

[Internationaler Kongress für Luftfahrtwissenschaft.]

# Advances in Aeronautical Sciences

*Proceedings of  
the First International Congress in the  
Aeronautical Sciences  
Madrid 8-13 September 1958*

## Volume 1

### *Editorial Committee*

Chairman : TH. VON KÁRMÁN  
A. M. BALLANTYNE      R. R. DEXTER  
H. BLENK                      H. L. DRYDEN  
M. ROY

*Published by the*  
SYMPOSIUM PUBLICATIONS DIVISION  
**PERGAMON PRESS**  
LONDON · NEW YORK · PARIS · LOS ANGELES  
1959

PERGAMON PRESS LTD.

4 & 5 Fitzroy Square, London, W.1

PERGAMON PRESS INC.

122 East 55th Street, New York 22, N.Y.  
P.O. Box 47715, Los Angeles, California

PERGAMON PRESS S.A.R.L.

24 Rue des Écoles, Paris V<sup>e</sup>

Copyright

©

1959

INSTITUTE OF THE AERONAUTICAL SCIENCES INC.



1959.3757

Library of Congress Card Number 59-6840

Printed in Great Britain by The Chapel River Press, Andover, Hants

# CONTENTS

	PAGE
Foreword by TH. VON KÁRMÁN	
Some Significant Developments in Aerodynamics Since 1946 DANIEL AND FLORENCE GUGGENHEIM MEMORIAL LECTURE <i>by</i> TH. VON KÁRMÁN	1
Aerodynamic Design for Supersonic Speeds <i>by</i> ROBERT T. JONES	34
Telecommand and Navigation <i>by</i> W. H. STEPHENS	52
Propulsion Supersonique par Turboréacteurs et par Statoréacteurs <i>by</i> MAURICE ROY	79
Newtonian Flow Theory in Hypersonic Aerodynamics <i>by</i> WALLACE D. HAYES	113
Dynamics of a Dissociating Gas <i>by</i> M. J. LIDTHILL	120
Experimental Investigation of Hypervelocity Flight <i>by</i> J. LUKASIEWICZ	127
Buckling and Post-Buckling Behaviour of Thermally Loaded Skin Panels <i>by</i> A. VAN DER NEUT	187
Some Contributions to the Heat Conduction and Thermal Stresses Analysis in Aircraft and Missile Structures <i>by</i> LUIGI BROGLIO	213
Représentation d'un Système Thermoélastique Vibrant sans la Direction de la Vibration <i>by</i> R. MAZET	236
Aerodynamic Derivatives for Oscillating Three-Dimensional Wings in Transonic Flow <i>by</i> MÁRTEN T. LANDHAL	255
Mass Transfer Cooling, a Means to Protect High Speed Aircraft <i>by</i> ERNST R. G. ECKERT	276

# AUSWANDERUNGSERSCHENUNGEN AN SCHWINGENDEN KREISELN IN KARDANISCHER LAGERUNG

Von K. MAGNUS

Stuttgart, Bundesrepublik Deutschland

## 1. AUFGABENSTELLUNG

DIE stark gestiegenen Anforderungen an die Genauigkeit von modernen Kreiselgeräten zwingen zu einer verfeinerten Analyse ihres dynamischen Verhaltens. In der vorliegenden Arbeit soll ein Beitrag hierzu geleistet werden.

Es ist bekannt, dass kardanisich gelagerte kräftefreie Kreisel beim Vorhandensein von Nutationsschwingungen aus der ursprünglich eingestellten Mittellage auswandern können (s. z.B. lit. 2 und 3). Diese Erscheinung tritt auch bei ideal reibungsfreier Lagerung und genauem Zusammenfallen von Schwerpunkt und Fixpunkt auf; sie wird erzeugt durch die nicht vernachlässigbaren Trägheitsmomente der kardanischen Aufhängung.

Bei der Berechnung des Auswanderungseffektes ist bisher stets vorausgesetzt worden, dass sowohl der Rotor als auch die Kardanringe in der Normallage Hauptachsensysteme sind. Diese Voraussetzung soll nun fallen gelassen werden, so dass sowohl für den Rotor als auch für die Kardanringe dynamische Unwuchten zugelassen werden. Weiterhin sollen in der vorliegenden Arbeit nicht nur die Nutationseigenschwingungen, sondern auch erzwungene und selbsterregte Schwingungen des aus dem Rotor und den Kardanringen bestehenden Drei-Körper-Systems betrachtet werden. Ziel der Untersuchungen ist die Berechnung der in den verschiedenen Fällen auftretenden mittleren azimutalen Auswanderungsgeschwindigkeit der Rotorachse.

## 2. VORAUSSETZUNGEN UND AUSGANGSGLEICHUNGEN

Wir betrachten einen kardanisich gelagerten Kreisel nach Bild 1 und setzen dabei voraus, dass sowohl die Rotor- als auch die Kardanlager reibungsfrei sind. Der Schwerpunkt des Systems Rotor + Innenring falle mit dem Schnittpunkt der drei Systemachsen zusammen; der Schwerpunkt des Aussenringes soll auf der  $x$ -Achse liegen. Der Rotor besitzt ein symmetrisches Trägheitsellipsoid, jedoch soll die Symmetrieachse um einen Winkel  $\epsilon \ll 1$  gegenüber der geometrischen Figurenachse verdreht

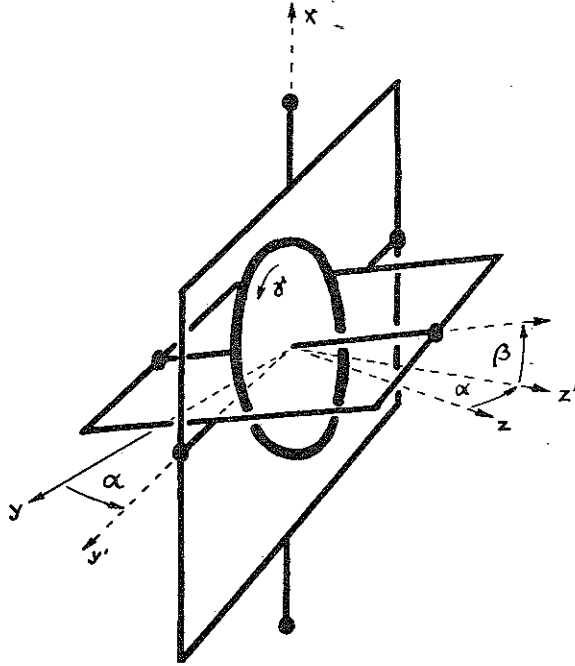


BILD 1. Die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  zur Beschreibung der Lage des Kardankreisel.

sein. Bezüglich der Massenverteilung der Kardanringe wird nichts vorausgesetzt.

Bezeichnen wir nun die Trägheitsmomente mit  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , die Deviationsmomente mit  $D$ ,  $E$ ,  $F$  und wählen die Indices 1 für den Rotor, 2 für den Innenring, 3 für den Aussenring, so können die Trägheitstensoren wie folgt geschrieben werden:

$$\text{für den Rotor: } \theta_1 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & \epsilon(C_1 - A_1) \\ 0 & \epsilon(C_1 - A_1) & C_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{für den Innenring: } \theta_2 = \begin{pmatrix} A_2 & -F_2 & -E_2 \\ -F_2 & B_2 & -D_2 \\ -E_2 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{für den Aussenring: } \theta_3 = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & -E_3 \\ -F_3 & B_3 & -D_3 \\ -E_3 & -D_3 & C_3 \end{pmatrix}$$

Wenn man die Lage des Systems durch die in Bild 1 gezeichneten

Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  charakterisiert, so erhält man die folgenden Drehungskomponenten  $p$ ,  $q$ ,  $r$  für die drei Teilkörper des Systems:

$$\begin{aligned} p_1 &= \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma; & p_2 &= \dot{\alpha} \cos \beta; & p_3 &= \dot{\alpha}; \\ q_1 &= -\dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma; & q_2 &= \dot{\beta}; & q_3 &= 0; \\ r_1 &= \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta; & r_2 &= \dot{\alpha} \sin \beta; & r_3 &= 0. \end{aligned}$$

Dabei wurde vorausgesetzt, dass die Richtung der äusseren Kardanachse raumfest bleibt. Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen wird die Lagrangesche Methode verwendet, die die Bestimmung der kinetischen Energie des Gesamtsystems erfordert. Die kinetische Energie setzt sich aus den Anteilen des Rotors, des Innenringes und des Aussenringes zusammen; diese lassen sich aus den Trägheitstensenoren und den Vektoren der Drehgeschwindigkeiten  $\bar{u}_i = (p_i, q_i, r_i)$  ermitteln:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} (\bar{u}_1 \theta_1 \bar{u}_1 + \bar{u}_2 \theta_2 \bar{u}_2 + \bar{u}_3 \theta_3 \bar{u}_3)$$

Die Ausrechnung ergibt:

$$\begin{aligned} 2T &= \dot{\alpha}^2 [(A_1 + A_2 + A_3) \cos^2 \beta + (A_3 + C_2) \sin^2 \beta - 2E_2 \sin \beta \cos \beta] + \\ &+ \dot{\beta}^2 (A_1 + B_2) - 2\dot{\alpha}\dot{\beta} (D_2 \sin \beta + F_2 \cos \beta) + \\ &+ C_1 (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta)^2 + 2\epsilon (C_1 - A_1) (\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta \cos \gamma - \\ &- \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta \sin \gamma - \dot{\alpha}\dot{\gamma} \cos \beta \sin \gamma + \dot{\beta}\dot{\gamma} \cos \gamma) \end{aligned}$$

Bei den getroffenen Voraussetzungen ist die potentielle Energie eine Konstante, so dass sich die Bewegungsgleichungen nach Lagrange aus

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} = M_s \quad (s = \alpha, \beta, \gamma)$$

errechnen lassen.  $M_s$  sind die um die einzelnen Achsen auftretenden äusseren Momente. Die Ausrechnung ergibt:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} [(A_1 + A_2 + A_3) \cos^2 \beta + (A_3 + C_1 + C_2) \sin^2 \beta - 2 \times \\ \{E_2 + \epsilon(C_1 - A_1) \sin \gamma\} \sin \beta \cos \beta] + \dot{\gamma} [C_1 \sin \beta - \epsilon(C_1 - A_1) \times \\ \cos \beta \sin \gamma] - \dot{\beta} [\{D_2 - \epsilon(C_1 - A_1) \cos \gamma\} \sin \beta + F_2 \cos \beta] - \\ - \dot{\alpha}\dot{\beta} [(A_1 + A_2 - C_1 - C_2) 2 \sin \beta \cos \beta + \\ + 2 \{E_2 + \epsilon(C_1 - A_1) \sin \gamma\} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)] - \dot{\alpha}\dot{\gamma} 2\epsilon(C_1 - A_1) \times \\ \sin \beta \cos \beta \cos \gamma - \dot{\beta}^2 [\{D_2 - \epsilon(C_1 - A_1) \cos \gamma\} \cos \beta - F_2 \sin \beta] + \\ + \dot{\gamma}\dot{\beta} C_1 \cos \beta - \dot{\gamma}^2 \epsilon(C_1 - A_1) \cos \beta \cos \gamma = M_\alpha \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} -\ddot{\alpha} [\{D_2 - \epsilon(C_1 - A_1) \cos \gamma\} \sin \beta + F_2 \cos \beta] + \dot{\beta} (A_1 + B_2) + \\ + \dot{\gamma} \epsilon(C_1 - A_1) \cos \gamma + \dot{\alpha}^2 [(A_1 + A_2 - C_1 - C_2) \sin \beta \cos \beta + \\ + \{E_2 + \epsilon(C_1 - A_1) \sin \gamma\} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)] - \dot{\alpha}\dot{\gamma} [C_1 \cos \beta + \\ + 2\epsilon(C_1 - A_1) \sin \beta \sin \gamma] - \dot{\gamma}^2 \epsilon(C_1 - A_1) \sin \gamma = M_\beta \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\alpha}[C_1 \sin \beta - \epsilon(C_1 - A_1) \cos \beta \sin \gamma] + \ddot{\beta}\epsilon(C_1 - A_1) \cos \gamma + \ddot{\gamma}C_1 + \\ & + \dot{\alpha}^2\epsilon(C_1 - A_1) \sin \beta \cos \beta \cos \gamma + \dot{\alpha}\dot{\beta}[C_1 \cos \beta + \\ & + 2\epsilon(C_1 - A_1) \sin \beta \sin \gamma] = M_\gamma \end{aligned} \quad (3)$$

Aus diesem komplizierten Gleichungstripel lassen sich durch Spezialisierungen Fälle aussondern, die zumindest näherungsweise gelöst werden können. Einige Fälle dieser Art sollen betrachtet werden.

### 3. AUSWANDERUNGSERSCHEINUNGEN BEI VORHANDENSEIN VERSCHIEDENARTIGER SCHWINGUNGEN

Wenn der Kreiselrotor keine Unwucht besitzt ( $\epsilon = 0$ ) und die äusseren Momente verschwinden ( $M_\alpha = M_\beta = M_\gamma = 0$ ), dann hat das System (1) bis (3) die partikuläre Lösung  $\dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$ ,  $\dot{\gamma} = \text{const}$ . Der Rotor dreht dann mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine raumfest stehende Achse. Auswanderungen der Rotorachse können erst auftreten, wenn Schwingungen überlagert werden. Je nach dem Typ der vorhandenen Schwingungen sind verschiedene Auswanderungserscheinungen zu erwarten. Es sollen im folgenden Eigenschwingungen (Nutationen), erzwungene Schwingungen und selbsterregte Schwingungen betrachtet werden.

#### 3.1. Nutationsschwingungen

Bei den bisher bekannt gewordenen Untersuchungen <sup>(2)</sup> und <sup>(3)</sup> sind ausschliesslich Nutationsschwingungen berücksichtigt worden, also schnelle Eigenschwingungen des Kreiselsystems, deren Eigenfrequenz die Grössenordnung der Umlauffrequenz des Rotors hat. Die bisher erhaltenen Ergebnisse sollen nun verallgemeinert werden, wobei in diesem Abschnitt mit einem ideal ausgewuchteten Rotor ( $\epsilon = 0$ ) gerechnet wird. Damit folgt zunächst aus (3):

$$\left. \begin{aligned} C_1(\ddot{\alpha} \sin \beta + \ddot{\gamma} + \dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \beta) &= \frac{d}{dt} C_1(\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta) = 0 \\ \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta &= r_1 = \text{const} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Da die Nutationsschwingungen bei schnellaufenden technischen Kreiseln stets nur geringe Amplituden besitzen, soll

$$\beta = \beta_0 + \beta_s \quad \text{mit der Schwankung } \beta_s \ll 1$$

gesetzt werden. Durch Linearisierung der trigonometrischen Funktionen bezüglich des Winkels  $\beta_s$  erhält man nun aus (1) und (2) die Differentialgleichungen:

$$a\ddot{\alpha} - b\ddot{\beta}_s + c\dot{\beta}_s = 2e\dot{\alpha}\dot{\beta}_s + g\dot{\beta}_s\dot{\beta}_s + g\dot{\beta}_s^2 + f\dot{\beta}_s\dot{\beta}_s + 2e\dot{\alpha}\dot{\beta}_s = \mathcal{L}_\alpha \quad (5)$$

$$d\ddot{\beta}_s - b\ddot{\alpha} - c\dot{\alpha} = -e\dot{\alpha}^2 - f\dot{\alpha}\dot{\beta}_s + g\dot{\alpha}\dot{\beta}_s \quad \approx \mathcal{L}_\beta \quad (6)$$

mit den Abkürzungen :

$$\left. \begin{aligned} a &= (A_1 + A_2 + A_3) \cos^2 \beta_0 + (A_3 + C_2) \sin^2 \beta_0 - 2E_2 \sin \beta_0 \cos \beta_0 \\ b &= D_2 \sin \beta_0 + F_2 \cos \beta_0 \\ c &= C_1 r_1 \cos \beta_0 \\ d &= A_1 + B_2 \\ e &= (A_1 + A_2 - C_2) \sin \beta_0 \cos \beta_0 + E_2 (\cos^2 \beta_0 - \sin^2 \beta_0) \\ f &= C_1 r_1 \sin \beta_0 \\ g &= D_2 \cos \beta_0 - F_2 \sin \beta_0 \end{aligned} \right\} (7)$$

Die linearen Glieder der Differentialgleichungen (5) und (6) sind auf den linken Seiten zusammengefasst worden. Bei einer Linearisierung bezüglich der Variablen  $\alpha$  und  $\beta$  hätte man demnach die rechten Seiten gleich Null zu setzen. Die Lösung des verbleibenden linearen Teiles kann als erste Näherung angenommen werden und ergibt :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= \dot{\alpha}_A \sin nt \\ \beta_1 &= \beta_A \sin (nt + \psi) \end{aligned} \right\} (8)$$

mit den Amplitudenfaktoren  $\dot{\alpha}_A$  und  $\beta_A$ , der Nutationsfrequenz

$$n = \sqrt{\frac{c^2}{ad - b^2}}$$

und dem Phasenwinkel:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{nb}{c}$$

Um den Einfluss der auf den rechten Seiten stehenden Glieder von (5) und (6) zu erkennen, sollen nach einem zur Berechnung nichtlinearer Systeme viel verwendeten Verfahren die Mittelwerte der rechten Seiten über eine Periode der Näherungslösung (8) gebildet werden. Bezeichnet man abkürzend die rechten Seiten mit  $R_\alpha$  bzw.  $R_\beta$  so wird gebildet:

$$\bar{R}_\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_\alpha(\alpha_1, \beta_1) d(nt); \quad \bar{R}_\beta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_\beta(\alpha_1, \beta_1) d(nt) \quad (9)$$

Mit diesen Werten ergeben sich dann aus (5) bzw. (6) die mittleren Auswanderungsgeschwindigkeiten:

$$\dot{\bar{\alpha}} = -\frac{1}{c} \bar{R}_\beta; \quad \dot{\bar{\beta}} = \frac{1}{c} \bar{R}_\alpha \quad (10)$$

Nach Ausrechnung der Integrale (9) und Einsetzen in (10) bekommt man  $\dot{\bar{\beta}} = 0$  und

$$\boxed{\dot{\bar{\alpha}} = \frac{\dot{\alpha}_A^2}{2d} \left[ \frac{c(de + bg)}{ad - b^2} - f \right] = \frac{\beta_A^2}{2a} \left[ \frac{c(de + bg)}{ad - b^2} - f \right]} \quad (11)$$



Damit ist die gesuchte mittlere azimutale Auswanderung gefunden. Die noch recht undurchsichtigen Ausdrücke lassen sich erheblich vereinfachen, wenn die Deviationsmomente  $D_2$  und  $F_2$  des inneren Kardanringes klein gegenüber den Trägheitsmomenten sind. Dann ist  $b^2 \ll ad$  und  $bg \ll de$ , so dass aus (11) unter Berücksichtigung von (7) folgt:

$$\dot{\alpha} \approx \frac{\beta_A^2 C_1 r_1 [E_2 \cos \beta_0 - (A_3 + C_2) \sin \beta_0]}{2[(A_1 + A_2 + A_3) \cos^2 \beta_0 + (A_3 + C_2) \sin^2 \beta_0 - 2E_2 \sin \beta_0 \cos \beta_0]^2} \quad (12)$$

Mit  $E_2 = 0$  geht (12) in die schon bekannte Form über. Auswanderungen sind dann nur für  $\beta_0 \neq 0$ , also bei Abweichungen des Kardansystems aus der Normallage zu erwarten. Dagegen muss bei  $E_2 \neq 0$  auch in der Normallage  $\beta_0 = 0$  mit Auswanderungen gerechnet werden, deren Beträge bei modernen Kurskreiseln durchaus berücksichtigt werden müssen. So ergeben sich bei einer Nutationsamplitude von  $\beta_A = 10^{-3}$  (entsprechend  $0,06^\circ$  Nutationswinkel) Auswanderungsgeschwindigkeiten, wie sie in Bild 2 als Funktion von  $\beta_0$  für verschiedene Werte von  $E_2$  aufgetragen wurden. Auch wenn das Deviationsmoment  $E_2$  nur 1% des Rotorträgheitsmomentes  $C_1$  beträgt, bekommt man in der Normallage

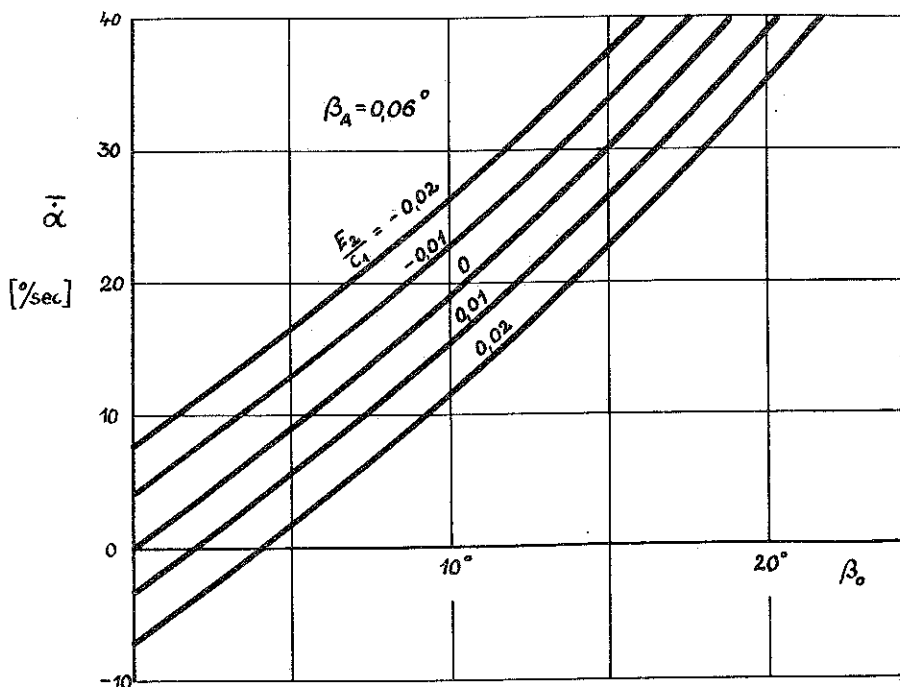


BILD 2. Die mittlere Auswanderungsgeschwindigkeit eines Kardankreisels unter dem Einfluss von Nutationsschwingungen für verschiedene Grade der dynamischen Auswuchtung des inneren Kardanringes.

eine Auswanderungsgeschwindigkeit von fast  $4^\circ$  pro Stunde. Die Deviationsmomente  $D_2$  und  $F_2$  haben in dem hier betrachteten Fall keinen wesentlichen Einfluss auf die Auswanderung.

### 3.2. Erzwungene Schwingungen durch Unwuchten des Rotors

Wenn der Kreiselrotor eine dynamische Restunwucht besitzt, so wird der Winkel  $\epsilon$  zwischen der Hauptträgheitsachse und der Figurenachse praktisch immer klein sein. Man löst dann die Gleichungen (1)–(3) am vorteilhaftesten mit einem Ansatz von der Form

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= \epsilon \dot{\alpha}_1 + \epsilon^2 \dot{\alpha}_2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \dot{\alpha}_n \\ \beta &= \beta_0 + \epsilon \beta_1 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \beta_n \\ \dot{\gamma} &= \omega + \epsilon \dot{\gamma}_1 + \dots = \omega + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \dot{\gamma}_n \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Nach dem Einsetzen in die Ausgangsgleichungen und Ordnen nach Potenzen von  $\epsilon$  bekommt man für die erste Näherung die Differentialgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_1 &= -\ddot{\alpha}_1 \sin \beta_0 \\ a\ddot{\alpha}_1 - b\ddot{\beta}_1 + c\dot{\beta}_1 &= \omega^2(C_1 - A_1) \cos \beta_0 \cos \omega t \\ -b\ddot{\alpha}_1 + d\dot{\beta}_1 - c\dot{\alpha}_1 &= \omega^2(C_1 - A_1) \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Aus den beiden letzten Gleichungen dieses Systems können die ersten Näherungen  $\alpha_1$  und  $\beta_1$  in bekannter Weise ausgerechnet werden. Man erhält harmonische Schwingungen von der Form:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_R \sin(\omega t + \psi) \\ \beta_1 &= \beta_R \cos(\omega t + \chi) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

mit den Resonanzfunktionen:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_R &= \frac{\omega(C_1 - A_1)}{(ad - b^2)\omega^2 - c^2} \sqrt{(c + d\omega \cos \beta_0)^2 + \omega^2 b^2} \\ \beta_R &= \frac{\omega(C_1 - A_1)}{(ad - b^2)\omega^2 - c^2} \sqrt{(c \cos \beta_0 + a\omega)^2 + \omega^2 b^2 \cos^2 \beta_0} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Entsprechend lassen sich auch die Phasenwinkel  $\psi$  und  $\chi$  ausrechnen, doch sind sie in diesem Zusammenhang nicht von Bedeutung. Beachtenswert ist nun die Tatsache, dass die Resonanzfunktionen  $\alpha_R$  und  $\beta_R$  gegen Unendlich gehen, wenn sich die Drehfrequenz  $\omega$  der Nutationsfrequenz nähert:

$$\omega^2 \rightarrow \frac{c^2}{ad - b^2} = n^2 \quad (17)$$

Unter Berücksichtigung von (7) sieht man, dass (17) eine Beziehung zwischen den Trägheitsgrößen und dem Winkel  $\beta_0$  darstellt, während die Drehgeschwindigkeit  $\omega$  herausfällt. Für bestimmte Winkelwerte  $\beta_0$ , also bestimmte Schräglagen des inneren Kardanringes kann diese Beziehung erfüllt sein, so dass Resonanz auftritt. Im Sonderfall eines ausgewuchteten Innenringes ( $D_2 = E_2 = F_2 = 0$ ) lautet die Bedingung für das Auftreten einer Resonanzstelle:

$$\cos^2 \beta_0 [(A_1 + A_2 + A_3)(A_1 + B_2) - C_1^2] + \sin^2 \beta_0 (A_1 + B_2)(A_3 + C_2) = 0$$

Wie man daraus erkennt, sind reelle Lösungen—also Resonanzstellen—möglich unter der Bedingung

$$C_1^2 \geq (A_1 + A_2 + A_3)(A_1 + B_2)$$

In Anlehnung an Begriffsbildungen der allgemeinen Kreiseltheorie könnte man sagen: Resonanzstellen sind möglich, wenn der kardangelagerte Kreisel im erweiterten Sinne "abgeplattet" ist. Bei dem im erweiterten Sinne "verlängerten" Kreisel kann dagegen keine Resonanz auftreten.

Man stellt aus (16) leicht fest, dass das Amplitudenverhältnis der durch die Unwuchten erzwungenen Schwingungen nur im Resonanzfall mit dem Amplitudenverhältnis der freien Nutationsschwingungen übereinstimmt. Da dieses Verhältnis aber wesentlich in die Berechnung von  $\dot{\alpha}$  eingeht, hat man im Falle erzwungener Schwingungen andere Auswanderungsgeschwindigkeiten zu erwarten, als bei freien Schwingungen.

Zur Berechnung der Auswanderungsgeschwindigkeit geht man mit der ersten Näherung (15) in die hier nicht angeschriebenen Gleichungen für die zweite Näherung ein und bildet dann—wie schon im Abschnitt 3.1—Mittelwerte über eine Periode. Man kommt so zu dem Ergebnis, dass sich in zweiter Näherung über die erzwungenen Schwingungen eine azimutale Auswanderung lagert von der Grösse:

$$\dot{\alpha} = \frac{\beta_R^2 \omega \epsilon^2}{2c[(c \cos \beta_0 + a\omega)^2 + \omega^2 b^2 \cos^2 \beta_0]} \{ \omega \epsilon [\omega^2 b^2 + (c + d\omega \cos \beta_0)^2] + f[b^2 \omega^2 \cos \beta_0 - (c \cos \beta_0 + a\omega)(c + d\omega \cos \beta_0)] + \omega^2 b g(a\omega + 2c \cos \beta_0 + d\omega \cos^2 \beta_0) \} \quad (18)$$

Allgemeine Aussagen lassen sich aus diesem undurchsichtigen Ausdruck kaum gewinnen, jedoch steht einer zahlenmässigen Auswertung nichts im Wege. Im Abschnitt 4.1 wird eine solche Auswertung vorgenommen werden, um die während eines Kurvenfluges auftretenden Auswanderungen zu errechnen.

### 3.3. Selbsterregte Schwingungen einer einachsigen stabilisierten Plattform

Zahlreiche Kreiselgeräte besitzen Stützmotore, die meist in Verbindung mit einem Drehwinkelgeber die Überwachung einer der Achsen übernehmen. Das prinzipielle Schema eines derartigen Gerätes ist aus Bild 3

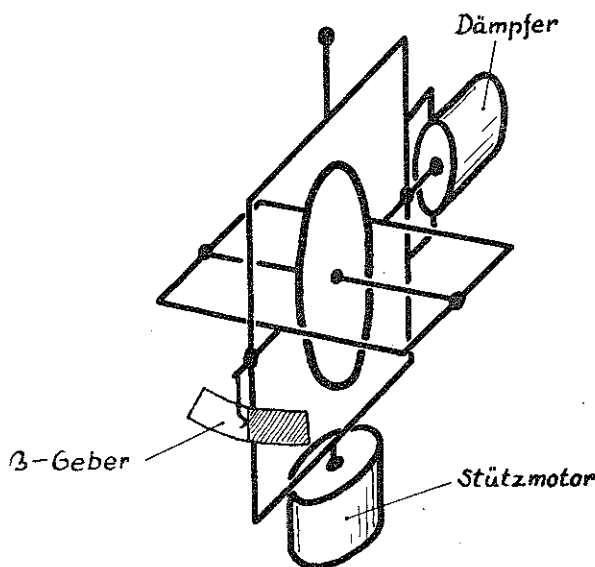


BILD 3. Der prinzipielle Aufbau einer einachsigen stabilisierten Plattform mit Winkel-Indikator, Stützmotor und Dämpfungseinrichtung.

zu ersehen. Es entspricht genau dem Aufbau einer einachsigen stabilisierten Plattform, bei der als Geber ein Drehgeschwindigkeitskreisler (Wendezeiger) mit Dämpfung aber ohne Rückstellfeder verwendet wird (z.B. der bekannte "floated integrating Gyro"). Ein System nach Bild 3 kann bei geeigneten Charakteristiken von Geber und Stützmotor selbsterregte Schwingungen ausführen. Auch diese Schwingungen können Auswanderungen verursachen, deren Grösse berechnet werden soll.

Da selbsterregte Schwingungen des betrachteten Systems um die Normallage  $\beta_0 = 0$  erfolgen, und ihre Amplitude klein bleibt, kann jetzt in (1) bis (3)  $\beta \ll 1$  angenommen werden. Vernachlässigt man weiterhin die hier nicht interessierende Unwucht des Rotors ( $\epsilon = 0$ ), so findet man zunächst aus (3) wieder die früher schon verwendete Beziehung (4). Die Gleichungen (1) und (2) reduzieren sich auf:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\alpha}(A_1 + A_2 + A_3) - \dot{\beta}F_2 + \dot{\beta}C_1r_1 = \\ M_\alpha + 2E_2(\dot{\alpha}\beta + \alpha\dot{\beta}) + D_2(\dot{\beta}\beta + \beta^2) \\ \dot{\beta}(A_1 + B_2) - \ddot{\alpha}F_2 - \dot{\alpha}C_1r_1 = M_\beta + D_2\dot{\alpha}\beta - E_2\dot{\alpha}^2 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Das um die innere Kardanachse wirkende Moment wird von dem Dämpfer erzeugt und kann proportional zu  $\dot{\beta}$  angenommen werden:  $M_\beta = -k\dot{\beta}$ . Das Moment  $M_\alpha$  ist proportional zur Stromstärke  $\mathcal{J}$  des Stützmotors:  $M_\alpha = m\mathcal{J}$ . Die Gleichungen (19) müssen nun ergänzt werden durch eine Gleichung für die Stromstärke  $\mathcal{J}$ , die von der Konstruktion des Stützmotors und vom  $\beta$ -Geber abhängt. Unter Berücksichtigung

sichtigung des trägen Anlaufens des Feldes im Stützmotor kann man schreiben:

$$T \dot{y} + y = -f(\beta) \quad (20)$$

$T$  ist die Zeitkonstante des Stützmotors und  $f(\beta)$  die Charakteristik des Gebers. Zur Berechnung der im System möglichen Selbstschwingungen verwendet man im vorliegenden Fall am besten das bekannte Verfahren der Harmonischen Balance (Verfahren der Beschreibungsfunktion), mit dessen Hilfe zunächst für die im allgemeinen stark nichtlineare Geberfunktion  $f(\beta)$  ein linearer Ersatzausdruck  $h\beta$  ausgerechnet wird. Den amplitudenabhängigen Faktor  $h$  bekommt man dabei aus der Integraltransformation:

$$h = \frac{1}{\pi\beta_A} \int_0^{2\pi} f[\beta_A \sin(nt + \psi)] \sin(nt + \psi) d(nt)$$

Ist  $f(\beta)$  eine Sprungfunktion von der Form  $f(\beta) = h_0 \operatorname{sign} \beta$  (einfacher Relais-Geber für den Winkel  $\beta$ ), so bekommt man

$$h = \frac{4h_0}{\pi\beta_A}$$

Unter Vernachlässigung der auf den rechten Seiten von (19) stehenden quadratischen Glieder steht nunmehr zur näherungsweisen Berechnung der selbsterregten Schwingungen ein lineares Gleichungssystem zur Verfügung:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\alpha}(A_1 + A_2 + A_3) - \dot{\beta}F_2 + \dot{\beta}C_1 r_1 - \dot{y}m &= 0 \\ \dot{\beta}(A_1 + B_2) - \ddot{\alpha}F_2 - \dot{\alpha}C_1 r_1 + \dot{\beta}k &= 0 \\ \dot{y}T + y + h\beta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Die Lösung dieses Systems führt in bekannter Weise auf eine charakteristische Gleichung vierten Grades, aus der die Bedingungen für die Stabilität gewonnen werden können. Sind  $H_1$ ,  $H_2$  und  $H_3$  die Hurwitzdeterminanten der charakteristischen Gleichung, so lassen sich nach einem in <sup>(4)</sup> angegebenen Verfahren Amplitude und Frequenz der selbsterregten Schwingungen aus den beiden Gleichungen gewinnen:

$$\left. \begin{aligned} H_3 &= 0 \\ n^2 &= \frac{c_0 H_1}{H_2} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Die Hurwitzdeterminanten sind Funktionen des Faktors  $h$ , der selbst wieder von der Amplitude  $\beta_A$  abhängt. Deshalb können die Gleichungen (22) als Bestimmungsgleichungen für  $\beta_A$  und  $n$  aufgefasst werden. Die Lösung kann graphisch oder numerisch erfolgen, jedoch lassen sich in einfachen Fällen, z.B. bei Vorhandensein einer Relaischarakteristik des

$\beta$ -Gebers explizite Formeln für Amplitude und Frequenz angeben, wenn man

$$F_2^2 \ll (A_1 + A_2 + A_3)(A_1 + B_2) \quad \text{und} \quad F_2 m h \ll C_1 r_1$$

voraussetzt. Diese Bedingungen sind bei den üblichen Kreiselgeräten meist erfüllt. Man hat dann:

$$\beta_A = \frac{4h_0 m (A_1 + A_2 + A_3)(A_1 + B_2 + kT)^2}{\pi C_1 r_1 \{[(A_1 + A_2 + A_3)k + TC_1^2 r_1^2](A_1 + B_2 + kT) - C_1^2 r_1^2 T(A_1 + B_2)\}} \quad (23)$$

$$n^2 = \frac{C_1^2 r_1^2}{(A_1 + A_2 + A_3)(A_1 + B_2 + kT)}$$

Aus der letzten Formel ergibt sich mit  $k = 0$  oder  $T = 0$  gerade der Ausdruck für die Nutationsfrequenz des Systems. Wegen des Vorhandenseins einer Dämpfung und wegen der Trägheit des Stützmotors wird also die Frequenz der Selbstschwingungen stets kleiner als die Nutationsfrequenz.

Nach der Ermittlung von Amplitude und Frequenz lässt sich nun die azimutale Auswanderung in derselben Weise bestimmen, wie dies schon im Abschnitt 3.1 geschah. Die bisher vernachlässigten Glieder auf den rechten Seiten von (19) werden über eine volle Periode der Selbstschwingungen gemittelt; man findet dabei zunächst

$$\int_0^{2\pi} (\dot{\alpha}\beta + \alpha\dot{\beta}) d(nt) = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} (\dot{\beta}\beta + \beta\dot{\beta}) d(nt) = 0$$

Demnach wird  $\dot{\beta} = 0$ . In der azimutalen Richtung bekommt man dagegen eine nichtverschwindende mittlere Auswanderung von der Grösse:

$$\dot{\alpha} = \frac{\beta_A^2 n^2}{2C_1 r_1 (C_1^2 r_1^2 + F_2^2 n^2)} \left\{ E_2 \left[ k^2 + (A_1 + B_2)^2 n^2 \right] + D_2 \left[ C_1 r_1 k + F_2 n^2 (A_1 + B_2) \right] \right\} \quad (24)$$

Bemerkenswert ist dabei, dass jetzt nicht nur  $E_2$ , sondern auch  $D_2$  von wesentlichem Einfluss ist. Wenn durch sorgfältige dynamische Auswuchtung des inneren Kardanringes diese Deviationsmomente zum Verschwinden gebracht werden, dann ist auch keine Auswanderung vorhanden. Der Betrag der Auswanderung wird durch das Vorhandensein einer Dämpfung um die innere Kardanachse vergrössert.

#### 4. AUSWANDERUNGSERSCHEINUNGEN BEI ZWANGSLÄUFIGER FÜHRUNG DER ÄUSSEREN KARDANACHSE

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde die äussere Kardanachse als richtungsfest im Raume angenommen. Diese Einschränkung soll jetzt

fallen gelassen werden, vielmehr wollen wir jetzt voraussetzen, dass die äussere Kardanachse gleichförmig auf dem Mantel eines Kreiskegels mit dem Oeffnungswinkel  $\delta$  herumgeführt wird, Derartige Bewegungen treten in der Praxis bei Kurvenflügen auf, aber auch angenähert bei den bekannten Roll-Gier-Schwingungen ("Dutch-roll-motion"); schliesslich sind auch hochfrequente Vibrationen dieser Art denkbar.

Da die Auswanderungen der Rotorachse ausserordentlich klein sind, kann man bei den folgenden Untersuchungen "quasistationär" rechnen, also zunächst die Führungsbewegung unter der Voraussetzung einer raumfest bleibenden Rotorachse berechnen. Alle für die Berechnungen notwendigen Beziehungen ergeben sich dann aus dem sphärischen Dreieck von Bild 4, dessen Ecken die Durchstosspunkte der Achsen  $x$ ,

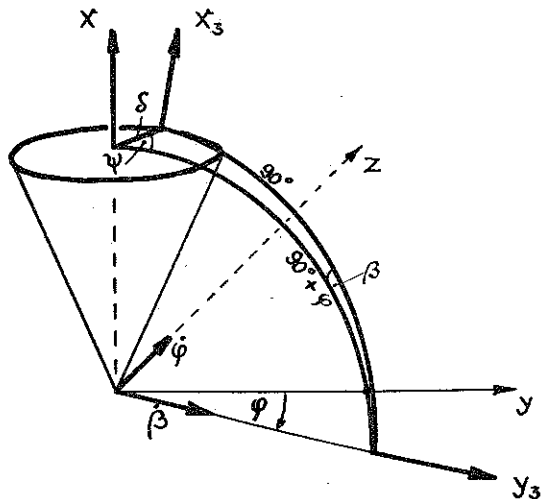


BILD 4. Zur Berechnung der Bewegungen des Kardankreisel bei taumelnder Führung seiner Hochachse.

$x_3, y_3$  durch eine Einheitskugel sind.  $xyz$  ist dabei ein raumfestes,  $x_3y_3z_3$  ein im äusseren Kardanring festes Koordinatensystem. Man findet:

$$\left. \begin{aligned} \sin \beta &= \sin \delta \sin \psi \\ \cos \varphi &= \frac{\cos \delta}{\cos \beta} \\ \operatorname{tg} \varphi &= \cos \psi \operatorname{tg} \delta \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

#### 4.1. Stationärer Kurvenflug

Es soll hier vorausgesetzt werden, dass alle Stützmomente während des Kurvenfluges ausgeschaltet werden. Trotzdem kann infolge der periodischen Schrägneigung des inneren Kardanringes gegenüber dem äusseren ein Auswanderungsfehler entstehen, sofern der Rotor dynamische

Restunwuchten besitzt. Die Grösse der Auswanderung kann aus (18) als Funktion von  $\beta_0$  errechnet werden, wobei für die Amplitude der Wert  $\beta_R$  von (16) einzusetzen ist. Betrachtet man nun die Wanderung der Projektion eines Punktes der Rotorachse auf die  $xy$ -Ebene (s. Bild 5), so

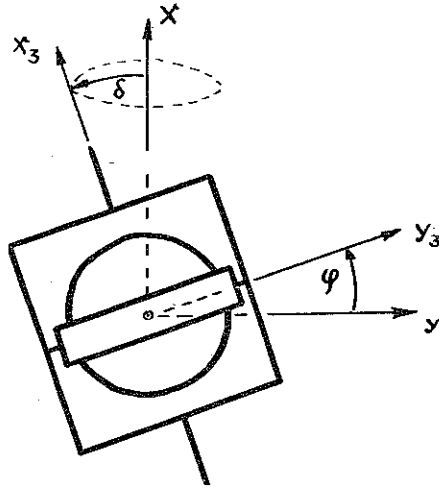


BILD 5. Zur Berechnung der Kreiselauswanderung bei erzwungener Taumelbewegung der äusseren Kardanachse.

bekommt man die Auswanderungsgeschwindigkeiten:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{\alpha} \sin \varphi \\ \dot{y} &= \dot{\alpha} \cos \varphi\end{aligned}$$

aus denen man unter Berücksichtigung der Beziehungen (25) und nach Integration die Auswanderungskurve in der Parameterdarstellung bekommt:

$$\left. \begin{aligned}x &= x_0 + \operatorname{tg} \delta \int_0^t \frac{\dot{\alpha} \cos \Omega t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta \cos^2 \Omega t}} dt \\ y &= y_0 + \int_0^t \frac{\dot{\alpha}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta \cos^2 \Omega t}} dt\end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Hierbei ist gleichförmiger Kurvenflug vorausgesetzt, also der Kurswinkel  $\psi = \Omega t$  angesetzt worden. Für den Scheinlotwinkel gilt dann die bekannte Beziehung

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{v \Omega}{g}$$

Zwei Auswertungen der Formeln (26) zeigen die Bilder 6 und 7 für jeweils drei verschiedene Drehkreiszeiten  $T_K$ . Es wurde angenommen,



dass der Innenring dynamisch ausgewuchtet ist, so dass in der Normalstellung  $\beta_0 = 0$  keine Auswanderung stattfindet. Aus diesem Grunde schliessen sich die Auswanderungskurven jeweils nach einem vollen Kreisflug wieder, weil der in der ersten Hälfte des Kreisfluges entstandene Fehler in der zweiten Hälfte wieder rückgängig gemacht wird. Setzt man jedoch  $E_2 \neq 0$  voraus, dann ergeben sich keine geschlossenen Kurven mehr.

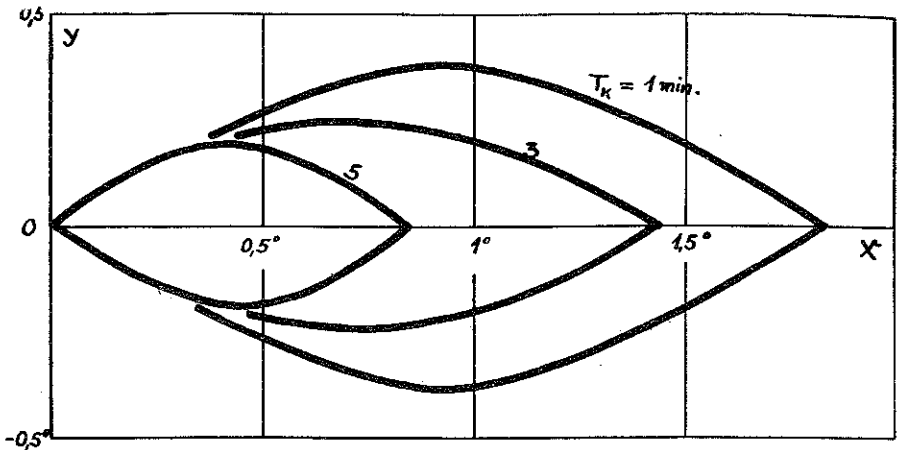


BILD 6. Das System ist "abgeplattet".

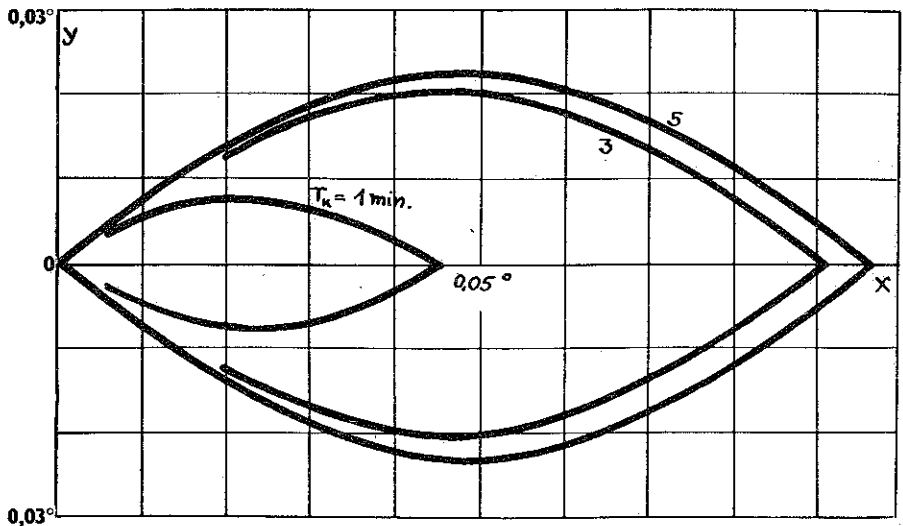


BILD 7. Das System ist "verlängert".

BILDER 6 und 7. Auswanderungskurven eines Kardankreisels ohne Stützmotor im Kurvenflug. Die Auswanderung wird durch erzwungene Schwingungen infolge von Restunwuchten des Rotors verursacht. Der innere Kardanring ist ausgewuchtet.  $T_k$  = Zeit zum Durchfliegen eines Vollkreises

Bild 6 gilt für einen "abgeplatteten" Kreisel. Hier ist die Auswanderung bei der schnell durchflogenen Kurve am grössten, obwohl dann die kleinste Zeit zum Auswandern zur Verfügung steht. Jedoch wird bei den grossen hierbei auftretenden Scheinlotwinkeln während eines Vollkreises viermal die im Abschnitt 3.2 erwähnte Resonanzstelle durchlaufen, so dass kurzzeitig besonders grosse Auswanderungsgeschwindigkeiten vorkommen. Bei den langsam durchflogenen Kurven wird die Resonanzstelle nicht mehr erreicht, so dass trotz der längeren Kurvenflugdauer die Gesamtauswanderung kleiner bleibt. Bei einem "verlängerten" Kreisel (Bild 7) sind die Verhältnisse gerade umgekehrt.

In den Bildern 6 und 7 sind nur zwei besonders einfache Auswanderungskurven gezeigt worden. Je nach den vorhandenen Geräteparametern und Flugbedingungen sind noch zahlreiche andersartige Kurventypen möglich, z.B. Schleifenbahnen, die offen oder geschlossen sein können. Die Auswuchtung des inneren Kardanringes hat dabei wesentlichen Einfluss; dagegen verändert eine eventuelle dynamische Unwucht des äusseren Kardanringes die hier gezeigten Kurven nicht.

#### 4.2. Gier-Roll-Bewegungen und Vibrationen

Für diesen Fall soll nur kurz der Gang der Rechnung und das Ergebnis angegeben werden. Wenn die Bewegung der äusseren Kardanachse schnell erfolgt, dann werden Reaktionskräfte hervorgerufen, die ihrerseits zu einer Auswanderung der Rotorachse führen können. Zur Berechnung der Reaktionen muss man auf die allgemeinen Eulerschen Gleichungen für die drei Teilkörper (Rotor, Innenring, Aussenring) zurückgehen, die in Vektorform lauten:

$$\frac{d}{dt} \theta_i \bar{u}_i - \left[ \theta_i \bar{u}_i \bar{u}_i \right] = \bar{M}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (27)$$

Wenn hier die Deviationsmomente sowohl des Innen—als auch des Aussenringes mitgenommen werden, so ergeben sich recht komplizierte Gleichungen, aus denen die resultierenden Momente um beide Kardanachsen berechnet werden können. Dazu hat man für die Drehungskomponenten diejenigen Werte einzusetzen, die sich aus den rein kinematischen Gleichungen (25) durch Differentiation ergeben. Hat man die Momente, dann folgt die azimutale Auswanderungsgeschwindigkeit aus:

$$\dot{\alpha} = - \frac{M_{2y}}{C_1 r_1 \cos \beta_0}$$

Wenn man sich für die mittlere Auswanderungsgeschwindigkeit  $\bar{\alpha}$  interessiert, dann kann wieder eine Mittelbildung über die volle Periode ausgeführt werden; man erhält so:

$$\bar{\alpha} = \frac{E_2 \operatorname{tg}^2 \delta \Omega^2}{C_1 r_1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \psi \, d\psi}{(1 + \operatorname{tg}^2 \delta \cos^2 \psi)} \quad (28)$$

Nimmt man  $\operatorname{tg} \delta \approx \delta \ll 1$  an—eine Annahme, die praktisch stets gerechtfertigt ist—dann hat das Integral von (28) näherungsweise den Wert  $\pi$ . Auf diese Weise ergibt sich für die azimutale Auswanderung die Näherungsformel:

$$\dot{\alpha} \approx \frac{E_2 \delta^2 \Omega^2}{2C_1 r_1} \quad (29)$$

Folglich ist auch in diesem Falle das Deviationsmoment  $E_2$  massgebend für die Auswanderung, während bemerkenswerter Weise die Deviationsmomente des Aussenringes überhaupt keinen Einfluss haben. Ihr Vorhandensein macht sich jedoch bei der Berechnung der mittleren Auswanderung im Winkel  $\beta$  bemerkbar; jedoch soll das hier nicht weiter untersucht werden, da der Auswanderung im Elevationswinkel  $\beta$  meist keine praktische Bedeutung zukommt.

## 5. ERGEBNISSE UND FOLGERUNGEN

Wegen der nicht vernachlässigbaren Trägheitsmomente der mit einem Kreiselrotor verbundenen Massen muss man stets dann mit der Möglichkeit von Auswanderungserscheinungen rechnen, wenn ein Kreiselgerät irgendeine innere Unsymmetrie besitzt. Derartige Unsymmetrien können entweder durch Verdrehung der beiden Kardanringe gegeneinander oder auch durch ungünstige Lagen der Hauptträgheitsachsen von Rotor und Kardanringen entstehen. Vorbedingung für das Zustandekommen der Auswanderungserscheinungen ist das Vorhandensein von Schwingungen, die zum Beispiel als Eigenschwingungen (Nutationen), als erzwungene Schwingungen (infolge restlicher Rotorunwuchten), als selbsterregte Schwingungen (bei Geräten mit Stützmotoren) oder auch als Vibrationen des Geräteträgers auftreten können. Die Auswanderungsgeschwindigkeit ist proportional zum Quadrat der Schwingungsamplitude und in den meisten Fällen proportional zur Frequenz der Schwingungen. Die Auswanderungseffekte treten auch bei ideal reibungsfreien Lagern auf und dürfen nicht mit den vielfach behandelten Taumelfehlern verwechselt werden, die als Folge der Querstützung von Kurskreiseln entstehen können.

Wenn die Trägheitshauptachsen der Kardanringe mit den Hauptachsen des Kardansystems zusammenfallen, dann sind Auswanderungen nur möglich, wenn die Ebenen beider Kardanringe nicht senkrecht zueinander stehen. Haben die Kardanringe dagegen dynamische Unwuchten, dann bleibt das Gerät auch in der Normallage nicht mehr frei von Auswanderungsfehlern.

Die durch Rotorunwuchten oder Vibrationen erzeugten Schwingungen können bei bestimmten Stellungen des Kardansystems zu unerwünschten Resonanzerscheinungen führen und so zu einer wesentlichen Erhöhung der Auswanderungsgeschwindigkeit beitragen. Derartige Resonanzen sind jedoch nur bei "abgeplatteten" Kreiselssystemen

möglich, bei denen das Trägheitsmoment des Rotors um seine Symmetrieachse grösser als das geometrische Mittel der Summenträgheitsmomente des Systems um die beiden Kardanachsen ist.

Bei selbsterregten Schwingungen (Gyro-Relais, Stabilisierte Plattform u.a.) hängt die Grösse der Auswanderung auch noch von der dann notwendigen Dämpfung des Kreisels ab.

Da der Schwerpunktausgleich von Richtungskreiseln im allgemeinen bei laufendem Kiesel so vorgenommen wird, dass keine azimutale Auswanderung gegenüber einem fixsternfesten Bezugssystem auftritt, kann es vorkommen, dass einer der hier behandelten Auswanderungseffekte durch ein künstlich eingeführtes Schweremoment kompensiert wird. Derartige im Laboratorium vielfach nicht feststellbare Fehler können sich jedoch unangenehm bemerkbar machen, wenn die Geräte bei Beschleunigungen verwendet werden sollen, die wesentlich von der Erdbeschleunigung abweichen (Raketen).

Die meisten der hier betrachteten Auswanderungen können durch eine sorgfältige dynamische Wuchtung des inneren Kardanringes vermieden werden, wobei insbesondere das Deviationsmoment  $E_2$  (s. Abschnitt 2) zum Verschwinden gebracht werden muss.

#### 6. LITERATUR

1. H. PORITZKY, Topics in Gyroscopic Motion, *J. Appl. Mech.* S. 1–8, March 1953.
2. K. MAGNUS, Beiträge zur Dynamik des kräftefreien, kardanisch gelagerten Kreisels, *Zamm*, 35, S. 23–34, 1955.
3. B. T. PLYMALL und R. GOODSTEIN, Nutation of a Free Gyro Subjected to an Impulse, *J. Appl. Mech.* S. 365–366, September 1955.
4. K. MAGNUS, Über ein Verfahren zur Berechnung nichtlinearer Schwingungs- und Regelungs-Systeme, VDI-Forschungsheft Nr. 451, Düsseldorf 1955.