Funktion $f(x_m)$)

Wäre das Totzeitglied $x_h(t - \tau)$ in Gl. (1) nicht vorhanden und die Funktion $f(x_m)$ in Gl. (4) linear, so ließe sich das System gemäß Gl. (1) bis (4) in sehr einfacher Weise nach den bei linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten üblichen Verfahren lösen. Aber auch mit den störenden Gliedern ist eine zumindest näherungsweise Lösung möglich, wenn man — wie in [6] gezeigt wurde — sowohl für Totzeitglieder als auch für nichtlineare Glieder lineare Ersatzausdrücke verwendet, die keine verzögernden Argumente mehr enthalten und deren Koeffizienten nicht konstant, sondern Funktionen der Frequenz und der Amplitude sind. Ohne auf Einzelheiten einzugehen, sei bemerkt, daß der lineare Ersatzausdruck für ein nichtlineares Glied mit Totzeit von der allgemeinen Form $g[x(t - \tau)]$ in der Form

$$g[x(t - \tau)] = a x + a^* \dot{x} \dots \dots \dots (5)$$

angesetzt wird. Dabei sind die Koeffizienten a und a^* aus

$$\left. \begin{aligned} a &= \cos(\omega \tau) K_s \{g\} + \omega \sin(\omega \tau) K_c \{g\}, \\ a^* &= \cos(\omega \tau) K_c \{g\} - \frac{1}{\omega} \sin(\omega \tau) K_s \{g\} \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} K_s \{g\} &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} g(A \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi, \\ K_c \{g\} &= \frac{1}{\pi A \omega} \int_0^{2\pi} g(A \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

zu bestimmen, wenn ω die Frequenz, A die Amplitude der gesuchten stationären Schwingung und φ eine Integrationsvariable bedeuten (mit A und ω als Funktionen von x). Wendet man Gl. (5) auf die rechten Seiten von Gl. (1) und (4) an, so ergibt sich folgendes. Aus Gl. (1) entsteht (mit Index 1 für die zugehörigen Koeffizienten)

$$g = x_h(t - \tau) \rightarrow a_1 x_h + a_1^* \dot{x}_h \dots \dots \dots (8)$$

mit $K_s \{g\} = 1$ und $K_c \{g\} = 0$, also nach Gl. (6)

$$a_1 = \cos(\omega \tau), \quad a_1^* = -\frac{1}{\omega} \sin(\omega \tau) \dots (9).$$

Wegen der Linearität des Totzeitgliedes werden die Koeffizienten unabhängig von der Amplitude. Entsprechend liefert Gl. (4) (mit Index 2 für die Koeffizienten)

$$g = f(x_m) \rightarrow a_2 x_m + a_2^* \dot{x}_m \dots \dots \dots (10).$$

Dabei ist für eine Relais-Charakteristik nach Bild 3a

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= K_s \{g\} = \frac{4c}{\pi A_m} \sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{A_m}\right)^2}, \\ a_2^* &= K_c \{g\} = -\frac{4c x_0}{\pi A_m^2 \omega} \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

mit A_m als der Amplitude der gesuchten Dauerschwingung in der Koordinate x_m (denn nur diese geht in die rechte Seite von Gl. (4) ein), x_0 als der halben Hysteresebreite und c (bzw. $-c$) als dem möglichen Wert von $f(x_m)$. Für eine Relais-Charak-

teristik nach Bild 3b ergibt sich a_2 ebenfalls nach Gl. (11), jedoch $a_2^* = 0$. Die Größe x_0 stellt in diesem Falle die halbe Breite der Totzone dar. Die Integrale nach Gl. (7) brauchen hierfür nicht erst ausgerechnet zu werden, da man sie unmittelbar einer in [5] enthaltenen Tafel von K-Transformierten entnehmen kann.

Unter Berücksichtigung von Gl. (8) und (10) folgt aus Gl. (1) bis (4) das lineare Ersatzsystem

$$\left. \begin{aligned} T_1 \dot{x} + x &= a_1 x_h + a_1^* \dot{x}_h, \\ T_2 \dot{x}_h + x_h &= -a_2 x_m - a_2^* \dot{x}_m, \\ T_3 \dot{x}_m + x_m &= x \end{aligned} \right\} \dots (12).$$

Die Lösung dieses Systems führt, wenn man in bekannter Weise einen Exponentialansatz $x_i = X_i e^{\lambda t}$ verwendet (mit X als dem Ausgangswert von x zur Zeit $t = 0$, λ als einem Eigenwert und Index i der Reihe nach für die x - und die X -Größen ohne Index, mit Index h und Index m), zu der charakteristischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} T_1 \lambda + 1 & -a_1^* \lambda - a_1 & 0 \\ 0 & T_2 \lambda + 1 & a_2^* \lambda + a_2 \\ -1 & 0 & T_3 \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 \dots (13)$$

oder ausgerechnet zu der Form

$$b_3 \lambda^3 + b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0 = 0 \dots (14)$$

mit den Koeffizienten

$$\left. \begin{aligned} b_3 &= T_1 T_2 T_3, \\ b_2 &= T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_3 T_1 + a_1^* a_2^*, \\ b_1 &= T_1 + T_2 + T_3 + a_1^* a_2 + a_1 a_2^*, \\ b_0 &= 1 + a_1 a_2 \end{aligned} \right\} \dots (15).$$

Berücksichtigt man, daß in Gl. (9) nur die Bereiche $0 \leq \cos(\omega \tau) \leq 1$ und $0 \leq \sin(\omega \tau) \leq 1$ sinnvoll sind, so ergeben sich stets positive Beiwerte b_3, b_2 und b_0 . Die Bedingungen für die Stabilität der durch die charakteristische Gleichung beschriebenen Schwingungen lauten dann

$$\left. \begin{aligned} b_1 &> 0, \\ R &= b_1 b_2 - b_0 b_3 > 0 \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

mit R als der *Routhschen* Diskriminante, die mit der Hurwitz-Determinante H_2 identisch ist. Man erkennt aus Gl. (16) sofort, daß die zweite der beiden Bedingungen die stärkere darstellt, also die Grenze des stabilen Bereichs durch die Bedingung

$$R = 0 \dots (17)$$

gekennzeichnet wird (denn für $b_1 = 0$ entsteht $R < 0$, also ein bereits instabiles System). Ein System, das sich auf der Stabilitätsgrenze befindet, führt ungedämpfte Schwingungen aus, für deren Frequenz ω die Beziehung

$$\omega^2 = b_0/b_2 = b_1/b_3 \dots (18)$$

gilt. Dies folgt unmittelbar, wenn man in Gl. (14) $\lambda = i \omega$ einführt und dann den Real- und den Imaginärteil jeweils für sich gleich null setzt. Sind in dem betrachteten System stationäre Schwingungen möglich, so müssen sie den beiden Schwingungsbedingun-

gen gemäß Gl. (17) und (18) genügen. Aus diesen Beziehungen können die Frequenz und die Amplitude der Dauerschwingungen errechnet werden.

3. Regler mit Hysterese ohne Totzone

Es werde zunächst angenommen, das verwendete Relais des Reglers sei nur zweier diskreter Stellungen fähig, das Umspringen von einer Lage zur anderen könne jedoch wegen einer bestimmten Unempfindlichkeit des Meßwerks um den Betrag $\pm x_0$ versetzt stattfinden. Dann gilt die Relais-Charakteristik von Bild 3a.

3.1 Bestimmung der Dauerschwingungen

Aus Gl. (18) gewinnt man die beiden Beziehungen

$$b_1 - b_3 \omega^2 = 0, \quad b_0 - b_2 \omega^2 = 0 \dots (19),$$

deren Bestehen — wie sofort aus Gl. (16) hervorgeht — auch die Erfüllung der Bedingung gemäß Gl. (17) nach sich zieht. Für die praktische Auswertung ist es zweckmäßig, durch

$$x_0/A_m = \cos \varphi, \quad \sqrt{1 - (x_0^2/A_m^2)} = \sin \varphi \dots (20)$$

die neue Veränderliche φ einzuführen. Damit folgt aus Gl. (19) nach Einsetzen der früheren Größen

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi \sin(\omega \tau - \varphi) &= x_0 B_1(\omega), \\ \cos \varphi \cos(\omega \tau - \varphi) &= x_0 B_2(\omega) \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} B_1(\omega) &= \frac{\pi}{4c} [1 - \omega^2 (T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_3 T_1)], \\ B_2(\omega) &= \frac{\pi}{4c} \omega (T_1 + T_2 + T_3 - T_1 T_2 T_3 \omega^2) \end{aligned} \right\} (22).$$

Da in die beiden Gl. (21) für die zwei Unbekannten φ und ω als Parameter noch die Größen τ und x_0 eingehen, kann man zu jedem Wertepaar τ, x_0 das zugehörige Wertepaar φ, ω bestimmen. In einer ω, φ -Ebene definiert Gl. (21) zu jedem Wertepaar τ, x_0 zwei Kurven, deren Schnittpunkte die gesuchten Lösungen von Gl. (21) anzeigen. Ändert sich einer der Parameter, so ändern sich auch beide Kurven. Diese für die Auswertung unangenehme Tatsache kann durch eine weitere Umformung vermieden werden. Es ist möglich, zwei Gleichungen herzuleiten, die jeweils nur von einem der Parameter abhängen. Man erhält aus Gl. (21) durch Quadrieren und Addieren eine von τ unabhängige Gleichung

$$\cos^2 \varphi = (B_1^2 + B_2^2) x_0^2 \dots (23)$$

sowie durch Dividieren eine von x_0 unabhängige Beziehung

$$\text{tg}(\omega \tau - \varphi) = B_1/B_2 \dots (24),$$

die zweckmäßigerweise noch nach $\cos \varphi$ aufgelöst wird:

$$\cos^2 \varphi = \frac{\left[1 + \frac{B_1}{B_2} \text{tg}(\omega \tau)\right]^2}{\left[\text{tg}(\omega \tau) - \frac{B_1}{B_2}\right]^2 + \left[1 + \frac{B_1}{B_2} \text{tg}(\omega \tau)\right]^2} \dots (25).$$

Während Gl. (23) in einer $\omega, \cos^2 \varphi$ -Ebene eine nur noch von x_0 abhängige Kurvenschar liefert, hängt die

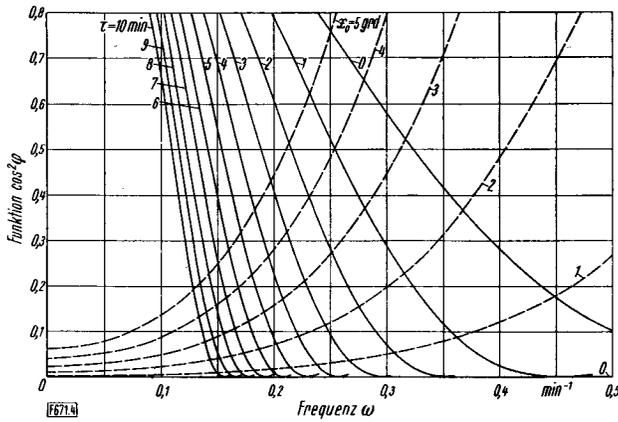


Bild 4. $\omega, \cos^2 \varphi$ -Diagramm zum Bestimmen der Daten für die Dauerschwingungen.

φ Hilfsveränderliche nach Gl. (20), x_0 halbe Hysteresisbreite, τ Totzeit; die Schnittpunkte der beiden Kurvenscharen $\tau = \text{konst}$ und $x_0 = \text{konst}$ liefern die Frequenz ω und die dimensionslose Größe $\cos \varphi$, die der Schwingungsamplitude umgekehrt proportional ist.

durch Gl. (25) in derselben Ebene definierte Kurvenschar nur noch von dem Parameter τ ab. Bild 4 zeigt diese Kurvenscharen unter Zugrundelegung der Zahlenwerte: $T_1 = 10 \text{ min}$, $T_2 = 3 \text{ min}$, $T_3 = 1 \text{ min}$ und $4c/\pi = 20 \text{ grad}$. Selbstverständlich kann an Stelle der Zeiteinheit (min) jede beliebige andere Zeiteinheit verwendet werden, wenn man auch τ im gleichen Zeitmaßstab mißt. Entsprechend gilt für die Größen c , x_0 und A_m bzw. A ein beliebiges, aber für alle Größen gleiches Maß (hier grad).

Aus Bild 4 liest man für jedes beliebige Wertepaar τ , x_0 die zugehörigen Werte von $\cos^2 \varphi$ und ω ab. Sollte die Genauigkeit nicht ausreichen, so kann man sie unschwer durch ein- oder mehrmaliges Iterieren verbessern. Aus ω folgt sofort die Schwingungszeit T des Regelkreises als

$$T = 2\pi/\omega \dots \dots \dots (26);$$

für die Amplitude A_m der Schwingung in der Koordinate x_m ergibt sich

$$A_m = x_0/\cos \varphi \dots \dots \dots (27).$$

Da aber meist die Amplitude A in der Koordinate x — also die Schwankung der Temperatur im geregelten Behälter — gesucht wird, ist Gl. (27) noch mit Hilfe von Gl. (3) umzurechnen. Bedeutet ψ den Phasenwinkel zwischen x und x_m , so erhält man mit

$$x_m = A_m \sin(\omega t), \quad x = A \sin(\omega t + \psi) \dots (28)$$

aus Gl. (3) sofort

$$A \sin \psi = A_m T_3 \omega, \quad A \cos \psi = A_m \dots \dots \dots (29)$$

oder nach dem Eliminieren des Phasenwinkels ψ die Amplitudenbeziehung

$$A = A_m \sqrt{1 + T_3^2 \omega^2} = \frac{x_0 \sqrt{1 + T_3^2 \omega^2}}{\cos \varphi} \dots (30).$$

Bild 5 und 6 zeigen als Ergebnis der Auswertung den Verlauf der Amplitude A bzw. der Schwingungsdauer T über der Totzeit τ mit x_0 als Parameter. (Beispiel: Für $\tau = 2 \text{ min}$ und $x_0 = 3 \text{ grad}$ liefert Bild 5 $A = 5,9 \text{ grad}$ bzw. Bild 6 $T = 25 \text{ min}$.)

Für den Fall $x_0 = 0$, also für ein Relais ohne Hysteresis, ergibt sich die Amplitude nicht aus Gl. (30), da dann sowohl der Zähler als auch der Nen-

ner zu null werden. Man geht dann auf Gl. (23) zurück, setzt dort für $\cos \varphi$ den ursprünglichen Wert nach Gl. (20) wieder ein und erhält

$$A = \sqrt{\frac{1 + T_3^2 \omega^2}{B_1^2 + B_2^2}} \dots \dots \dots (31).$$

Der Übergang von Gl. (21) zu Gl. (23) und (25) erleichtert zwar die Auswertung erheblich, besonders wenn das System nicht nur für wenige Werte der Parameter zu berechnen ist, jedoch muß auf eine Fehlerquelle aufmerksam gemacht werden. Infolge des beim Umformen vorgenommenen Quadrierens ergeben Gl. (23) und (25) mehr Lösungen als Gl. (21). Man hat daher jeweils zu prüfen, ob die gefundenen

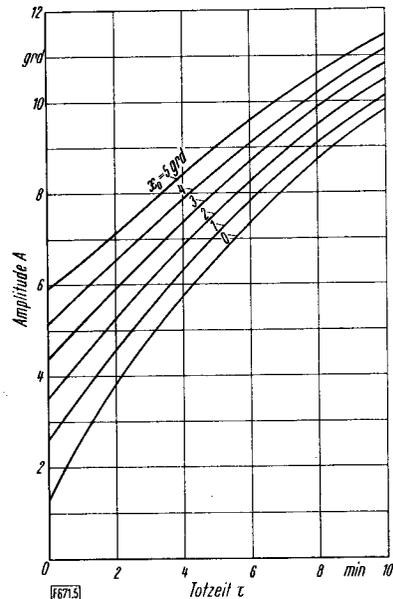


Bild 5. Abhängigkeit der Amplitude A der Temperaturschwankung im geregelten Behälter von der Totzeit τ für verschiedene Werte der halben Hysteresisbreite x_0 .

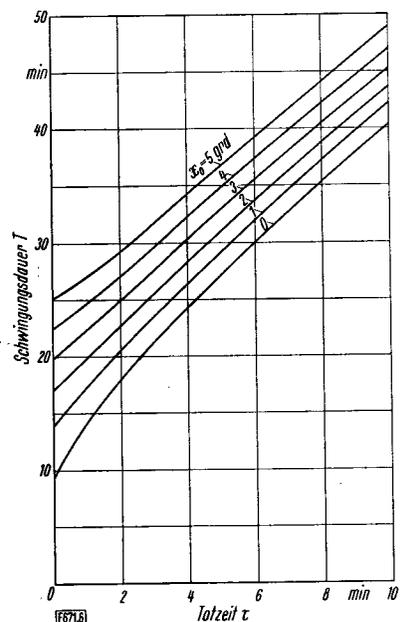


Bild 6. Abhängigkeit der Schwingungsdauer T der Temperaturschwankung im geregelten Behälter von der Totzeit τ für verschiedene Werte der halben Hysteresisbreite x_0 .

Lösungen von Gl. (23) und (25) auch reellen Lösungen von Gl. (21) entsprechen. Dazu genügt das Einsetzen der speziellen Lösung eines bestimmten Lösungstyps von Gl. (23) und (25) in Gl. (21).

3.2 Stabilität der Dauerschwingungen

Wie in [5] gezeigt wurde, kann die Frage nach der Stabilität der ausgerechneten Dauerschwingungen durch eine Untersuchung des Vorzeichens von dR/dA beantwortet werden. Aus Gl. (16) folgt durch Einsetzen der ursprünglichen Werte und unter Berücksichtigung von Gl. (20)

$$R = \left[T_1 + T_2 + T_3 - T_1 T_2 T_3 \omega^2 - \frac{4c}{\pi A \omega} \cos(\omega \tau - \varphi) \right] \left[T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_3 T_1 + \frac{4c x_0}{\pi A^2 \omega^2} \sin(\omega \tau) \right] \dots (32).$$

In Gl. (32) kommt noch $\omega = \omega(A)$ vor, das aus einer der beiden Beziehungen gemäß Gl. (18) bzw. (19) zu bestimmen ist. Da ω jedoch — abgesehen von einigen Sonderfällen — nicht explizit ausgerechnet werden kann, ergeben sich bei der Bildung von dR/dA so verwickelte Ausdrücke, daß man keinerlei allgemeine Aussagen daraus gewinnen kann. Es läßt sich lediglich zeigen, daß im Fall $A \rightarrow \infty$ die Ableitung dR/dA gegen null geht. Für vorgegebene Werte der Systemparameter $T_1, T_2, T_3, c, x_0, \tau$ bildet die Konstruktion der R, A -Kurve jedoch keine grundsätzlichen Schwierigkeiten. Aus der zweiten Beziehung von Gl. (19) entsteht durch Einsetzen von Gl. (9), (10), (15) und (20) nach einigen Umformungen die Beziehung

$$\left. \begin{aligned} \frac{4c}{\pi} \sin(\omega \tau - \varphi) &= \\ &= A_m [1 - \omega^2 (T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_3 T_1)] \end{aligned} \right\} \dots (33),$$

die graphisch gelöst werden kann, indem man eine Sinuskurve mit einer Parabel zum Schnitt bringt. Ändert sich der Wert von A_m , so ist die Sinuskurve entsprechend der zugehörigen Änderung von φ zu verschieben und die Parabel mit einem anderen Faktor zu multiplizieren.

Geht man mit der so aus Gl. (33) zu bestimmenden Funktion $\omega = \omega(A)$ in Gl. (32) ein, so läßt sich $R = R(A)$ ausrechnen. Bild 7 zeigt das Ergebnis für einen festen Wert von x_0 und drei verschiedene Werte von τ . Man sieht, daß dR/dA für $R = 0$, also beim

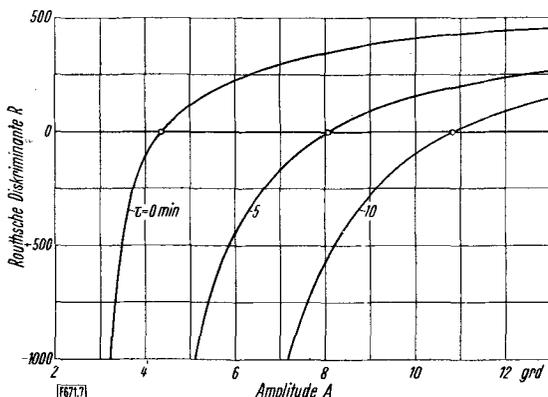


Bild 7. Stabilitätsdiagramm für ein Relais mit Hysterese.

Die Schnittpunkte der Systemkurven konstanter Totzeit τ mit der Geraden $R = 0$ liefern die Amplituden A der Dauerschwingungen; die Steigungen der Kurven $\tau = \text{konst}$ stellen ein Maß für die Stabilität dar.

Durchgang durch die Gerade $R = 0$, positiv ist. Nach einem in [5] angegebenen Satz bleibt somit die entsprechende Dauerschwingung stabil. Es entsprechen die Gerade $R = 0$ der früheren „ R -Kurve“, die anderen Kurven den „ A -Kurven“ in [5]. Aus den Schnittpunkten der Kurven $R = 0$ und $\tau = \text{konst}$ kann wieder die Amplitude A der Dauerschwingung abgelesen werden. Da dR/dA nicht nur für $R = 0$, sondern im gesamten betrachteten Bereich positiv bleibt, folgt nach den in [5] hergeleiteten Sätzen, daß das System bei den gewählten Daten weder im Kleinen noch im Großen gefährlich ist.

Der Sonderfall $\tau = 0$ läßt übrigens eine explizite Lösung zu. Man erhält aus Gl. (33)

$$\omega^2 = \frac{1 + \frac{4c}{\pi A_m} \sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{A_m}\right)^2}}{T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_3 T_1} \dots (34),$$

so daß mit Gl. (34) aus dem dann durch den Fortfall zweier Glieder mit τ vereinfachten Ausdruck gemäß Gl. (32) leicht $R(A)$ ausgerechnet werden kann.

Der Sonderfall $x_0 = 0$ bringt zwar Vereinfachungen, aber keine grundsätzliche Änderung gegenüber dem allgemeinen Fall mit sich, da man ω aus der zweiten Beziehung von Gl. (19) in diesem Falle nicht explizit darzustellen vermag.

4. Regler ohne Hysterese mit Totzone

Bei dem Meßwerk mit einer Charakteristik nach Bild 3b soll das Relais außer den beiden Endlagen noch die Mittelstellung einnehmen können (Dreipunkt-Regelung). Die Mittelstellung wird als Gleichgewichtslage vorausgesetzt, so daß das System bezüglich der Relais-Charakteristik symmetrisch schwingt.

4.1 Bestimmung der Dauerschwingungen

Die Rechnung verläuft ähnlich wie in Abschnitt 3, vereinfacht sich jedoch noch etwas, da $a_2^* = 0$ ist. Die Substitution nach Gl. (20) bringt hier keine Vorteile; denn man erhält bereits unmittelbar aus den beiden Beziehungen gemäß Gl. (19) durch Einsetzen der ursprünglichen Größen

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A_m} \sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{A_m}\right)^2} \sin(\omega \tau) &= B_2(\omega), \\ \frac{1}{A_m} \sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{A_m}\right)^2} \cos(\omega \tau) &= -B_1(\omega) \end{aligned} \right\} \dots (35)$$

mit B_1 und B_2 nach Gl. (22). Wie im vorigen Fall kann man auch jetzt wieder so umformen, daß die Parameter getrennt werden, und findet in entsprechender Weise

$$\text{tg}(\omega \tau) = -B_2/B_1 \dots (36),$$

$$A = \sqrt{1 + T_3^2 \omega^2} \sqrt{\frac{1}{2(B_1^2 + B_2^2)} \pm \sqrt{\frac{1}{4(B_1^2 + B_2^2)^2} - \frac{x_0^2}{B_1^2 + B_2^2}}} (37).$$

Dabei wurde in Gl. (37) bereits die Umrechnung gemäß Gl. (30) berücksichtigt. Bemerkenswerterweise ist die Frequenzgleichung (Gl. (36)) sowohl von x_0 als auch von A_m unabhängig. Anstelle einer Kurvenschar $\omega = \omega(A)$ für verschiedene Werte $\tau = \text{konst}$ braucht daher nur eine einzige Kurve $\omega = \omega(\tau)$ ausgerechnet zu werden, die noch dazu mit der früher für $x_0 = 0$ gefundenen übereinstimmt. Aus Gl. (20) folgt nämlich $\varphi = \pi/2$ für $x_0 = 0$ und damit aus Gl. (24) durch trigonometrisches Umformen Gl. (36). Folglich kann man die Schwingungszeit für den hier betrachteten Fall unmittelbar aus Bild 5 mit $x_0 = 0$ entnehmen.

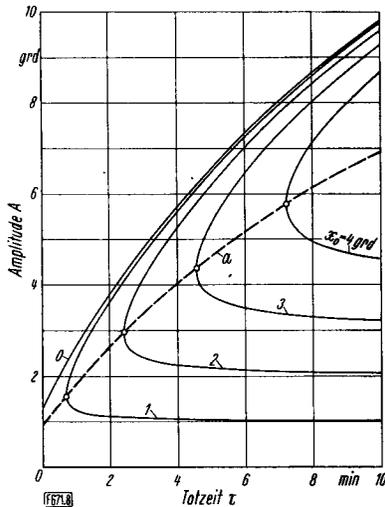


Bild 8. Abhängigkeit der Amplitude A der Temperaturschwankung im geregelten Behälter von der Totzeit τ für verschiedene Werte der halben Totzonenbreite x_0 . a Ortslinie der Doppellösungen (Stabilitätsrand, der den oberen stabilen und den unteren instabilen Ast der Kurven $x_0 = \text{konst}$ trennt.)

Bild 8 zeigt die Auswertung der Amplitudenbeziehung gemäß Gl. (37) für die früher angenommenen Daten. Je nach dem Wert von x_0 sind jetzt verschiedene Fälle möglich. Mit der Abkürzung

$$\bar{x}_0 = \frac{1}{2\sqrt{B_1^2 + B_2^2}} \dots \dots \dots (38)$$

hat Gl. (37) für $x_0 < \bar{x}_0$ zwei reelle Lösungen, also existieren zwei im allgemeinen voneinander verschiedene Gleichgewichtsamplituden. Wie später gezeigt werden wird, entspricht die kleinere der beiden Amplituden einer instabilen, die größere einer stabilen Schwingung. Im Falle $x_0 = \bar{x}_0$ fallen beide Lösungen von Gl. (37) zusammen. In Bild 8 entspricht dieser Fall den Punkten, an denen die Kurven $x_0 = \text{konst}$ lotrechte Tangenten haben. Beim Verändern der Werte von x_0 wandert dieser Verzweigungspunkt der Gleichgewichtslage in Bild 8 längs Kurve a, die durch

$$A = \sqrt{\frac{1 + T_3^2 \omega^2}{2(B_1^2 + B_2^2)}} \dots \dots \dots (39)$$

gegeben ist.

Für $x_0 > \bar{x}_0$ sind keine reellen Lösungen von Gl. (37) mehr möglich; folglich kann das System auch keine Schwingungen ausführen. Physikalisch bedeutet dies, daß das Relais an irgendeiner Stelle des Totbereichs stecken bleibt und das System —

wegen der vorausgesetzten Symmetrie — zur Ruhe kommt. Die beim Eintritt in den Totbereich vorhandene Energie reicht nicht aus, das System den Totbereich durchlaufen zu lassen.

Die für $x_0 = 0$ geltende Kurve in Bild 8 ist mit der entsprechenden Kurve in Bild 5 identisch, da in diesem Falle die beiden Relais-Charakteristiken (vgl. Bild 3a und b) zusammenfallen. Der untere instabile Ast der Kurven in Bild 8 hat eine einfache physikalische Bedeutung: er gibt die Grenze der Anfangsstörungen an, die zu einer der beiden möglichen Zustände führen können. Liegen die Anfangsstörungen über dem instabilen Ast, so nähert sich das System asymptotisch der durch den stabilen Ast gekennzeichneten Dauerschwingung; bei kleineren Anfangsamplituden bleibt das System schließlich im Totbereich stecken.

4.2 Die Stabilität der Dauerschwingungen

Die Routhsche Diskriminante R gemäß Gl. (16) hat für den Regler ohne Hysterese mit Totzone die Form

$$R = (T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_3 T_1) \left\{ T_1 + T_2 + T_3 - \frac{4c \sin(\omega \tau)}{\pi A_m \omega} \sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{A_m}\right)^2} - T_1 T_2 T_3 \omega^2 \right\} \quad (40)$$

Die in Gl. (40) vorkommende Frequenz ω wird aus Gl. (36) gewonnen. Da ω in diesem Fall nicht von der Amplitude abhängt, kann man den für die Stabilität maßgebenden Differentialquotienten unmittelbar aus Gl. (40) ausrechnen:

$$\frac{dR}{dA_m} = (T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_3 T_1) \frac{4c \sin(\omega \tau)}{\pi \omega} \frac{A_m^2 - 2x_0^2}{A_m^4 \sqrt{1 - (x_0/A_m)^2}} \quad (41)$$

Nach Gl. (41) gilt

$$\begin{aligned} dR/dA_m < 0 & \text{ für } x_0 < A_m < \sqrt{2} x_0, \\ dR/dA_m > 0 & \text{ für } \sqrt{2} x_0 < A_m < \infty \end{aligned}$$

bzw. in den Grenzfällen

$$\begin{aligned} dR/dA_m \rightarrow -\infty & \text{ für } A_m \rightarrow x_0, \\ dR/dA_m = 0 & \text{ für } A_m = \sqrt{2} x_0, \\ dR/dA_m \rightarrow 0 & \text{ für } A_m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Es genügt in allen Fällen, die Differentiation nach A_m vorzunehmen; denn wegen Gl. (30) (und da ω von A_m unabhängig ist) unterscheidet sich dR/dA von dR/dA_m nur durch einen stets positiven Faktor.

Der Verlauf der R-Kurven für die früher angegebenen Werte geht aus Bild 9 für den Fall $\tau = 5$ min hervor. Man erkennt unmittelbar, daß die Kurven $x_0 = \text{konst}$ — entsprechend den möglichen Gleichgewichtszuständen — entweder zwei Schnittpunkte oder gar keinen Schnittpunkt mit der Geraden $R = 0$ haben. Bei dem Schnittpunkt mit dem kleineren A -Wert (A_1) ist die Steigung negativ; folglich

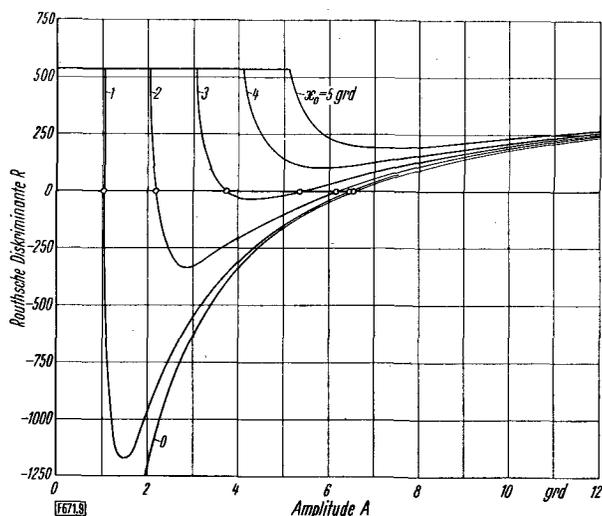


Bild 9. Stabilitätsdiagramm für ein Relais mit Totzone in einem System mit der Totzeit $\tau = 5$ min.

verhält sich nach einem in [5] bewiesenen Satz die zugehörige Schwingung instabil. Bei dem Schnittpunkt mit dem größeren A -Wert (A_2) ergibt sich die Steigung der Kurve als positiv; die zugehörige Schwingung bleibt stabil.

Das System ist „im Kleinen stabil“; denn es gilt $R > 0$ für $A < A_1$; es verhält sich aber auch „im Großen stabil“, da $R > 0$ für $A > A_2$ zutrifft. Trotzdem ist es nicht „im Ganzen stabil“, da ein instabiler Zwischenbereich für $A_1 < A < A_2$ besteht. Die Erregung der stabilen Dauerschwingungen kann nur hart geschehen, d. h. die Störampplitude muß einen bestimmten Mindestwert $A = A_1$ überschreiten. Das „im Großen ungefährliche“ System kann als „gefährlich im Kleinen“ bezeichnet werden, da die Stabilitätskurven für solche Werte von A , die den Betrag x_0 nur wenig überschreiten, die Neigung haben, aus dem stabilen Bereich $R > 0$ herauszulaufer.

5. Zusammenfassung

Durch eine unstetige Regler-Charakteristik bedingte Schwingungen werden sowohl in der Amplitude als auch in der Schwingungszeit vergrößert, wenn im Regelkreis noch zusätzlich eine Totzeit auftritt. Will man die Schwingungen klein halten, so ergibt sich für unstetige Regelkreise die Forderung, Totzeiten nach Möglichkeit zu vermeiden. Für eine Regler-Charakteristik mit Hysterese gilt: 1. die Regelgröße schwingt auch bei verschwindender Totzeit und bei idealer Zweipunkt-Charakteristik des Reglers,

2. das Hinzutreten einer Hysterese vergrößert sowohl die Amplitude wie auch die Schwingungsdauer, 3. die Schwingungen sind stabil, d. h. alle Nachbarschwingungen nähern sich ihnen asymptotisch mit der Zeit, 4. die Schwingungen können weich erregt werden, da sich das System im Kleinen instabil verhält, und 5. das System ist weder im Großen noch im Kleinen gefährlich.

Für eine Regler-Charakteristik mit Totzone gilt im Falle symmetrischer Justierung: 1. der Regelkreis kann nur schwingen, wenn die Breite x_0 der Totzone einen von der Frequenz abhängigen Wert \bar{x}_0 nicht überschreitet. 2. Für $x_0 < \bar{x}_0$ sind zwei Gleichgewichtsamplituden möglich, von denen die kleinere instabil, die größere stabil ist. 3. Für $x_0 > \bar{x}_0$ bleibt das System nach einem Anstoß beliebiger Größe im Laufe der Zeit innerhalb des Totbereichs der Regler-Charakteristik stecken. 4. Auch im Falle $x_0 < \bar{x}_0$ kann das System im Totbereich stecken bleiben, sofern der Wert der Anfangsamplitude den entsprechenden Amplitudenwert für die instabile Gleichgewichtslage nicht überschreitet. 5. Die Erregung der stabilen Schwingung kann nur hart geschehen; die Anfangsamplitude muß also größer sein als der durch die instabile Gleichgewichtslage gegebene Amplitudenwert. 6. Die Einführung einer Totzone in der Regler-Charakteristik wirkt schwingungsmindernd, da zu ihrer Überschreitung Energie verbraucht wird. Bei festgehaltener Totzeit verkleinert sich die Amplitude der stabilen Dauerschwingung durch eine Vergrößerung der Totzonenbreite.

6. Schrifttum

[1] *Küpfmüller, K.*: Regelvorgänge mit Laufzeit. In: Beih. zur Regelungstechnik „Die Laplace-Transformation und ihre Anwendung in der Regelungstechnik“. München 1955; S. 90/103.

[2] *Oppell, W.*: Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge. 2. Aufl. Weinheim 1956; insbes. S. 119/23 u. 160/61.

[3] *Oldenbourg, R. C.*, u. *H. Sarlorius*: Dynamik selbsttätiger Regelungen. München und Berlin 1944; insbes. S. 103/13 u. 114/29.

[4] *Truxal, J. G.*: Automatic feedback control system synthesis. New York, Toronto, London 1955; insbes. S. 546/53.

[5] *Magnus, K.*: Über ein Verfahren zur Untersuchung nichtlinearer Schwingungs- und Regelungssysteme. VDI-Forsch.-Heft 451. Düsseldorf 1955.

[6] *Magnus, K.*: Stationäre Schwingungen in nichtlinearen dynamischen Systemen mit Totzeiten. Ing.-Arch. 24 (1956) S. 341/50.

Eingegangen am 18. 8. 1956

F 671