

Über den Zusammenhang verschiedener Näherungsverfahren zur Berechnung nichtlinearer Schwingungen

Von K. Magnus in Freiburg/Breisgau

Es wird gezeigt, daß einige der in der nichtlinearen Mechanik viel gebrauchten Näherungsmethoden (Äquivalente Linearisierung, Harmonische Balance, Beschreibungsfunktion, Energie-Mittelung, Fehlerquadrat-Minimum) als Spezialfälle des allgemeinen Ritz-Galerkin'schen Variationsverfahren aufgefaßt werden können. Unter Verwendung der Ritz-Galerkin'schen Vorschriften wird ein verallgemeinertes Verfahren zur Linearisierung durch nichtharmonische Funktionen angegeben, das für die Berechnung von Relaxationsschwingungen Vorteile bringen kann.

Some approximation methods frequently used in non-linear mechanics (equivalent linearisation, harmonic balance, describing function, mean energy, square deviation minimum) are shown to be special cases of the general variational method due to Ritz and Galerkin. Following the prescriptions given by Ritz-Galerkin a generalized method is derived allowing the linearisation by means of anharmonic functions. It is expected that this method will offer some advantages in the treatment of relaxation oscillations.

On démontre que des méthodes approximatives employées souvent dans la mécanique non-linéaire (linéarisation équivalente, équilibre harmonique, fonction de décrirre, détermination de la moyenne de l'énergie, minimum de carré d'erreur) peuvent être comprises comme des cas spéciaux du procédé général de variations d'après Ritz-Galerkin. En appliquant les instructions de Ritz-Galerkin on indique un procédé généralisé pour la linéarisation au moyen de fonctions non-harmoniques qui peut produire des avantages pour la calcul des oscillations de relaxation.

Показывается, что некоторые приближенные методы (эквивалентная линеаризация, гармонический баланс, изображающая функция, вычисление среднего значения энергии, минимум квадрата ошибки), часто используемые в нелинейной механике, можно рассматривать как частные случаи общего вариационного метода Ритца-Галеркина. При помощи правил Ритца-Галеркина выводится обобщенный метод линеаризации с помощью негармонических функций, который может быть удобным для вычисления релаксационных колебаний.

1. Einleitung

Für die Berechnung nichtlinearer Schwingungen wurden in den letzten 30 Jahren eine große Anzahl von Näherungsverfahren entwickelt, die von mehr oder weniger ähnlichen Grundvorstellungen ausgehend letzten Endes zu den gleichen Ergebnissen führen. Bei der Ausarbeitung fast aller dieser Verfahren dürfte der Wunsch, die bequemen und weitreichenden Hilfsmittel der linearen Mathematik verwenden zu können, eine ausschlaggebende Rolle gespielt haben, denn fast immer ist man dabei von der Methode der „Kleinen Schwingungen“ ausgegangen, die sich vor allem seit Routh als außerordentlich fruchtbar erwiesen hatte. In dem Bestreben, den Bereich der linearen Schwingungen zu verlassen, ohne die hier bewährten Methoden ganz aufzugeben, versuchte man einerseits durch eine andere Art der Linearisierung eines vorgegebenen Problems, andererseits durch die Annahme von „fast harmonischen“ Schwingungen zum Ziel zu gelangen. Das Schrifttum zu diesen Fragen ist derart umfangreich geworden, daß darauf verzichtet werden muß, die historische Entwicklung zu streifen. In den einschlägigen Büchern und dem am Schluß zusammengestellten Schrifttum findet man weitergehende Angaben.

Für die früher fast ausschließlich behandelten schwingenden Systeme mit einem Freiheitsgrad ist schon mehrfach darauf hingewiesen worden, daß verschiedene Näherungsverfahren zu identischen Ergebnissen führen. So haben bereits Krylov und Bogoljubov (1934) gezeigt, daß das von ihnen entwickelte Verfahren der „Harmonischen Balance“, das auch unter den Bezeichnungen der „Harmonischen Linearisierung“ oder der „Äquivalenten Linearisierung“ bekannt geworden ist, sowie auch das Verfahren der „Energetischen Balance“ nur Spezialfälle des allgemeineren Verfahrens der Variation der Konstanten sind, das in den klassischen Arbeiten von van der Pol zum ersten Male für die Berechnung nichtlinearer Schwingungsprobleme eingesetzt wurde. Lur'e [1] hat bemerkt, daß das Poincarésche Verfahren der Störungsrechnung bei Beschränkung der Betrachtung auf die sogenannte erste Näherung Ergebnisse liefert, die mit denen der „Harmonischen Balance“ identisch sind. Er bewies sein Ergebnis ganz allgemein für ein System n -ter Ordnung, in dem allerdings nur eine nichtlineare Funktion vorkommt. In sehr allgemeiner Form wurde der Nachweis von Bulgakov [2] geführt, der sich mit einer Verallgemeinerung der weitreichenden Methode der Variation der Konstanten auf Systeme n -ten Grades beschäftigt hat.

Auf die Wesensgleichheit der Verfahren der Energiemittelung und der Harmonischen Balance hat Teodorčik [3] hingewiesen. Außerdem ist das in der Regelungstheorie vielfach verwendete Verfahren der „Beschreibungsfunktion“ (Kochenburger [4]) nicht nur im Ergebnis, sondern bereits im Ansatz mit der „Harmonischen Balance“ identisch.

Neben den bisher genannten Verfahren ist auch die Variationsmethode von Ritz-Galerkin zur Berechnung nichtlinearer Schwingungen herangezogen worden (siehe z. B. Klotter [5], [6] so-

wie Lur'e und Čekmarev [7]). Daß auch diese unter gewissen Bedingungen ähnliche Ergebnisse wie die zuvor genannten Näherungsverfahren liefert, wurde zwar schon vermutet, scheint aber bisher noch nicht allgemein bewiesen zu sein.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist nun der Nachweis, daß die genannten Näherungsverfahren ganz allgemein für Systeme n -ter Ordnung als Spezialfälle der Näherungsmethode von Ritz-Galerkin aufgefaßt werden können. Diese Erkenntnis wird uns einerseits die Möglichkeit geben, gewisse Verallgemeinerungen der bisherigen Verfahren vorzunehmen, andererseits zeigt sie, daß keines der genannten Verfahren prinzipielle Vorteile vor den anderen besitzt. Um die folgenden Betrachtungen nicht zu sehr auszuweiten, sollen Einschwingungsvorgänge unberücksichtigt bleiben, also nur die praktisch meist interessierenden stationären Schwingungen untersucht werden. Dabei werden wir uns auf solche Systeme beschränken müssen, bei denen Schwingungen einer bestimmten Schwingungsperiode, nicht aber Überlagerungen stationärer Schwingungen verschiedener inkommensurabler Perioden vorkommen. Diese Einschränkung dürfte nicht sehr einschneidend sein, da in der Praxis stationäre Zustände auch in Systemen mit beliebig vielen Freiheitsgraden fast ausschließlich „ein-periodisch“ sind.

2. Ausgangsgleichungen und Problemstellung

Die Bewegungsgleichungen dynamischer Systeme können durch geeignete Wahl der Zustandskoordinaten stets auf die allgemeine Form

$$\dot{x}_r = f_r(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad (r = 1, 2, \dots, n) \dots \dots \dots (1)$$

gebracht werden. Bezüglich der Zeitabhängigkeit der Funktionen f_r wollen wir dabei voraussetzen, daß sie periodisch mit der Frequenz ω seien:

$$f_r\left(x_1, x_2, \dots, x_n, t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = f_r(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \dots \dots \dots (2).$$

Wenn wir für die f_r weiterhin zulassen, daß sie auch unstetig oder nicht analytisch sein können, dann schließen wir damit von vornherein die Anwendung der Störungsrechnung aus. Denn bei dieser muß für die nichtlinearen Funktionen Entwickelbarkeit in eine Potenzreihe gefordert werden. Die „Methode des kleinen Parameters“ soll also hier nicht weiter beachtet werden — sie ist zudem hinreichend ausführlich von anderen Autoren (z. B. [1] und [2]) behandelt worden.

Für die weiteren Untersuchungen ist es nun zweckmäßig, von den Funktionen f_r der rechten Seiten von (1) das lineare Teilsystem abzuspalten, daß sich nach den Vorschriften der Methode der Kleinen Schwingungen ergibt:

$$\dot{x}_r = \sum_{s=1}^n c_{rs} x_s + g_r(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \dots \dots \dots (3)$$

mit

$$c_{rs} = \frac{\partial f_r}{\partial x_s},$$

wobei wir voraussetzen wollen, daß die Koeffizienten c_{rs} die Zeit t nicht mehr enthalten.

Unabhängig von dem allgemeinen System (1) soll ein wichtiger Spezialfall behandelt werden, bei dem sich die rechte Seite in eine Summe nichtlinearer Funktionen von nur je einer der Variablen und der Zeit t aufspalten läßt:

$$\dot{x}_r = \sum_{s=1}^n f_{rs}(x_s, t) \dots \dots \dots (4),$$

Obwohl dieser Fall bei der allgemeinen Prozedur für das System (1) miteingefügt wird, hat es sich als zweckmäßig herausgestellt, ihn gesondert zu behandeln, da für ihn die Verhältnisse besonders durchsichtig werden.

Praktisch alle eingangs erwähnten Näherungsverfahren laufen nun darauf hinaus, die in den Systemen (1) bzw. (4) möglichen periodischen Lösungen (d. h. stationäre Schwingungen) mit harmonischen Schwingungen zu vergleichen, die in einem hypothetischen linearen System auftreten können. Wir wollen für dieses lineare Ersatzsystem die Form:

$$\dot{x}_r = \sum_{s=1}^n (a_{rs} x_s + a_{rs}^* \dot{x}_s) \dots \dots \dots (5),$$

wählen — und zwar gleichermaßen für die beiden Ausgangssysteme (1) bzw. (4). In der Art der Bestimmung der in (5) vorkommenden Koeffizienten unterscheiden sich nun die verschiedenen Näherungsverfahren. Als wesentlichstes Ergebnis der Arbeit wird sich zeigen, daß trotz ver-

schiedener Wege in allen hier zu untersuchenden Fällen genau die gleichen Bestimmungsgleichungen für die a_{rs} und a_{rs}^* herauskommen.

Nach der klassischen Methode der Kleinen Schwingungen erhalte man einfach

$$a_{rs} = c_{rs}; \quad a_{rs}^* = 0$$

mit den Beiwerten c_{rs} von (3). Durch diese primitive Art der Linearisierung wird der Zugang zu den eigentlich nichtlinearen Erscheinungen versperrt. Der Trick aller nun zu besprechenden andersartigen Näherungsverfahren besteht darin, daß zwar zur Erleichterung der Rechnung in den Variablen linearisiert wird, daß aber die Nichtlinearität auf dem Umwege über eine Parameterabhängigkeit der Koeffizienten wieder eingeschleust wird.

3. Das Prinzip der Harmonischen Balance

Mit dem harmonischen Ansatz

$$x_r = A_r \sin(\omega t + \varphi_r) = A_r \sin \Phi_r \dots \dots \dots (6)$$

bekommt man nach Eingehen in (3) auf den rechten Seiten periodische Funktionen g_r , deren Fourierzerlegung

$$g_r = b_{r0} + \sum_{k=1}^{\infty} (b_{rk} \sin k \omega t + b_{rk}^* \cos k \omega t)$$

sein möge. Subtrahiert man nun nach dem Einsetzen von (6) das ursprüngliche System (3) vom Ersatzsystem (5), so folgt:

$$\sum_{s=1}^n (a_{rs} A_s \sin \Phi_s + a_{rs}^* A_s \omega \cos \Phi_s - c_{rs} A_s \sin \Phi_s) - b_{r0} - \sum_{k=1}^{\infty} (b_{rk} \sin k \omega t + b_{rk}^* \cos k \omega t) = 0 \dots (7)$$

Um diese Gleichungen befriedigen zu können, wird zunächst $b_{r0} = 0$ vorausgesetzt. Diese Forderung ist zum Beispiel stets für ungerade Funktionen g_r erfüllt. Weiterhin werden die in der Fourierzerlegung von g_r auftretenden Oberschwingungen vernachlässigt, so daß in (7) nur noch periodische Funktionen der gleichen Frequenz ω vorkommen. Unter Berücksichtigung von (6) kann (7) dann in der Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} & \sin \omega t \left\{ \sum_{s=1}^n a_{rs} A_s \cos \varphi_s - a_{rs}^* A_s \omega \sin \varphi_s - c_{rs} A_s \cos \varphi_s \right\} - b_{r1} \\ & + \cos \omega t \left\{ \sum_{s=1}^n (a_{rs} A_s \sin \varphi_s + a_{rs}^* A_s \omega \cos \varphi_s - c_{rs} A_s \sin \varphi_s) - b_{r1}^* \right\} = 0 \dots (8) \end{aligned}$$

Die Erfüllung dieser Beziehung ist auf viele Arten möglich, da die noch verfügbaren Unbekannten a_{rs} und a_{rs}^* in verschiedener Weise gewählt werden können. Wir wollen hier (8) durch die Festsetzung $\varphi_1 = 0$ (Festlegung des Zeitnullpunktes durch den Nulldurchgang der Schwingung der Koordinate x_1) und die Annahmen:

$$\left. \begin{aligned} a_{r1} &= c_{r1} + \frac{b_{r1}}{A_1}; & a_{rs} &= c_{rs} \\ a_{r1}^* &= \frac{b_{r1}^*}{A_1 \omega}; & a_{rs}^* &= 0 \end{aligned} \right\} \text{für } s \geq 2 \dots \dots \dots (9)$$

erfüllen. Physikalisch bedeutet dies, daß die Grundharmonischen der Fourierzerlegung der g_r mit den aus dem Ersatzsystem kommenden Schwingungen der Koordinate x_1 „ausbalanciert“ werden. Man hätte mit dem gleichen Recht natürlich jede andere Koordinate hierzu heranziehen können.

Setzt man in (9) die bekannten Ausdrücke für die Fourierkoeffizienten b_{r1} und b_{r1}^* ein, so folgt:

$$\left. \begin{aligned} a_{r1} &= c_{r1} + \frac{1}{\pi A_1} \int_0^{2\pi} g_r(A_1 \sin \Phi_1, A_2 \sin \Phi_2, \dots, t) \sin \omega t d(\omega t), \\ a_{r1}^* &= \frac{1}{\pi A_1 \omega} \int_0^{2\pi} g_r(A_1 \sin \Phi_1, A_2 \sin \Phi_2, \dots, t) \cos \omega t d(\omega t) \end{aligned} \right\} \dots \dots (10)$$

Damit sind die Koeffizienten des Ersatzsystems (5) bestimmt.

Für das speziellere, aber praktisch wichtigere System (4) geht man in entsprechender Weise vor: durch Einsetzen des harmonischen Ansatzes (6) werden alle f_{rs} periodisch und können in

Fourierreihen zerlegt werden. Dabei nimmt man die Zerlegung zweckmäßigerweise so vor, daß der Phasenwinkel jeder Koordinate mit berücksichtigt wird:

$$f_{rs} = b_{rs0} + \sum_{k=1}^{\infty} (b_{rsk} \sin k \Phi_s + b_{rsk} \cos k \Phi_s) \dots \dots \dots (11).$$

Durch Vernachlässigung der höheren Harmonischen und die Annahme $b_{rs0} = 0$ bekommt man nun wie zuvor durch Differenzbildung anstelle von (8) die Gleichungen:

$$\sum_{s=1}^n [\sin \Phi_s (a_{rs} A_s - b_{rs1}) + \cos \Phi_s (a_{rs}^* A_s \omega - b_{rs1}^*)] = 0 \dots \dots \dots (12).$$

Diese Gleichungen werden durch Nullsetzen der einzelnen Faktoren befriedigt, so daß für die Koeffizienten die Bestimmungsgleichungen folgen:

$$\left. \begin{aligned} a_{rs} &= \frac{b_{rs1}}{A_s} = \frac{1}{\pi A_s} \int_0^{2\pi} f_{rs}(A_s \sin \Phi_s, t) \sin \Phi_s d\Phi_s, \\ a_{rs}^* &= \frac{b_{rs1}^*}{A_s \omega} = \frac{1}{\pi A_s \omega} \int_0^{2\pi} f_{rs}(A_s \sin \Phi_s, t) \cos \Phi_s d\Phi_s, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13).$$

Physikalisch gesehen werden hier die Grundharmonischen der periodischen f_{rs} -Funktionen jeweils mit der Schwingung ausbalanciert, die als Argument in f_{rs} eingeht. Sowohl die Bestimmungsgleichungen (10) als auch (13) sind Integraltransformationen, durch die die Funktionen g_r bzw. f_{rs} der Variablen x_r in die von Parametern A_r abhängigen Koeffizienten a_{rs} und a_{rs}^* umgewandelt werden. (13) besitzt vor (10) den Vorteil, daß nur eine Variable bzw. nur ein Parameter eingeht, so daß diese Transformation leicht auch tabellenmäßig erfaßt werden kann.

4. Die Methode der Variation der Konstanten

Es sei wieder das Ausgangssystem (3) vorgegeben und ein Ersatzsystem der Form (5) gesucht. Dann läßt sich der Gedankengang der Methode der Variation der Konstanten etwa folgendermaßen formulieren:

Die Lösung des Ersatzsystems sei bekannt und — da hier nur stationäre Schwingungen betrachtet werden sollen — von der Form

$$\tilde{x}_r = A_{r1} \sin \omega t + A_{r2} \cos \omega t \dots \dots \dots (14).$$

Dieser Ausdruck soll nun als Ansatz für die Lösung des nichtlinearen Ausgangssystems (3) verwendet werden, jedoch mit Amplitudenfaktoren A_{r1} und A_{r2} , die noch von der Zeit abhängig sind. Man hat also:

$$\left. \begin{aligned} x_r &= A_{r1}(t) \sin \omega t + A_{r2}(t) \cos \omega t, \\ \dot{x}_r &= \dot{A}_{r1} \sin \omega t + \dot{A}_{r2} \cos \omega t + A_{r1} \omega \cos \omega t - A_{r2} \omega \sin \omega t, \\ &= \dot{A}_{r1} \sin \omega t + A_{r2} \cos \omega t + \dot{x} \end{aligned} \right\} \dots \dots (15).$$

Geht man damit in (3) ein, so folgt unter Berücksichtigung von (5):

$$\dot{A}_{r1} \sin \omega t + \dot{A}_{r2} \cos \omega t = \sum_{s=1}^n c_{rs} x_s + g_r(x_1, x_2, \dots, x_n, t) - \sum_{s=1}^n (a_{rs} \tilde{x}_s + a_{rs}^* \dot{\tilde{x}}_s) \dots (16).$$

Der Ansatz (15) enthält zwei noch zu bestimmende Funktionen. Da die Ausgangsgleichungen nur von erster Ordnung sind, kann noch eine willkürliche Beziehung zwischen diesen beiden Funktionen eingeführt werden; es ist zweckmäßig,

$$\dot{A}_{r1} \cos \omega t - \dot{A}_{r2} \sin \omega t = 0 \dots \dots \dots (17)$$

vorauszusetzen. Nun lassen sich (16) und (17) als Bestimmungsgleichungen für die \dot{A}_{r1} und \dot{A}_{r2} auffassen und lösen:

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_{r1} &= \sum_{s=1}^n [(c_{rs} - a_{rs}) (A_{s1} \sin \omega t + A_{s2} \cos \omega t) - a_{rs}^* \omega (A_{s1} \cos \omega t - A_{s2} \sin \omega t)] \sin \omega t \\ &\quad + g_r(\dots) \sin \omega t, \\ \dot{A}_{r2} &= \sum_{s=1}^n [(c_{rs} - a_{rs}) (A_{s1} \sin \omega t + A_{s2} \cos \omega t) - a_{rs}^* \omega (A_{s1} \cos \omega t - A_{s2} \sin \omega t)] \cos \omega t \\ &\quad + g_r(\dots) \cos \omega t \end{aligned} \right\} (18).$$

Die rechten Seiten sind periodische Funktionen mit der Frequenz ω . Von den Amplitudenfaktoren A_{r1} und A_{r2} wird aber vorausgesetzt, daß sie langsam veränderliche Funktionen der Zeit seien. Man wird also annehmen können, daß sie während einer Periode von der Dauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$ praktisch konstant sind. Dann aber kann man anstelle der rechten Seiten von (18) die zeitlichen Mittelwerte über eine Periode einsetzen.

Zur Abkürzung der Schreibweise sei jetzt

$$\omega t = \gamma \dots \dots \dots (19)$$

eingeführt und dann die rechte Seite von (18) über γ von 0 bis 2π integriert:

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_{r1} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^n [(c_{rs} - a_{rs}) A_{s1} \pi + a_{rs}^* \omega A_{s2} \pi] + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_r(\dots) \sin \gamma d\gamma, \\ \dot{A}_{r2} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^n [(c_{rs} - a_{rs}) A_{s2} \pi - a_{rs}^* \omega A_{s1} \pi] + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_r(\dots) \cos \gamma d\gamma \end{aligned} \right\} \dots (20).$$

Beschränkt man sich nun auf die Untersuchung stationärer Schwingungen, dann werden die linken Seiten Null, und die rechten können als Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten a_{rs} und a_{rs}^* aufgefaßt werden. Es gibt auch in diesem Falle — wie schon bei der Methode der Harmonischen Balance — viele Möglichkeiten, die Gleichungen (20) zu befriedigen, da nur $2n$ Gleichungen für die $2n^2$ Unbekannten vorhanden sind. Setzen wir jedoch, wie schon bei (9):

$$\left. \begin{aligned} a_{rs} &= c_{rs} \\ a_{rs}^* &= 0 \end{aligned} \right\} \text{für } s \geq 2 \dots \dots \dots (21),$$

dann geht (20) über in:

$$\left. \begin{aligned} \pi [(c_{r1} - a_{r1}) A_{11} + a_{r1}^* \omega A_{12}] &= - \int_0^{2\pi} g_r(\dots) \sin \gamma d\gamma, \\ \pi [(c_{r1} - a_{r1}) A_{12} - a_{r1}^* \omega A_{11}] &= - \int_0^{2\pi} g_r(\dots) \cos \gamma d\gamma \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (22).$$

Nun soll der Zeitnullpunkt — wie früher — so gewählt werden, daß für die Koordinate x_1 eine reine Sinusschwingung herauskommt, also $A_{12} = 0$ und $A_{11} = A_1$ wird. Dann läßt sich (22) leicht auflösen und ergibt genau die Bestimmungsgleichungen (10).

Für das speziellere System (4) bekommt man mit den gleichen Ansätzen (14) bzw. (15) anstelle der früheren Beziehung (18) jetzt:

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_{r1} &= \sum_{s=1}^n [f_{rs}(A_s \sin \Phi_s, t) - a_{rs} (A_{s1} \sin \gamma + A_{s2} \cos \gamma) - a_{rs}^* \omega (A_{s1} \cos \gamma - A_{s2} \sin \gamma)] \sin \gamma, \\ \dot{A}_{r2} &= \sum_{s=1}^n [f_{rs}(A_s \sin \Phi_s, t) - a_{rs} (A_{s1} \sin \gamma + A_{s2} \cos \gamma) - a_{rs}^* \omega (A_{s1} \cos \gamma - A_{s2} \sin \gamma)] \cos \gamma \end{aligned} \right\} (23).$$

Integration der rechten Seiten über eine volle Periode und Nullsetzen der linken Seiten führt dann zu:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^n [f_{rs}(A_s \sin \Phi_s, t) \sin \gamma d\gamma - a_{rs} A_{s1} \pi + a_{rs}^* A_{s2} \omega \pi] &= 0, \\ \sum_{s=1}^n [f_{rs}(A_s \sin \Phi_s, t) \cos \gamma d\gamma - a_{rs} A_{s2} \pi - a_{rs}^* A_{s1} \omega \pi] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24).$$

Durch gliedweises Nullsetzen bekommt man daraus ein System von $2n^2$ Gleichungen für die zu bestimmenden $2n^2$ Koeffizienten. Multipliziert man nun die aus der oberen Beziehung von (24) folgenden Gleichungen jeweils mit $\cos \varphi_s$ (bzw. $\sin \varphi_s$), entsprechend die aus der unteren Beziehung folgenden Gleichungen mit $\sin \varphi_s$ (bzw. $-\cos \varphi_s$) und addiert dann paarweise, so bekommt man unter Berücksichtigung der Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin \gamma \cos \varphi_s + \cos \gamma \sin \varphi_s &= \sin \Phi_s, & \sin \gamma \sin \varphi_s - \cos \gamma \cos \varphi_s &= \cos \Phi_s, \\ A_{s1} \cos \varphi_s + A_{s2} \sin \varphi_s &= A_s, & A_{s1} \sin \varphi_s - A_{s2} \cos \varphi_s &= 0 \end{aligned}$$

wieder genau die schon vorher erhaltenen Bestimmungsgleichungen (13) für die a_{rs} und a_{rs}^* .

5. Fehlertheoretische Berechnung

Wenn der harmonische Ansatz (6) in die rechten Seiten des Ausgangssystems (3) und des zugehörigen Ersatzsystems (5) eingesetzt wird, dann werden die auf den linken Seiten herauskommenden zeitlichen Ableitungen der Variablen in beiden Fällen nicht miteinander übereinstimmen. Der Fehler ist

$$\Delta_r = \dot{x}_r - \dot{\tilde{x}}_r = g_r(\dots) + \sum_{s=1}^n [(c_{rs} - a_{rs}) x_s - a_{rs}^* \dot{x}_s] \dots \dots \dots (25).$$

Dabei ist der aus dem Ersatzsystem folgende Wert für die Ableitung durch eine darübersetzte Schlange gekennzeichnet worden. Wir verlangen nun, daß der mittlere quadratische Fehler ein Minimum werden soll, und errechnen den Mittelwert durch Integration über eine volle Periode:

$$\bar{\Delta}_r^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta_r^2 d\gamma \dots \dots \dots (26).$$

Die Minimalbedingungen ergeben nun:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Delta}^2}{\partial a_{rk}} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ -2 g_r x_k - 2 x_k \sum_{s=1}^n [(c_{rs} - a_{rs}) x_s - a_{rs}^* \dot{x}_s] \right\} d\gamma = 0, \\ \frac{\partial \bar{\Delta}^2}{\partial a_{rk}^*} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ -2 g_r \dot{x}_k - 2 \dot{x}_k \sum_{s=1}^n [(c_{rs} - a_{rs}) x_s - a_{rs}^* \dot{x}_s] \right\} d\gamma = 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots (27).$$

Geht man hier mit dem Ansatz (14) ein und wählt den Zeitpunkt wieder so, daß $A_{11} = A_1$ und $A_{12} = 0$ wird, dann bekommt man durch Ausführen der Integration:

$$\left. \begin{aligned} &A_{k1} \int_0^{2\pi} g_r(\dots) \sin \gamma d\gamma + A_{k2} \int_0^{2\pi} g_r(\dots) \cos \gamma d\gamma \\ &= -A_{k1} \pi \sum_{s=1}^n [(c_{rs} - a_{rs}) A_{s1} + a_{rs}^* \omega A_{s2}] - A_{k2} \pi \sum_{s=1}^n [(c_{rs} - a_{rs}) A_{s2} - a_{rs}^* \omega A_{s1}], \\ &A_{k1} \omega \int_0^{2\pi} g_r(\dots) \cos \gamma d\gamma - A_{k2} \omega \int_0^{2\pi} g_r(\dots) \sin \gamma d\gamma \\ &= -A_{k1} \omega \pi \sum_{s=1}^n [(c_{rs} - a_{rs}) A_{s2} - a_{rs}^* \omega A_{s1}] + A_{k2} \omega \pi \sum_{s=1}^n [(c_{rs} - a_{rs}) A_{s1} + a_{rs}^* \omega A_{s2}] \end{aligned} \right\} (28).$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit $A_{k2} \omega$ (bzw. mit $A_{k1} \omega$), die zweite mit A_{k1} (bzw. $-A_{k2}$) und addiert dann, so folgen nach Kürzen durch

$$A_{k1}^2 + A_{k2}^2 = A_k^2$$

die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} g_r(\dots) \sin \gamma d\gamma &= -\pi \sum_{s=1}^n [(c_{rs} - a_{rs}) A_{s1} + a_{rs}^* \omega A_{s2}], \\ \int_0^{2\pi} g_r(\dots) \cos \gamma d\gamma &= -\pi \sum_{s=1}^n [(c_{rs} - a_{rs}) A_{s2} - a_{rs}^* \omega A_{s1}] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (29).$$

Das sind aber genau dieselben Gleichungen, wie sie bei der Methode der Variation der Konstanten nach Nullsetzen der linken Gleichungen von (20) erhalten wurden, so daß die jetzige Rechnung auf den früheren Fall zurückgeführt worden ist.

Im Spezialfall des Ausgangssystems (4) bekommen wir anstelle von (25) die Fehlergleichung:

$$\Delta_r = \dot{x}_r - \dot{\tilde{x}}_r = \sum_{s=1}^n [f_{rs}(x_s, t) - a_{rs} x_s - a_{rs}^* \dot{x}_s] = \sum_{s=1}^n \Delta_{rs} \dots \dots \dots (30).$$

Jetzt wird für jeden Teilfehler der quadratische Mittelwert

$$\bar{\Delta}_{rs}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta_{rs}^2 d\Phi_s$$

gebildet, und dann aus den Minimalbedingungen:

$$\frac{\partial \bar{\Delta}_{rs}^2}{\partial a_{rk}} = 0 ; \quad \frac{\partial \bar{\Delta}_{rs}^2}{\partial a_{rk}^*} = 0 \dots \dots \dots (31)$$

ein System von $2n^2$ Gleichungen für die a_{rs} und a_{rs}^* gewonnen. Man verwendet in diesem Fall am besten den Ansatz (6), in dem die Phasenwinkel mit berücksichtigt sind und bekommt dann aus (31)

$$\left. \begin{aligned} -\int_0^{2\pi} f_{rs}(A_s \sin \Phi_s, t) A_s \sin \Phi_s d\Phi_s + a_{rs} A_s^2 \pi &= 0, \\ -\int_0^{2\pi} f_{rs}(A_s \sin \Phi_s, t) A_s \omega \cos \Phi_s d\Phi_s + a_{rs}^* A_s^2 \omega^2 \pi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (32).$$

Daraus folgen aber unmittelbar wieder die früheren Bestimmungsgleichungen (13).

6. Energie-Mittelungsverfahren

Bei diesem, von verschiedenen Autoren (z. B. Barkhausen [8], Den Hartog [9], Teodorčik [3]) mit großem Erfolg verwendeten Verfahren geht man von der Forderung aus, daß die pro Vollschiwingung umgesetzte Energie für das nichtlineare Ausgangssystem denselben Wert haben soll wie für das Ersatzsystem. Die Energie wird durch zeitliche Integration der Leistung gewonnen, so daß die Ausgangsforderung — unter Fortlassung der hier nicht weiter interessierenden Dimensionfaktoren — mathematisch wie folgt formuliert werden kann:

$$\int_0^{2\pi} \dot{x}_r x_r d\gamma = \int_0^{2\pi} \dot{x}_r x_r d\gamma \dots \dots \dots (33),$$

oder:

$$\int_0^{2\pi} g_r(\dots) x_r d\gamma = \int_0^{2\pi} x_r \sum_{s=1}^n [(a_{rs} - c_{rs}) x_s + a_{rs}^* \dot{x}_s] d\gamma \dots \dots \dots (34).$$

Mit dem Ansatz (14) läßt sich die Integration auf der rechten Seite durchführen, und man erhält nach gleichzeitigem Aufspalten in eine Sinus- und eine Cosinus-Komponente (was physikalisch der Trennung von Wirk- und Blind-Komponente der Leistung entspricht) das System:

$$\left. \begin{aligned} A_{r1} \int_0^{2\pi} g_r(\dots) \sin \gamma d\gamma &= A_{r1} \pi \sum_{s=1}^n [(a_{rs} - c_{rs}) A_{s1} - a_{rs}^* \omega A_{s2}], \\ A_{r2} \int_0^{2\pi} g_r(\dots) \cos \gamma d\gamma &= A_{r2} \pi \sum_{s=1}^n [(a_{rs} - c_{rs}) A_{s2} + a_{rs}^* \omega A_{s1}] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (35).$$

Das entspricht vollkommen dem früheren System (20) mit $\dot{A}_{r1} = \dot{A}_{r2} = 0$, so daß die Rechnung an dieser Stelle abgebrochen werden kann.

Für den Sonderfall eines Ausgangssystems von der Form (4) bekommt man anstelle von (34) die Beziehung:

$$\sum_{s=1}^n \left[\int_0^{2\pi} f_{rs}(x_s, t) x_r d\gamma - \int_0^{2\pi} (a_{rs} x_s + a_{rs}^* \dot{x}_s) x_r d\gamma \right] = 0 \dots \dots \dots (36),$$

aus der durch Einsetzen des harmonischen Ansatzes, nach Ausintegrieren des rechts stehenden Termes sowie nach Trennung in die zwei Komponenten wiederum die früheren Gleichungen (24) gewonnen werden. Die eingangs geforderte Gleichheit der Energie führt also ebenfalls zu denselben Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten des Ersatzsystems, wie sie nach den vorher besprochenen Verfahren erhalten werden.

7. Die Variationsmethode nach Ritz-Galerkin

Geht man nach den Vorschriften von Ritz und Galerkin an die Lösung der Systeme (3) bzw. (4) heran, so wird man nicht — wie bei Anwendung der bisher besprochenen Verfahren — auf ein lineares Ersatzsystem geführt. Daher soll in diesem Fall die Existenz des Ersatzsystems nicht von vornherein gefordert werden. Vielmehr werden wir nachträglich zeigen, daß sich die nach Ritz-Galerkin ausgerechneten Ergebnisse unter gewissen Bedingungen vollkommen mit den für das lineare Ersatzsystem (5) erhaltenen decken und daß auch jetzt wieder dieselben Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten a_{rs} und a_{rs}^* herauskommen.

Zur Lösung von (3) gehen wir von einem Ritz-Ansatz

$$x_r = \sum_{k=1}^{\infty} A_{rk} \psi_k(t) \dots \dots \dots (37)$$

aus, bei dem die ψ_k ein zur Approximation geeignetes Funktionensystem bilden sollen, das in unserem Falle als periodisch mit der Frequenz ω vorausgesetzt werden muß. Es liegt nahe, das System

$$\psi_k(t) = \begin{cases} \sin k \omega t \\ \cos k \omega t \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad \dots \dots \dots (38)$$

zu wählen. Die Bestimmungsgleichungen für die A_{rk} folgen nun mit (3) und nach der Galerkinschen Vorschrift aus:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\dot{x}_r - \sum_{s=1}^n c_{rs} x_s - g_r(\dots) \right] \psi_k(t) dt = 0 \quad \left(\begin{matrix} r = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots \end{matrix} \right) \dots \dots \dots (39).$$

Die Integration ist dabei zwischen zwei festen Zeitpunkten t_0 und t_1 vorzunehmen, die um den Betrag einer vollen Schwingungszeit $T = \frac{2\pi}{\omega}$ auseinanderliegen; wir wählen $t_0 = 0$ und $\omega t_1 = 2\pi$ und integrieren dann über $\omega t = \gamma$ von 0 bis 2π .

Die nach der Ritz-Galerkinschen Methode zu erwartenden Ergebnisse können natürlich nur dann mit den Ergebnissen der anderen Näherungsverfahren übereinstimmen, wenn wir die Approximationsfunktionen (38) wählen und uns dabei auf das erste Funktionenpaar ($k = 1$) beschränken. Dann aber bekommt man mit dem Ansatz

$$x_r = A_{r1} \sin \gamma + A_{r2} \cos \gamma \quad \dots \dots \dots (40)$$

aus der Galerkinschen Vorschrift (39) die Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left[\omega (A_{r1} \cos \gamma - A_{r2} \sin \gamma) - \sum_{s=1}^n c_{rs} (A_{s1} \sin \gamma + A_{s2} \cos \gamma) - g_r(\dots) \right] \sin \gamma d\gamma = 0, \\ \int_0^{2\pi} \left[\omega (A_{r1} \cos \gamma - A_{r2} \sin \gamma) - \sum_{s=1}^n c_{rs} (A_{s1} \sin \gamma + A_{s2} \cos \gamma) - g_r(\dots) \right] \cos \gamma d\gamma = 0 \end{aligned} \right\} (41).$$

Die Integration läßt sich teilweise ausführen, so daß aus (41) folgt:

$$\left. \begin{aligned} -\omega A_{r2} \pi - \sum_{s=1}^n c_{rs} A_{s1} \pi - \int_0^{2\pi} g_r(\dots) \sin \gamma d\gamma = 0; \\ \omega A_{r1} \pi - \sum_{s=1}^n c_{rs} A_{s2} \pi - \int_0^{2\pi} g_r(\dots) \cos \gamma d\gamma = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (42).$$

Durch Einführen des Kroneckersymbols δ_{rs} läßt sich dies umschreiben in:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^n (\delta_{rs} \omega A_{s2} + c_{rs} A_{s1}) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_r(\dots) \sin \gamma d\gamma = 0, \\ \sum_{s=1}^n (-\delta_{rs} \omega A_{s1} + c_{rs} A_{s2}) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_r(\dots) \cos \gamma d\gamma = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (43).$$

Aus diesem System von $2n$ Gleichungen können die $2n$ Amplitudenfaktoren A_{s1} und A_{s2} des Ansatzes (40) berechnet werden.

Um nun zu zeigen, daß die aus (43) zu gewinnende Lösung mit den früheren Ergebnissen übereinstimmt, setzen wir zunächst den Ansatz (40) in das lineare Ersatzsystem (5) ein und erhalten (wiederum unter Verwendung des Kronecker- δ):

$$\sum_{s=1}^n \{ \sin \gamma [-\delta_{rs} \omega A_{s2} - a_{rs} A_{s1} + a_{rs}^* \omega A_{s2}] + \cos \gamma [\delta_{rs} \omega A_{s1} - a_{rs} A_{s2} - a_{rs}^* \omega A_{s1}] \} = 0 \quad (44).$$

Durch Nullsetzen der Ausdrücke in den eckigen Klammern bekommt man die Bestimmungsgleichungen für die Amplitudenfaktoren:

$$A_{s1} a_{rs} + A_{s2} \omega (\delta_{rs} - a_{rs}^*) = 0, \quad A_{s1} \omega (\delta_{rs} - a_{rs}^*) - A_{s2} a_{rs} = 0 \quad \dots \dots (45).$$

Dieses System stimmt aber vollkommen mit (43) überein, sofern dieselben Bezeichnungen und der gleiche Zeitnullpunkt eingeführt wird. Betrachtet man nämlich die Bestimmungs-

gleichungen (10) und (21) als Definitionsgleichungen für neu einzuführende Abkürzungen und wählt den Zeitnullpunkt — wie früher — so, daß $A_{11} = A_1$ und $A_{12} = 0$ wird, dann kann man (43) in die Form bringen:

$$\sum_{s=1}^n (\delta_{rs} \omega A_{s2} + a_{rs} A_{s1} - a_{rs}^* \omega A_{s2}) = 0, \quad \sum_{s=1}^n (-\delta_{rs} \omega A_{s1} + a_{rs} A_{s2} + a_{rs}^* \omega A_{s1}) = 0 \quad (46).$$

Durch gliedweises Nullsetzen folgen aber daraus wieder die Bestimmungsgleichungen (45).

Geht man von dem speziellen System (4) aus, so bekommt man anstelle von (42) das System:

$$-\omega A_{r2} \pi - \sum_{s=1}^n \int_0^{2\pi} f_{rs}(A_s \sin \Phi_s, t) \sin \gamma \, d\gamma = 0, \quad \omega A_{r1} \pi - \sum_{s=1}^n \int_0^{2\pi} f_{rs}(A_s \sin \Phi_s, t) \cos \gamma \, d\gamma = 0 \quad (47).$$

Um die früheren Abkürzungen a_{rs} und a_{rs}^* von (13) einführen zu können, wird nun unter dem Integral

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= \sin(\Phi_s - \varphi_s) = \sin \Phi_s \cos \varphi_s - \cos \Phi_s \sin \varphi_s, \\ \cos \gamma &= \cos(\Phi_s - \varphi_s) = \cos \Phi_s \cos \varphi_s + \sin \Phi_s \sin \varphi_s \end{aligned}$$

eingesetzt. Damit folgt aus (47):

$$\left. \begin{aligned} -\omega A_{r2} \pi - \sum_{s=1}^n \left\{ \cos \varphi_s \int_0^{2\pi} f_{rs}(A_s \sin \Phi_s, t) \sin \Phi_s \, d\Phi_s - \sin \varphi_s \int_0^{2\pi} f_{rs}(A_s \sin \Phi_s, t) \cos \Phi_s \, d\Phi_s \right\} &= 0, \\ \omega A_{r1} \pi - \sum_{s=1}^n \left\{ \cos \varphi_s \int_0^{2\pi} f_{rs}(A_s \sin \Phi_s, t) \sin \Phi_s \, d\Phi_s + \sin \varphi_s \int_0^{2\pi} f_{rs}(A_s \sin \Phi_s, t) \cos \Phi_s \, d\Phi_s \right\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (48),$$

das läßt sich unter Berücksichtigung von (13) umformen in:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^n [-\delta_{rs} \omega A_{s2} \pi - A_s \cos \varphi_s a_{rs} \pi + A_s \sin \varphi_s a_{rs}^* \omega \pi] &= 0, \\ \sum_{s=1}^n [\delta_{rs} \omega A_{s1} \pi - A_s \cos \varphi_s a_{rs}^* \omega \pi - A_s \sin \varphi_s a_{rs} \pi] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (49).$$

Berücksichtigt man nun noch, daß

$$A_s \cos \varphi_s = A_{s1} \quad \text{und} \quad A_s \sin \varphi_s = A_{s2}$$

ist, dann geht (49) nach gliedweisem Nullsetzen genau in das System (45) über, das aus dem linearen Ersatzsystem erhalten war.

Zusammenfassend kann also festgestellt werden, daß die nach Ritz-Galerkin erhaltenen Ergebnisse identisch mit den Ergebnissen sind, die nach den zuvor betrachteten Verfahren erhalten werden — sofern als Approximationsfunktionen Sinus und Cosinus gewählt werden, und nur das erste Glied des Ritz-Ansatzes mitgenommen wird.

8. Eine Verallgemeinerung der Harmonischen Linearisierung

Nachträglich läßt sich nun leicht ein Verfahren angeben, mit dessen Hilfe das lineare Ersatzsystem aus den Galerkin-Bedingungen unmittelbar gewonnen werden kann. Dazu braucht nur in den Gleichungen (39) für \dot{x}_r der Ausdruck (5) eingesetzt und dann die Integration durchgeführt zu werden. Man übersieht dabei sofort die Gleichwertigkeit der Galerkin-Bedingung mit den Forderungen, die den anderen Verfahren zu Grunde gelegt wurden. Aber das Ritz-Galerkinsche Verfahren weist zugleich den Weg zu einer Verallgemeinerung. Es können ja als approximierende Funktionen $\psi_k(t)$ beliebige periodische Funktionen verwendet werden. Mit jeder periodischen Funktion kann demnach eine Linearisierung des nichtlinearen Ausgangssystems vorgenommen werden, die der im Abschnitt 3 besprochenen Harmonischen Linearisierung vollkommen entspricht. Wenngleich im allgemeinen die Harmonische Linearisierung für die Praxis am wichtigsten ist, so können doch Fälle vorkommen, in denen man zweckmäßigerweise eine Linearisierung durch andere Funktionen vornimmt. Zwei Beispiele dieser Art sollen im Abschnitt 9 besprochen werden.

Um die Betrachtungen nicht durch zu große Allgemeinheit undurchsichtig werden zu lassen, wollen wir uns hier auf ein Ausgangssystem von der Form (4) beschränken und weiterhin voraussetzen, daß die darin vorkommenden Funktionen f_{rs} nicht vom Hysteresetyp sein sollen. Dann werden die $a_{rs}^* = 0$ und das Ersatzsystem bekommt die einfache Form:

$$\dot{x}_r = \sum_{s=1}^n a_{rs} x_s \dots \dots \dots (50).$$

Mit dem eingliedrigen Ritz-Ansatz

$$x_r = A_r \psi(\gamma) \dots \dots \dots (51),$$

in dem zur Vereinfachung $\gamma = \omega t$ als Veränderliche eingesetzt wurde (ψ hat also die Periode 2π), bekommt man die Galerkin-Bedingung:

$$\int_0^{2\pi} \left[\dot{x}_r - \sum_{s=1}^n f_{rs}(x_s, t) \right] \psi(\gamma) d\gamma = 0 \dots \dots \dots (52),$$

oder wegen (50):

$$\int_0^{2\pi} \sum_{s=1}^n [a_{rs} x_s - f_{rs}(x_s, t)] \psi(\gamma) d\gamma = 0.$$

Mit der Abkürzung

$$h = \int_0^{2\pi} \psi^2(\gamma) d\gamma \dots \dots \dots (53)$$

folgt nach Vertauschen von Summation und Integration:

$$\sum_{s=1}^n \left\{ a_{rs} A_s h - \int_0^{2\pi} f_{rs} \left[A_s \psi(\gamma), \frac{\gamma}{\omega} \right] \psi(\gamma) d\gamma \right\} = 0 \dots \dots \dots (54).$$

Wählt man nun die Koeffizienten a_{rs} nach

$$a_{rs} = \frac{1}{h A_s} \int_0^{2\pi} f_{rs} \left[A_s \psi(\gamma), \frac{\gamma}{\omega} \right] \psi(\gamma) d\gamma \dots \dots \dots (55),$$

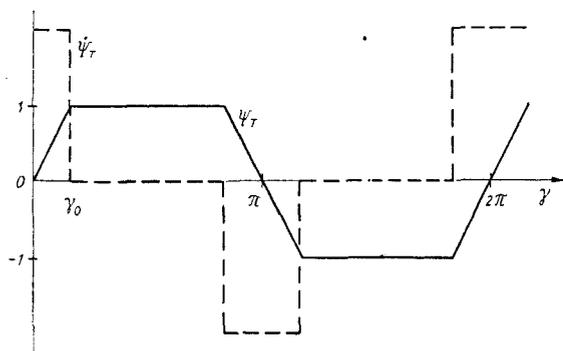


Bild 1. Die Trapezschwingung $\psi_T(\gamma)$ und ihre erste zeitliche Ableitung $\psi'_T(\gamma)$

so ist (54) sogar gliedweise erfüllt, also der Galerkin-Bedingung Genüge getan. Entsprechende Bestimmungsgleichungen lassen sich auch für die allgemeineren Ausgangssysteme (3) und (4) und das allgemeinere Ersatzsystem (5) ableiten, nur werden die Berechnungen dann umfangreicher als es bei der Harmonischen Linearisierung der Fall ist.

Die Bestimmungsgleichung (55) geht mit $\psi(\gamma) = \sin \gamma$ in die früher gewonnene „harmonische“ Formel (13) über; es wird dann $h = \pi$. Der Wert von h für andere $\psi(\gamma)$ läßt sich aus (53) im allgemeinen leicht bestimmen. Mit Rücksicht auf die späteren Beispiele soll hier nur eine trapezförmige Schwingung nach Bild 1 erwähnt werden, die durch

$$\psi_T(\gamma) = \begin{cases} \frac{\gamma}{\gamma_0} & \text{für } 0 \leq \gamma \leq \gamma_0 \\ 1 & \text{für } \gamma_0 \leq \gamma \leq \pi - \gamma_0 \\ \frac{\pi - \gamma}{\gamma_0} & \text{für } \pi - \gamma_0 \leq \gamma \leq \pi + \gamma_0 \\ -1 & \text{für } \pi + \gamma_0 \leq \gamma \leq 2\pi - \gamma_0 \\ \frac{\gamma - 2\pi}{\gamma_0} & \text{für } 2\pi - \gamma_0 \leq \gamma \leq 2\pi \end{cases} \dots \dots \dots (56)$$

definiert ist. Man findet nach einfacher Integration aus (53):

$$h = 2\pi - \frac{8\gamma_0}{3} \dots \dots \dots (57).$$

Die Trapezschwingung enthält als Sonderfälle:

die Rechteckschwingung: $\gamma_0 = 0; \quad h = 2\pi \dots \dots \dots (58)$

und die Dreieckschwingung: $\gamma_0 = \frac{\pi}{2}; \quad h = \frac{2\pi}{3} \dots \dots \dots (59).$

9. Anwendungsbeispiele

Zur Demonstration der Verwendbarkeit der verallgemeinerten Linearisierungsformel (55) sollen zwei einfache und besonders durchsichtige Beispiele berechnet werden, deren strenge Lösung bekannt ist, bzw. leicht ausgerechnet werden kann. Auf diese Weise kann der Fehler der Näherungsberechnung unmittelbar bestimmt und die Güte der Näherung beurteilt werden.

a) *Eigenschwingungen eines selbsterregten Schwingers von einem Freiheitsgrad*

Der Schwinger genüge der Differentialgleichung:

$$\ddot{x} + 2D\dot{x} + x = k \operatorname{sgn} \dot{x} \quad (60).$$

Solange der dimensionslose Dämpfungsfaktor $D < 1$ ist, kann der Schwinger selbsterregte Eigenschwingungen ausführen, deren Amplituden streng berechnet werden können (siehe [10]). Man bekommt:

$$A = k \operatorname{cth} \frac{\pi D}{2\sqrt{1-D^2}} \quad (61).$$

Die ebenfalls in der Arbeit [10] ermittelte harmonische Näherung für die Amplitude ist:

$$A_H = \frac{2k}{\pi D} \quad (62).$$

Für die nun auszurechnende nichtharmonische Näherung soll als approximierende Funktion die Trapezfunktion (56) (bzw. Bild 1) gewählt werden. Wir setzen also an:

$$x = A \psi_T(\gamma) \quad (\gamma = \omega t) \quad (63)$$

und berechnen für die in (60) vorkommende nichtlineare Funktion einen Ersatzausdruck

$$k \operatorname{sgn} \dot{x} = a \dot{x} \quad (64).$$

Nach (55) gilt für den Koeffizienten:

$$a = \frac{1}{hA} \int_0^{2\pi} k \operatorname{sgn} [A \dot{\psi}_T(\gamma)] \dot{\psi}_T(\gamma) d\gamma \quad (65).$$

Der Verlauf der zeitlichen Ableitung $\dot{\psi}_T(\gamma)$ ist in Bild 1 gestrichelt eingezeichnet worden. Man findet nun leicht:

$$h = \int_0^{2\pi} \dot{\psi}_T^2(\gamma) d\gamma = 4 \int_0^{\gamma_0} \frac{1}{\gamma_0^2} d\gamma = \frac{4}{\gamma_0} \quad (66),$$

$$a = \frac{4k}{hA\gamma_0} \int_0^{2\pi} d\gamma = \frac{4k}{hA} = \frac{k\gamma_0}{A} \quad (67).$$

Setzt man diesen Wert in (64) ein, so folgt aus (60) das lineare Ersatzsystem:

$$\ddot{x} + \left(2D - \frac{k\gamma_0}{A}\right)\dot{x} + x = 0 \quad (68).$$

Dauerschwingungen in diesem System haben die Frequenz $\omega = 1$ und müssen der Bedingung genügen:

$$2D - \frac{k\gamma_0}{A} = 0 \quad (69).$$

Daraus folgt die Amplitude der Schwingung zu:

$$A_{Trapez} = \frac{k\gamma_0}{2D} \quad (70).$$

Durch weitere Spezialisierung folgt für die:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Dreieckschwingung } \left(\gamma_0 = \frac{\pi}{2}\right) : A_{Dreieck} = \frac{\pi k}{4D}, \\ \text{Rechteckschwingung } (\gamma_0 = 0) : A_{Rechteck} = 0 \end{array} \right\} \quad (71).$$

Der Grund für das Versagen der Rechtecknäherung ist leicht einzusehen: die Geschwindigkeit \dot{x} wäre in diesem Falle ja nur an den Sprungstellen $\gamma = n\pi$ von Null verschieden; da aber

nur das Vorzeichen von \dot{x} und nicht der absolute Wert in die rechte Seite von (60) eingeht, hat das Glied $\text{sgn } \dot{x}$ überhaupt keinen Einfluß auf die Schwingung.

In Bild 2 ist der Fehler der beiden Näherungslösungen (62) und (71) gegenüber der strengen Lösung (61) als Funktion der Dämpfung D aufgetragen. Wie zu erwarten ist, stimmt die harmonische Näherung gut im Bereich kleiner Dämpfungen, jedoch gibt die Dreiecksnäherung für $D < 0,6$ bessere Werte.

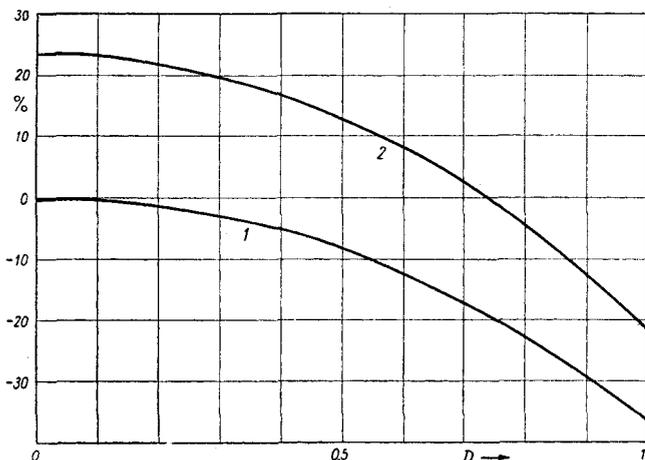


Bild 2. Prozentualer Fehler der harmonischen Näherung (Kurve 1) und der Dreieck-Näherung (Kurve 2) für die Amplituden des Schwingers nach Gleichung (60)

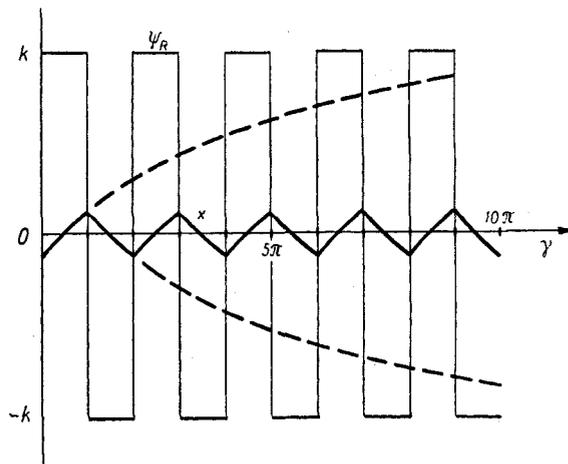


Bild 3. Periodische Lösung von Gleichung (72) im Falle $T \gg 1$

b) Erzwungene Schwingungen eines aperiodischen Systems

Es sei ein System betrachtet, dessen Verhalten durch die Differentialgleichung

$$T \dot{x} + x = k \psi_R(\gamma), \quad (\gamma = \omega t) \dots \dots \dots (72)$$

beschrieben wird. $\psi_R(\gamma)$ soll die Rechteckfunktion sein, die aus der Trapezfunktion von Bild 1 mit $\gamma_0 = 0$ folgt. Für alle Werte der Zeitkonstanten T ergeben sich periodische Lösungen, also stationäre Schwingungen, deren Amplitude leicht zu berechnen ist. Für $0 \leq \gamma \leq \pi$ hat (72) die Lösung:

$$x = k - (k + A) e^{-\frac{t}{T}} \dots \dots \dots (73).$$

Sie genügt den Bedingungen

$$x(0) = -A, \quad x(\infty) = k.$$

Periodische Schwingungen treten auf, wenn

$$x(\pi) = -x(0)$$

ist. Nach Einsetzen dieser Periodizitätsbedingung in (73) bekommt man eine Bestimmungsgleichung für die Amplitude A mit der Lösung:

$$A = k \operatorname{tgh} \frac{\pi}{2T} \dots \dots \dots (74).$$

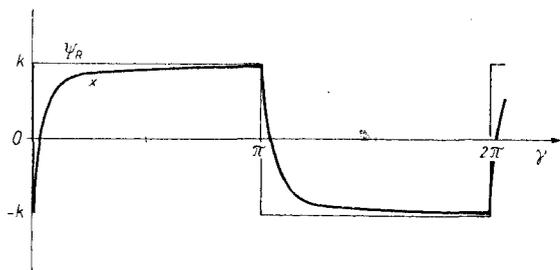


Bild 4. Periodische Lösung von Gleichung (72) im Falle $T \ll 1$

Schon durch eine qualitative Betrachtung sieht man, daß eine harmonische Näherung zumindest in den Grenzfällen sehr großer und sehr kleiner Zeitkonstante nicht besonders genau sein kann. In beiden Fällen weicht die wirkliche Schwingung stark von einer Sinusschwingung ab. Für $T \gg 1$ ergeben sich praktische Dreieckschwingungen (Bild 3), während im anderen Grenzfall $T \ll 1$ näherungsweise Rechteckschwingungen resultieren (Bild 4).

Folglich werden wir im ersten Fall mit einem Dreiecksansatz, im zweiten Fall mit einem Rechteckansatz die besten Ergebnisse erwarten. Beide können durch Spezialisierung aus dem allgemeinen Trapezansatz gewonnen werden.

Zunächst sei die harmonische Näherung betrachtet. Die auf der rechten Seite von (72) stehende Rechteck-Erregerfunktion kann in der Form

$$\psi_R(\gamma) = \operatorname{sgn} (\sin \gamma) \dots \dots \dots (75)$$

geschrieben werden. Mit dem harmonischen Ansatz

$$x = A \sin(\gamma - \tau) \dots \dots \dots (76)$$

können wir (75) umformen in:

$$\psi_R(\gamma) = \operatorname{sgn} \frac{x(\gamma + \tau)}{A} \dots \dots \dots (77).$$

Setzt man dies in (72) ein, dann folgt eine nichtlineare Differentialgleichung, deren eines Glied ein um den Betrag τ voreilendes Argument hat. Wie in einer früheren Arbeit [11] gezeigt wurde, lassen sich auch derartige „Totzeitprobleme“ nach der Methode der Harmonischen Balance erfassen. Man hat das nichtlineare Glied durch einen linearen Ausdruck zu ersetzen:

$$k \operatorname{sgn} \frac{x(\gamma + \tau)}{A} = k \operatorname{sgn} [x(\gamma + \tau)] = a x + a^* \dot{x} \dots \dots \dots (78)$$

und findet die Koeffizienten nach der in [11] angegebenen Vorschrift aus:

$$\left. \begin{aligned} a &= \cos \tau \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} k \operatorname{sgn}(\sin \gamma) \sin \gamma \, d\gamma = \frac{4 k \cos \tau}{\pi A}, \\ a^* &= \sin \tau \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} k \operatorname{sgn}(\sin \gamma) \sin \gamma \, d\gamma = \frac{4 k \sin \tau}{\pi A} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (79).$$

Damit kann nun das lineare Ersatzsystem in die Form gebracht werden:

$$\left(T - \frac{4 k \sin \tau}{\pi A}\right) \dot{x} + \left(1 - \frac{4 k \cos \tau}{\pi A}\right) x = 0 \dots \dots \dots (80).$$

Wenn periodische Lösungen möglich sein sollen, dann müssen notwendigerweise die beiden Koeffizienten dieser Gleichung verschwinden. Das ergibt zwei Bedingungen für die Größen A und τ . Sie führen zu der Lösung:

$$\left. \begin{aligned} A_{\text{harmonisch}} &= \frac{4 k}{\pi \sqrt{1 + T^2}}, \\ \cos \tau &= \frac{1}{\sqrt{1 + T^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (81).$$

Die Dreieck- und Rechteck-Näherung sollen durch Spezialisierung der allgemeineren Trapeznäherung gewonnen werden. Wir setzen an:

$$x = A \psi_T(\gamma - \tau) \dots \dots \dots (82),$$

und können jetzt für die Erregerfunktion von (72) schreiben:

$$\psi_R(\gamma) = \operatorname{sgn} [\psi_T(\gamma)] = \operatorname{sgn} \frac{x(\gamma + \tau)}{A} = \operatorname{sgn} [x(\gamma + \tau)].$$

Die Koeffizienten für den zu bildenden linearen Ersatzausdruck (78) werden nun nicht aus (79), sondern wegen (55) aus entsprechend modifizierten Formeln gewonnen:

$$\left. \begin{aligned} a &= \cos \tau \frac{1}{h A} \int_0^{2\pi} k \operatorname{sgn} [\psi_T(\gamma)] \psi_T(\gamma) \, d\gamma = \frac{k \cos \tau}{h A} 2(\pi - \gamma_0), \\ a^* &= \sin \tau \frac{1}{h A} \int_0^{2\pi} k \operatorname{sgn} [\psi_T(\gamma)] \psi_T(\gamma) \, d\gamma = \frac{k \sin \tau}{h A} 2(\pi - \gamma_0) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (83).$$

Wegen (57) kommt:

$$a = \frac{3 k (\pi - \gamma_0) \cos \tau}{(3 \pi - 4 \gamma_0) A}; \quad a^* = \frac{3 k (\pi - \gamma_0) \sin \tau}{(3 \pi - 4 \gamma_0) A} \dots \dots \dots (84).$$

Damit hat man das lineare Ersatzsystem:

$$(T - a^*) \dot{x} = (1 - a) x = 0 \dots \dots \dots (85).$$

Entsprechend den früheren Überlegungen führt die Forderung nach dem Verschwinden der Koeffizienten dieses Systems zu zwei Gleichungen für A und τ , die die Lösung haben:

$$\left. \begin{aligned} A_{Trapez} &= \frac{3k(\pi - \gamma_0)}{(3\pi - 4\gamma_0)\sqrt{1 + T^2}}, \\ \cos \tau &= \frac{1}{\sqrt{1 + T^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (86).$$

Durch Spezialisierung folgt daraus:

$$A_{Rechteck} = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2}} \dots \dots \dots (87),$$

$$A_{Dreieck} = \frac{3k}{2\sqrt{1 + T^2}} \dots \dots \dots (88).$$

Durch Vergleich mit der harmonischen Näherung (81) findet man, daß sich die drei verschiedenen Näherungen wie folgt verhalten:

$$A_{Rechteck} : A_{harmonisch} : A_{Dreieck} = 1 : 1,27 : 1,5.$$

Im Grenzfall $T \rightarrow 0$ findet man aus (74) für die strenge Lösung $A \rightarrow k$. Derselbe Wert folgt aus (87) für die Rechtecklösung, während die anderen beiden Näherungen (81) bzw. (88) zu große Werte ergeben. Wie zu erwarten war, stimmt also hier die Rechtecknäherung am besten, sie gibt im Grenzfall $T = 0$ sogar genaue Werte.

Im anderen Grenzfall $T \rightarrow \infty$ folgt durch Entwicklung von (74):

$$A \rightarrow \frac{\pi}{2} \frac{k}{T}.$$

Mit diesem Wert stimmt — wie erwartet — die Dreiecknäherung am besten überein.

Bild 5 zeigt die Fehler der drei verschiedenen Näherungslösungen (81), (87) und (88) als Funktion von T in halblogarithmischem Maßstab aufgetragen. Man erkennt daraus, daß man

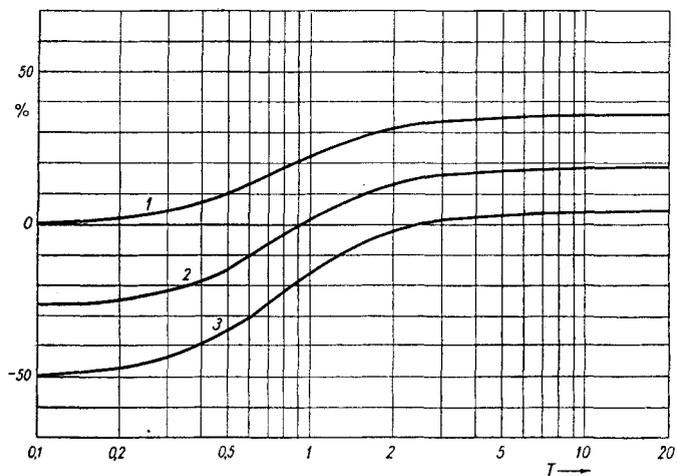


Bild 5. Prozentualer Fehler der Rechteck-Näherung (Kurve 1), der harmonischen Näherung (Kurve 2) und der Dreieck-Näherung (Kurve 3) für die Amplituden des Schwingers nach Gleichung (72).

für $T < 0,6$ am besten mit der Rechtecknäherung und für $T > 1,5$ am besten mit der Dreiecknäherung rechnet. Nur in einem recht kleinen Zwischenbereich um den Wert $T = 1$ herum gibt die harmonische Näherung bessere Werte.

Natürlich muß bei der Anwendung des hier beschriebenen Verfahrens die Form der Schwingung, die man berechnen will, schon näherungsweise bekannt sein, damit man die geeignete Approximationsfunktion wählen kann. Vielfach lassen sich durch qualitative Überlegungen — oder auch durch Versuche — schon gewisse Anhaltspunkte über den Schwingungstyp gewinnen. Das gilt zum Beispiel für die technisch viel verwendeten Kippschwingungen und gewisse Typen von Relaxationsschwingungen. Hier wird man das vorgeschlagene Verfahren mit Vorteil verwenden können.

Literatur

[1] A. I. Lur'e, Einige nichtlineare Aufgaben der Regelungstheorie, Moskau 1951, Kap. III.
 [2] B. V. Bulgakov, Schwingungen, Moskau 1954, Kap. 5 und 12.
 [3] K. F. Teodorčik, Selbstschwingende Systeme, 3. Aufl. Moskau 1952, Kap. II.

- [4] R. J. Kochenburger, A Frequency Response Method for Analysing and Synthesizing Contactor Servomechanismus, Trans. AIEE, 69 (1950) 270—284.
- [5] K. Klotter, Non-linear Vibration Problems treated by the averaging Method of W. Ritz, Proc. I. Nat. C ng. Appl. Mech. (1951).
- [6] K. Klotter, Neuere Methoden und Ergebnisse auf dem Gebiet nichtlinearer Schwingungen, VDI-Berichte Bd. 4 (1955) 35—46.
- [7] A. I. Lur'e und A. I. Čekmarev, Erzwungene Schwingungen in nichtlinearen Systemen, deren Kennlinie aus zwei Geradenstücken besteht, Z. Prikladnaja Mat. i. Mech. 1 (1937) 307—324.
- [8] H. Barkhausen, Lehrbuch der Elektronen-Röhren, Bd. III, § 6, Leipzig 1951.
- [9] J. P. Den Hartog, Mechanische Schwingungen, 2. Aufl., Berlin 1952, Kap. VIII.
- [10] K. Magnus, Über ein Verfahren zur Untersuchung nichtlinearer Schwingungs- und Regelungs-Systeme, VDI-Forschungsheft 451, Düsseldorf 1955.
- [11] K. Magnus, Stationäre Schwingungen in nichtlinearen dynamischen Systemen mit Totzeiten, Ing Arch. 24 (1956) 34—350.

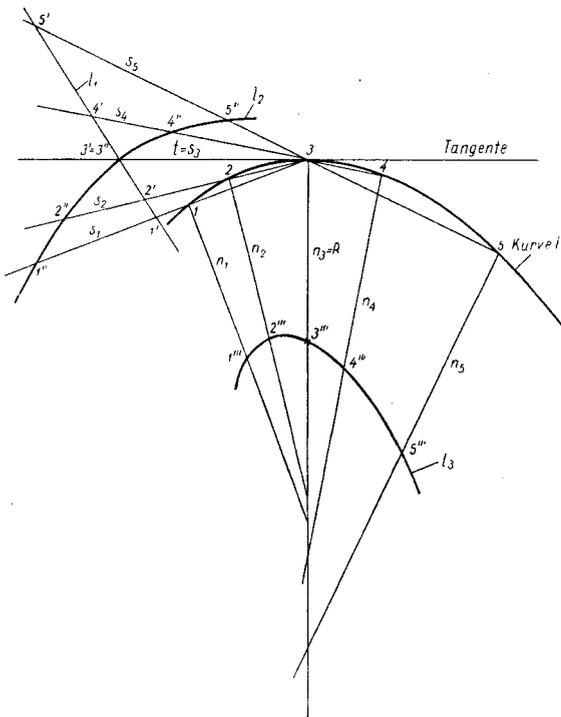
Eingegangen am 30. 3. 1957.

KLEINE MITTEILUNGEN

Use of French curves for determination of tangents and center of curvature.

If the proper use of French curves is considered to be sufficient to interpolate a set of distinct points p by a smooth curve l , then the following shows that under this assumption the construction of tangents and centers of curvature is possible also in a given set of points p_i where $i = 1, 2, 3, 4, 5 \dots$. Let p_3 be the point in which the tangent and the center of curvature should be determined.

The construction of the tangent can be done in the following way: Connect by straight lines point 3 with points 1, 2, 4, 5, ... Intersect these lines by a steady



curve l_1 , say a straight line; then this steady curve l_1 is an image of the curve l and the intersections $1', 2', 4', 5', \dots$ are the images of the points $1, 2, 4, 5 \dots$. The image $3'$ of 3 would be the intersection with the sought tangent in point 3. Hence one has to determine a second image l_2 of the curve. Let the images of points $1, 2, 4, 5, \dots$ be $1'', 2'', 4'', 5'', \dots$. Let these images p'' have distances $d_i = p_i'' - p_i'$ from the images p_i' . Let $d_i = (p_i - p_3) \cdot f(p_i - p_3)$, where $f(p_i - p_3)$ is steady and positive. E. g. $f(p_i - p_3) = \text{constant} = 1$. Then by use of the French curves the points $1'', 2'',$

$4'', 5'', \dots$ may be interpolated by the second image l_2 of the curve l . The intersection of the picture l_2 and l_1 is the image $3'' \equiv 3'''$ and therefore lies on the tangent. The construction of the center of curvature may be done in the following way:

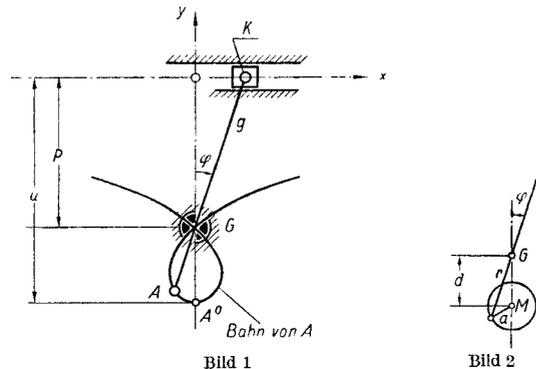
Construct in the points $i = 1, 2, 4, 5$ the normals n_i to the secants s_i and the normal n_3 in point $i = 3$ to the found tangent. The normals $n_1, n_2, n_4, n_5 \dots$ intersect the normal n_3 and together with the secants $s_1, s_2, s_4, s_5 \dots$ form rectangular triangles with the normal n_3 . Determine the mid points $1'', 2'', 4'', 5'' \dots$ of the normals n_1, n_2, n_4, n_5 . Interpolate the curve l_3 through these points by use of French curves. The intersection $3'''$ with the normal n_3 to the found tangent in point 3 then is the center of curvature of the curve l in the point 3.

Cincinnati 15, Ohio

F. S. Weinig.

Der Konchoidenlenker für sechs unendlich benachbarte Lagen

1. K. Hoecken¹⁾ hat aus der konchoidischen Bewegung, d.h. getrieblich aus einer zentrischen Winkelschleife (Schubschleife), Bild 1, eine zentrische Kurbel-



schleife entwickelt, bei welcher eine Koppelkurve mit einer Geraden sechs endlich benachbarte Punkte gemeinsam hat. Man kann aber auch auf gleichem Wege zu einer Koppelkurve kommen, welche mit einer Geraden sechs unendlich benachbarte Punkte gemeinsam hat, d.h. bei welcher die Gerade Tangente an die Kurve ist und eine sechspunktige genaue Berührung mit sehr guter Geradföhrung vorliegt.

2. Bei dem Ausgangsgetriebe gleitet die Gerade (Stange) g durch den festen Punkt G (durch eine um G drehbare Hülse bzw. Kulisse) und der Punkt K wird auf einer festen Geraden x geföhrt. Alle mit der be-

¹⁾ Hoecken, K.: Rechnerische Ermittlung eines Konchoidenlenkers. Arch. f. Getriebetechn. 6 (1933), S. 421.