

Eine Verallgemeinerung der Methode der harmonischen Linearisierung

Von *K. Magnus* in Freiburg/Br.

Zur Berechnung des dynamischen Verhaltens nichtlinearer Systeme hat sich die Methode der harmonischen Linearisierung (auch „Harmonische Balance“, „äquivalente Linearisierung“, „energetische Linearisierung“ oder „Verfahren der Beschreibungsfunktion“ genannt) als besonders wichtiges Hilfsmittel bewährt. Sie gestattet zum Beispiel für ein nichtlineares Ausgangssystem von der Form:

$$\dot{x}_r = \sum_{s=1}^n f_{rs}(x_s) \quad (r = 1, 2, \dots, n) \dots \dots \dots (1)$$

ein lineares Ersatzsystem

$$\dot{x}_r = \sum_{s=1}^n a_{rs} x_s \quad (r = 1, 2, \dots, n) \dots \dots \dots (2)$$

auszurechnen, dessen amplitudenabhängige Beiwerte a_{rs} aus den nichtlinearen Funktionen f_{rs} durch eine endliche Fouriersche Integraltransformation

$$a_{rs} = \frac{1}{\pi A_s} \int_0^{2\pi} f_{rs}(A_s \sin \omega t) \sin \omega t d(\omega t) \dots \dots \dots (3)$$

gewonnen werden.

Es läßt sich nun zeigen, daß dieses Verfahren als Spezialfall des allgemeinen Ritz-Galerkinschen Variationsverfahrens aufgefaßt werden kann. Das System (1) kann mit dem Ritz-Ansatz

$$x_r = \sum_{k=1}^m A_{rk} \Psi_k(\omega t) \dots \dots \dots (4)$$

gelöst werden, wobei die Amplitudenfaktoren A_{rk} nach der Galerkinschen Vorschrift aus

$$\int_0^{2\pi} \left[\dot{x}_r - \sum_{s=1}^n f_{rs}(x_s) \right] \Psi_k(\omega t) d(\omega t) = 0 \quad \begin{matrix} r = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, m \end{matrix} \dots \dots \dots (5)$$

gewonnen werden. Die Ψ_k sind ein zur Approximation geeignetes Funktionensystem.

Das Verfahren der harmonischen Linearisierung wird nun aus den Ritz-Galerkinschen Vorschriften erhalten, wenn:

1. im Ansatz (4) nur das erste Glied mitgenommen wird ($m = 1$),
2. als Approximationsfunktion $\Psi_1(\omega t) = \sin \omega t$ gewählt wird,
3. in die Galerkin-Bedingungen (5) für \dot{x}_r das vorgegebene Ersatzsystem (2) eingesetzt wird.

Nach Vertauschen von Summation und Integration und teilweisem Ausführen der Integration bekommt man so aus (5):

$$\sum_{s=1}^n \left\{ a_{rs} A_s \pi - \int_0^{2\pi} f_{rs}(A \sin \omega t) \sin \omega t d(\omega t) \right\} = 0 \dots \dots \dots (6).$$

Durch gliedweises Nullsetzen folgt daraus unmittelbar wieder die Bestimmungsgleichung (3) für die Beiwerte a_{rs} .

Eine naheliegende Verallgemeinerung der harmonischen Linearisierung wird nun aus dem Ritz-Galerkinschen Verfahren erhalten, wenn man von den oben genannten drei Spezialisierungen die zweite dahingehend abändert, daß als Approximationsfunktion eine beliebige nicht-harmonische, aber natürlich periodische Funktion $\Psi(\omega t)$ gewählt wird. Anstelle der Bestimmungsgleichung (3) bekommt man dann

$$a_{rs} = \frac{1}{h A_s} \int_0^{2\pi} f_{rs}[A_s \Psi(\omega t)] \Psi(\omega t) d(\omega t) \dots \dots \dots (7)$$

mit

$$h = \int_0^{2\pi} \Psi^2 d(\omega t).$$

Die Beiwerte a_{rs} werden also auch jetzt durch eine Integraltransformation gewonnen, jedoch mit einem nicht-harmonischen $\Psi(\omega t)$ als transformierender Funktion.

Das Verfahren ist ohne Schwierigkeiten erweiterungsfähig auf den Fall, daß die Funktionen f_{rs} auch noch von der Zeit abhängen, jedoch in periodischer Weise. Es können also auch erzwungene nichtlineare Schwingungen damit berechnet werden. Man muß nur voraussetzen, daß die Perioden der f_{rs} kommensurabel sind. Vorteile kann die angegebene Verallgemeinerung bringen, wenn die Schwingungen des zu berechnenden Systems stark vom harmonischen Verlauf abweichen, und wenn der allgemeine Charakter der Schwingung entweder aus Versuchen oder durch theoretische Überlegungen bekannt ist. Das trifft für zahlreiche Systeme zu, die zur Erzeugung von Kipperschwingungen verwendet werden, ferner bei fast allen Relaisystemen sowie bei Regelkreisen mit Zweipunkt-Kennlinien.

Einflüsse der Schränkungen von Schubkurbelgetrieben auf die Bewegungsverhältnisse der Gleitstücke*)

Von Ernst Mewes in Braunschweig

Verfasser hat im Ing.-Arch. 24 (1956) H. 5 S. 291 ff. festgestellt, daß bei Schubkurbelgetrieben die Einflüsse des Schränkungsverhältnisses β (= Schränkung: Schubstangenlänge) auf die Bewegungsgesetzmäßigkeiten der Gleitstücke sich ausdrücken lassen durch Faktoren bei den Gliedern mit verschiedenen Potenzen des Schubstangenverhältnisses λ (d. i. Kurbelradius r : Schubstangenlänge). Diese Faktoren können jeweils zusammengesetzt werden aus Faktoren g_n , über die unten noch berichtet wird, und Faktoren $\beta^l (1 - \beta^2)^m$, die infolge $m < 1$ und $m \neq 0$ bei Entwicklung nach dem binomischen Satz stets unendliche Reihen ergeben.

Ist für den Kurbelwinkel ψ die Koordinate des Bolzens für den Anschluß des Gleitstücks, bezogen auf die Kurbelwellenachse in Gleitrichtung:

$$x = r \left(A_0 + \cos \psi + A_1 \sin \psi + \frac{1}{4} A_2 \cos 2\psi - \frac{1}{9} A_3 \sin 3\psi - + + - \dots \right),$$

dann ist mit $\delta = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, $\varepsilon = \beta \delta$, $\nu = \lambda \delta^2$,

$$a_0 = \frac{1}{\nu} \text{ und für } n = 1, 2, 3, \dots:$$

$$a_{2n} = 4 n^2 \left\langle \binom{1/2}{n} \left(\frac{\nu}{2} \right)^{2n-1} \right\rangle, \quad a_{2n-1} = (2n-1)^2 2^n \left\langle \binom{1/2}{n} \left(\frac{\nu}{2} \right)^{2n-2} \right\rangle:$$

$$A_0 = \delta a_0 \left\langle g_0 - \frac{1}{4} \nu^2 \left\{ g_2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 8} \nu^2 \left[g_4 + \frac{5}{12} \nu^2 \left(g_6 + \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 16} \nu^2 g_8 + \dots \right) \right] \right\} \right\rangle,$$

$$A_2 = \delta a_2 \left\langle g_2 + \frac{1}{4} \nu^2 \left\{ g_4 + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 8} \nu^2 \left[g_6 + \frac{7}{12} \nu^2 \left(g_8 + \frac{7 \cdot 9}{6 \cdot 16} \nu^2 g_{10} + \dots \right) \right] \right\} \right\rangle,$$

$$A_4 = \delta a_4 \left\langle g_4 + \frac{3}{4} \nu^2 \left\{ g_6 + \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 8} \nu^2 \left[g_8 + \frac{9}{12} \nu^2 \left(g_{10} + \frac{9 \cdot 11}{8 \cdot 16} \nu^2 g_{12} + \dots \right) \right] \right\} \right\rangle$$

.....

$$A_1 = \varepsilon a_1 \left\langle g_1 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \nu^2 \left\{ g_3 + \frac{5}{8} \nu^2 \left[g_5 + \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 12} \nu^2 \left(g_7 + \frac{7 \cdot 9}{5 \cdot 16} \nu^2 g_9 + \dots \right) \right] \right\} \right\rangle,$$

$$A_3 = \varepsilon a_3 \left\langle g_3 + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \nu^2 \left\{ g_5 + \frac{7}{8} \nu^2 \left[g_7 + \frac{7 \cdot 9}{6 \cdot 12} \nu^2 \left(g_9 + \frac{9 \cdot 11}{7 \cdot 16} \nu^2 g_{11} + \dots \right) \right] \right\} \right\rangle$$

.....

Die g_n sind endliche Potenzreihen von β^2 , z. B.

$$g_0 = g_1 = g_2 = g_3 = 1,$$

$$g_4 = 1 + 4 \beta^2, \quad g_5 = 1 + \frac{4}{3} \beta^2,$$

$$g_6 = 1 + 12 \beta^2 + 8 \beta^4, \text{ usw.}$$

*) Aus dem Institut für Landtechnische Grundlagenforschung der Forschungsanstalt für Landwirtschaft. (Direktor: Prof. Dr.-Ing. Dr. agr. h. c. W. Kloth).