

## Der schwere symmetrische Kreisel in kardanischer Lagerung

Von K. Magnus

**1. Aufgabenstellung.** *Lagrange* hat in seiner „*Mécanique analytique*“ (1788) die Lösung des Kreiselproblems für einen Körper mit symmetrischem Trägheitsellipsoid angegeben, dessen Schwerpunkt auf der Symmetrieachse liegt. Die *Lagrangesche* Lösung ist in der Folgezeit von vielen Autoren dahingehend untersucht worden, welche Änderungen für das Bewegungsverhalten des Kreisels zu erwarten sind, wenn die bei der Durchführung von Versuchen stets vorhandenen störenden Einflüsse berücksichtigt werden. So hat man sich besonders intensiv mit den Auswirkungen der verschiedenartigen Reibungskräfte bei der Pfannenlagerung des Kreisels beschäftigt. Diese Arbeiten haben ihren Niederschlag z. B. in den Büchern von *Klein* und *Sommerfeld*<sup>1</sup> und *Grammel*<sup>2</sup> gefunden. Bei der Sorgfalt, die man auf die Erfassung des störenden Einflusses der Reibung verwendete, ist es erstaunlich, daß nicht schon von den Klassikern der Kreiseltheorie

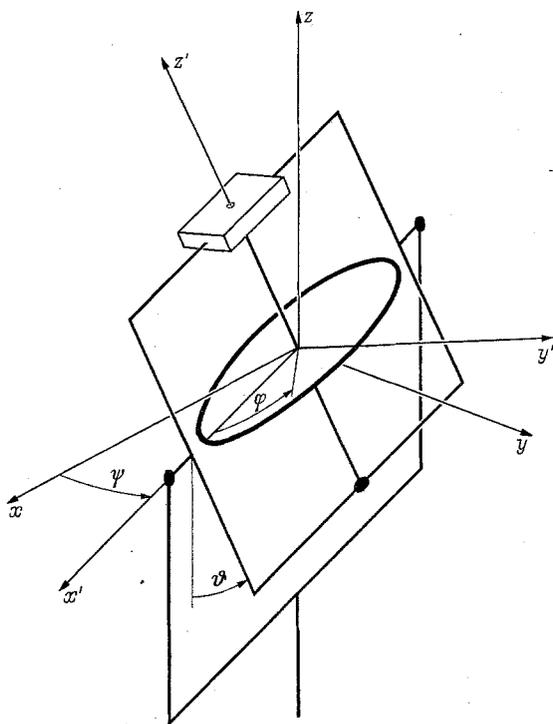


Abb. 1. Koordinatensysteme und *Eulersche* Winkel am kardanisch gelagerten Kreisel.

entsprechende Untersuchungen des störenden Einflusses einer kardanischen Aufhängung des Kreisels durchgeführt worden sind. Die kardanische Aufhängung für Kreisel war zumindest seit *Bohnenberger* (1817) bekannt und wurde seit *Foucauld* (1852) in steigendem Maße für physikalische und später auch für technische Kreiselgeräte verwendet. Erst seit etwa 15 Jahren sind eine Reihe von Arbeiten erschienen, in denen der Einfluß der kardanischen Aufhängung behandelt wird (s. z. B. <sup>3</sup> und die dort angegebene Literatur, ferner <sup>4, 5, 6</sup>). Der Fall des schweren symmetrischen Kreisels in kardanischer Lagerung — also eine unmittelbare Erweiterung des von *Lagrange* behandelten Falles — scheint jedoch bisher nicht untersucht worden zu sein.

In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, daß für einen wichtigen Spezialfall eine strenge Lösung des erweiterten *Lagrange*-Falles durch Quadraturen gefunden werden kann. Wesentlich ist dabei die Berücksichtigung der Anteile, die die beiden Kardanringe zum Impuls des Gesamtsystems beitragen. Demgegenüber werden Reibungswirkungen in den Lagern der kardanischen Aufhängung vernachlässigt. Der Rotor wird als schwerer symmetrischer Kreisel im Sinne von *Lagrange* vorausgesetzt. Die beiden Kardanringe brauchen jedoch nicht symmetrisch zu sein. Allerdings müssen gewisse, unten näher zu definierende Forderungen bezüglich der Lage ihrer Hauptachsen gestellt werden.

Wenn man entsprechend der Skizze von Abb. 1 als Ausgangsstellung des Systems diejenige Lage ansieht, bei der die Ebenen der beiden Kardanringe zusammenfallen, dann läßt sich die Lage des Systems in eindeutiger Weise durch die bekannten drei *Eulerschen* Winkel  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\vartheta$  kennzeichnen.  $\psi$  ist der Drehwinkel des äußeren Kardanringes um die raumfeste äußere Kardanachse ( $z$ -Achse),

Wenn man entsprechend der Skizze von Abb. 1 als Ausgangsstellung des Systems diejenige Lage ansieht, bei der die Ebenen der beiden Kardanringe zusammenfallen, dann läßt sich die Lage des Systems in eindeutiger Weise durch die bekannten drei *Eulerschen* Winkel  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\vartheta$  kennzeichnen.  $\psi$  ist der Drehwinkel des äußeren Kardanringes um die raumfeste äußere Kardanachse ( $z$ -Achse),

<sup>1</sup> F. Klein und A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels insbesondere Bd. III, Leipzig 1903.

<sup>2</sup> R. Grammel, Der Kreisel, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950.

<sup>3</sup> K. Magnus, Z. angew. Math. Mech. 35 (1955) S. 23—34.

<sup>4</sup> H. Poritsky, J. appl. Mech. 75 (1953) S. 1—8.

<sup>5</sup> R. Grammel und H. Ziegler, Ing. Arch. 24 (1956) S. 351—372.

<sup>6</sup> B. T. Plymall and R. Goodstein, J. appl. Mech. 22 (1955) S. 365—366.

gemessen gegenüber einer senkrecht dazu stehenden  $x$ -Achse.  $\vartheta$  ist der Drehwinkel des Innenringes um die innere Kardanachse ( $x'$ -Achse) also der Winkel, um den die Ebene des Innenringes gegenüber der Ebene des Außenringes verdreht ist. Die Lage des Rotors relativ zum Innenring kann durch den Winkel  $\varphi$  gekennzeichnet werden. In der Nullstellung  $\psi = \vartheta = 0$  seien die Achsen  $x, y, z$  eines raumfesten kartesischen Bezugssystems zugleich die Hauptachsen für den Innenring, sowie, wegen der vorausgesetzten Symmetrie des Rotors, auch bei beliebigem Winkel  $\varphi$  für den Rotor. Bezüglich der Hauptachsen des Außenringes braucht nichts vorausgesetzt zu werden. Wir müssen nur fordern, daß der Schwerpunkt des Außenringes auf der  $z$ -Achse liegt. Die Hauptträgheitsmomente sollen wie folgt bezeichnet werden:

$$\begin{array}{ll} \text{für den Rotor:} & A_1 = B_1, C_1, \\ \text{für den Innenring:} & A_2, B_2, C_2, \\ \text{für den Außenring:} & - \quad - \quad C_3. \end{array}$$

**2. Die Bewegungsgleichungen und ihre ersten Integrale.** Während es bei der Berechnung des *Lagrange*-Kreisel's üblich ist, von den in einem körperfesten System angeschriebenen *Eulerschen* Kreiselgleichungen auszugehen, empfiehlt sich hier die Verwendung eines Koordinatensystems  $x' y' z'$  nach Abb. 1, das zwar mit dem Innenring fest verbunden ist, aber sowohl gegenüber dem Rotor, als auch gegenüber dem Außenring beweglich bleibt. Wegen der Symmetrie des Rotors lassen sich die Gleichungen in diesem Koordinatensystem verhältnismäßig einfach aufstellen. Es ist zweckmäßig, die Bewegungsgleichungen nach der von *Lagrange* gegebenen Vorschrift aus den Ausdrücken für die kinetische und potentielle Energie des Gesamtsystems abzuleiten.

Die kinetische Energie  $T$  setzt sich aus den Anteilen des Rotors (Index 1), des Innenringes (Index 2) und des Außenringes (Index 3) zusammen:

$$2 T = [A_1 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta) + C_1 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta)^2] + [A_2 \dot{\vartheta}^2 + B_2 \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + C_2 \dot{\psi}^2 \cos^2 \vartheta] + C_3 \dot{\psi}^2, \quad (1)$$

oder

$$2 T = \dot{\vartheta}^2 (A_1 + A_2) + \dot{\psi}^2 [(A_1 + B_2 + C_3) - (A_1 + B_2 - C_2) \cos^2 \vartheta] + C_1 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta)^2. \quad (2)$$

Bei der Bildung des Ausdruckes für die potentielle Energie ist die Richtung der Schwerebeschleunigung im gewählten Koordinatensystem zu berücksichtigen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß der Schwerkraftvektor in die raumfeste  $xz$ -Ebene fällt. Durch geeignete Wahl der Lage der  $x$ -Achse kann das stets erreicht werden. Wenn die Richtung der Schwerkraft (also die Vertikale) mit der Richtung der äußeren Kardanachse (also der  $z$ -Achse) einen Winkel  $\vartheta_0$  bildet, so läßt sich der für die Größe des Schweremomentes maßgebende Winkel  $\vartheta^*$  aus dem sphärischen Dreieck von Abb. 2 bestimmen, dessen Ecken von den Durchstoßpunkten der Achsen  $z$  und  $z'$  sowie der Vertikalen durch eine Kugel um den Nullpunkt gebildet wird. Nach dem Cosinussatz ist:

$$\cos \vartheta^* = \cos \vartheta_0 \cos \vartheta - \sin \vartheta_0 \sin \vartheta \sin \psi. \quad (3)$$

Wenn  $m$  die Gesamtmasse von Rotor + Innenring ist,  $g$  die Schwerebeschleunigung und  $s$  der Abstand des Schwerpunktes von Rotor + Innenring vom Nullpunkt des Koordinatensystems, dann hat man für die potentielle Energie den Wert:

$$U = m g s \cos \vartheta^* = m g s (\cos \vartheta_0 \cos \vartheta - \sin \vartheta_0 \sin \vartheta \sin \psi). \quad (4)$$

Der Schwerpunkt des Außenringes liegt nach Voraussetzung auf der  $z$ -Achse und hat daher keinen Einfluß auf die Bewegungen des Systems. Der Abstand  $s$  wird positiv gerechnet, wenn der Schwerpunkt auf der positiven  $z'$ -Achse liegt.

Aus den im vorliegenden Fall anwendbaren *Lagrangeschen* Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = 0, \quad (5)$$

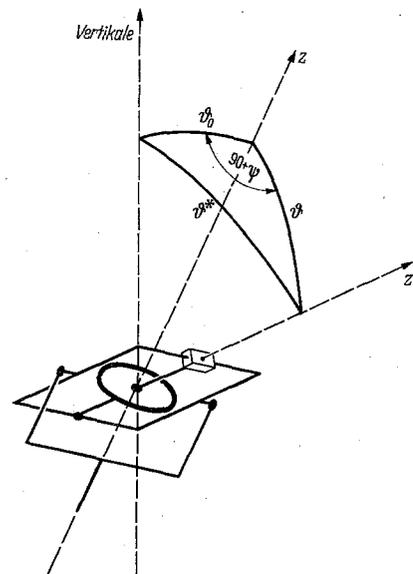


Abb. 2. Zur Bestimmung des Schweremomentes bei nicht vertikaler äußerer Kardanachse.

bei denen für die allgemeine Koordinate  $q$  nacheinander die drei Euler-Winkel  $\varphi \psi \vartheta$  einzusetzen sind, bekommt man die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt} \{C_1 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta)\} = 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{ \dot{\psi} [(A_1 + B_2 + C_3) - (A_1 + B_2 - C_2) \cos^2 \vartheta] + C_1 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) \cos \vartheta \} \\ = m g s \sin \vartheta_0 \sin \vartheta \cos \psi, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta} (A_1 + A_2) - \dot{\psi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta (A_1 + B_2 - C_2) + \dot{\psi} C_1 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) \sin \vartheta \\ = m g s (\cos \vartheta_0 \sin \vartheta + \sin \vartheta_0 \cos \vartheta \sin \psi). \end{aligned} \quad (8)$$

Da  $\varphi$  eine zyklische Koordinate ist (also  $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$  gilt), hat (6) die einfache Gestalt einer zeitlichen Ableitung. Durch Integration folgt unmittelbar die Konstanz der Drehungskomponente des Rotors in der  $z'$ -Richtung:

$$\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta = r_0 = \text{const.} \quad (9)$$

Damit ist ein Integral des Problems gefunden. Ein zweites ergibt sich leicht aus dem Energiesatz. Das betrachtete System ist konservativ, da keinerlei energieverzehrende Kräfte vorhanden sind. Folglich muß die Summe von kinetischer Energie  $T$  (2) und potentieller Energie  $U$  (4) konstant bleiben:

$$\begin{aligned} 2 T + 2 U = (A_1 + A_2) \dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2 [(A_1 + B_2 + C_3) - (A_1 + B_2 - C_2) \cos^2 \vartheta] + C_1 r_0^2 \\ + 2 m g s (\cos \vartheta_0 \cos \vartheta - \sin \vartheta_0 \sin \vartheta \sin \psi) = E = \text{const.} \end{aligned} \quad (10)$$

Die beiden Integrale (9) und (10) reichen aber zur vollständigen Lösung des Problems durch Quadraturen noch nicht aus. Es wird vielmehr noch ein drittes Integral benötigt, das sich in zwei Sonderfällen aus der Gleichung (7) beschaffen läßt. Der Winkel  $\psi$  wird nämlich in den folgenden beiden Fällen ebenfalls zur zyklischen Koordinate (d. h.  $\frac{\partial U}{\partial \psi} = 0$ ):

1. für den kräftefreien Kreisel ( $s = 0$ ) und
2. für ein Kardansystem, dessen äußere Kardanachse in die Richtung der Schwerkraft fällt ( $\vartheta_0 = 0$ ,  $\vartheta = \vartheta^*$ ).

Der erste Fall ist in den schon erwähnten Arbeiten<sup>1,2,3</sup> behandelt worden und soll hier unberücksichtigt bleiben. Da jedoch zu dem Fall 2. bisher noch keine Untersuchungen bekannt geworden sind, wird er im folgenden näher betrachtet werden.

Für  $\vartheta_0 = 0$  folgt aus (7) unter Berücksichtigung von (9)

$$\dot{\psi} [(A_1 + B_2 + C_3) - (A_1 + B_2 - C_2) \cos^2 \vartheta] + C_1 r_0 \cos \vartheta = D_z = \text{const.} \quad (11)$$

Außerdem reduziert sich das Energie-Integral (10) auf

$$\dot{\vartheta}^2 (A_1 + A_2) + \dot{\psi}^2 [(A_1 + B_2 + C_3) - (A_1 + B_2 - C_2) \cos^2 \vartheta] + C_1 r_0^2 + 2 m g s \cos \vartheta = E. \quad (12)$$

Die nunmehr im Fall  $\vartheta_0 = 0$  zur Verfügung stehenden drei Integrale (9), (11) und (12) entsprechen vollkommen den bekannten drei Integralen für den Lagrangeschen Fall des schweren symmetrischen Kreisels. Sie lassen eine anschauliche Deutung zu: (12) ist das Energie-Integral mit der Energiekonstanten  $E$ ; (9) und (11) sind zwei Impulsintegrale, von denen (9) zum Ausdruck bringt, daß die Impulskomponente des Rotors in der Rotorachse ( $z'$ -Achse) konstant ist, während (11) besagt, daß die Komponente des Gesamtimpulses  $D$  in der Vertikalrichtung ( $z$ -Achse) konstant ist. Beides läßt sich nach dem Impulssatz unmittelbar einsehen. Auf den Rotor wirken als äußere Kräfte die Schwerkraft und Lagerkräfte, die vom Innenring auf die Rotorachse übertragen werden. Die Momentenvektoren beider Kräfte stehen — wegen der vorausgesetzten Reibungsfreiheit in den Lagern — stets senkrecht zur Rotorachse. Nun kann man den Impulssatz in einem rotorfesten Koordinatensystem in die bekannte Eulersche Form

$$\frac{d\bar{D}_1}{dt} + [\bar{\omega} \bar{D}_1] = \Sigma \bar{M} \quad (13)$$

bringen. Dabei ist  $\bar{D}_1$  der Impulsvektor des Rotors und  $\bar{\omega}$  der Vektor der Drehgeschwindigkeit. Wegen der Symmetrie des Rotors hat aber das auf der linken Seite stehende Vektorprodukt keine

<sup>1</sup> Siehe Fußnote 3 S. 184.

<sup>2</sup> Siehe Fußnote 4 S. 184.

<sup>3</sup> Siehe Fußnote 6 S. 184.

Komponente in der Richtung der Rotorachse ( $z'$ -Achse). Folglich kann die Änderung des Impulsvektors  $\bar{D}_1$  im körperfesten System nur in einer Ebene senkrecht zur Rotorachse erfolgen — also ist die Impulskomponente des Rotors in der Rotorachse  $D_{1z'} = C_1 r_0$  eine Konstante. Die Impulskomponente des Gesamtsystems in der  $z'$ -Richtung ist jedoch nicht konstant. Für das Gesamtsystem ist nämlich als äußeres Moment außer dem Schweremoment noch ein Moment einzusetzen, das von dem raumfesten äußeren Kardanlager auf den äußeren Kardanring übertragen wird. Der Vektor dieses Momentes hat zwar wegen der vorausgesetzten Reibungsfreiheit stets eine zur äußeren Kardanachse senkrechte Richtung, braucht aber keinesfalls auch senkrecht zur jeweiligen Richtung der Rotorachse zu stehen.

Auch die Gültigkeit von (11), also die Konstanz der vertikalen Komponente des Gesamtimpulses ist leicht einzusehen: Da die Vektoren der äußeren Momente — also des Schweremomentes und des vom äußeren Kardanlager übertragenen Lagermomentes — stets horizontal liegen, kann die vom raumfesten Bezugssystem aus beurteilte Änderung des Impulsvektors  $\bar{D}$  des Gesamtsystems auch nur in der Horizontalebene erfolgen, also bleibt  $D_z$  konstant. Dieses Ergebnis gilt jedoch nur für den Fall  $\vartheta_0 = 0$ , also wenn die äußere Kardanachse vertikal steht.

**3. Lösungen für den Fall vertikaler äußerer Kardanachse.** Aus (11) läßt sich sofort die „Präzessionsgeschwindigkeit“  $\dot{\psi}$  bestimmen:

$$\dot{\psi} = \frac{D_z - C_1 r_0 \cos \vartheta}{(A_1 + B_2 + C_3) - (A_1 + B_2 - C_2) \cos^2 \vartheta}. \quad (14)$$

Wenn der Winkel  $\vartheta$  als Funktion der Zeit bekannt ist, dann kann daraus  $\psi$  durch Quadratur gewonnen werden.

Durch Einsetzen von (14) in (12) erhält man nun eine Differentialgleichung erster Ordnung für  $\vartheta$ , die nach Einführen der neuen Variablen

$$\cos \vartheta = u \quad (15)$$

und der Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_1 r_0}{A_1 + A_2} &= k_1; & \frac{E - C_1 r_0^2}{A_1 + A_2} &= k_4, \\ \frac{D_z}{A_1 + A_2} &= k_2; & \frac{A_1 + B_2 + C_3}{A_1 + A_2} &= k_5, \\ \frac{2 m g s}{A_1 + A_2} &= k_3; & \frac{A_1 + B_2 - C_2}{A_1 + A_2} &= k_6. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

in die Form

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = (1 - u^2) \left[ (k_4 - k_3 u) - \frac{(k_2 - k_1 u)^2}{k_5 - k_6 u^2} \right] = U(u) \quad (17)$$

gebracht werden kann. Die auf der rechten Seite stehende „Kreiselfunktion“  $U(u)$  geht für den Fall verschwindender Masse der Kardanringe ( $k_5 = k_6 = 1$ ) in die bekannte Kreiselfunktion des *Lagrangeschen Falles* über. Zur Bestimmung von  $u(t)$  wird nun — wie im *Lagrangeschen Fall* — zunächst die Umkehrfunktion  $t = t(u)$  berechnet:

$$t = t_0 + \int \frac{du}{\sqrt{U(u)}}. \quad (18)$$

Hat man daraus durch Umkehrung  $u(t)$  und außerdem  $\vartheta = \arccos u$  bestimmt, dann läßt sich der Winkel  $\psi$  durch Integration von (14) gewinnen:

$$\psi = \psi_0 + \int \frac{k_2 - k_1 u}{k_5 - k_6 u^2} dt. \quad (19)$$

Durch die beiden Winkel  $\vartheta$  und  $\psi$  ist die Lage des Kardansystems und der Rotorachse eindeutig bestimmt. Da der Drehwinkel des Rotors  $\varphi$  im allgemeinen nicht weiter interessiert, kann somit das Problem als gelöst betrachtet werden. Im Bedarfsfalle kann  $\varphi$  aus (9) durch eine weitere Integration ermittelt werden.

Im Gegensatz zum *Lagrangeschen Fall* ist die Kreiselfunktion  $U(u)$  für den schweren symmetrischen Kardankreisel eine gebrochene rationale Funktion von  $u$ , so daß es nicht möglich ist, die Integrale (18) und (19) durch bekannte tabellierte Funktionen auszudrücken. In konkreten Fällen rechnet man daher diese Integrale am besten numerisch aus und kann daraus dann die Bahnkurven konstruieren, die von den Punkten der Rotorachse durchlaufen werden.

Die Ergebnisse der Auswertung sind für einige typische Fälle in den Abb. 3 bis 7 zusammengestellt worden. In Abb. 3 ist die Bahn des Durchstoßpunktes der Figurenaxe durch eine Einheitskugel für den Fall eines kräftefreien, nicht kardanisch gelagerten Kreisels gezeichnet worden. Nach der *Poinsotschen* Theorie beschreibt die Figurenaxe einen Kreiskegel und schneidet daher die Einheitskugel in einem Kreis. Rechnet man nun das Problem bei denselben Werten für die Systemparameter  $k_1, k_2, k_3, k_4$  im Falle eines kardanisch gelagerten Kreisels aus, so ergibt sich die in Abb. 4 gezeichnete Bahnkurve. Der Vergleich beider Kurven läßt zwei wesentliche Unterschiede erkennen: Die Bahnkurven des kardanisch gelagerten Kreisels sind eiförmig verbeult, wobei die Spitze des Eis dem Pol der Kugel (Durchstoßpunkt der äußeren Kardanachse) zuge-

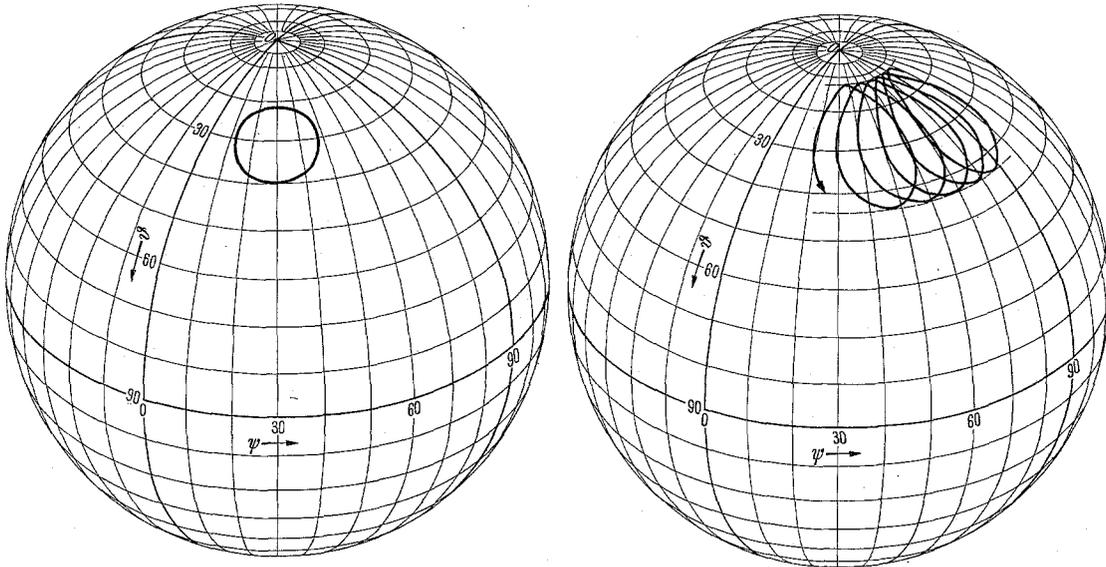


Abb. 3 und 4. Bahnkurven eines Punktes auf der Figurenaxe für einen kräftefreien Kreisel bei gleichen Werten für die Energie- und Impuls-Konstanten.

Abb. 3. nicht kardanisch gelagerter Kreisel.

Abb. 4. kardanisch gelagerter Kreisel.

wandt ist; außerdem überlagert sich der Nutationsbewegung noch eine azimutale Auswanderung, die zur Folge hat, daß sich die Kurve nach einem Nutationsumlauf nicht schließt, sondern eine spiralförmige Bahn durchlaufen wird. Diese für die praktischen Anwendungen außerordentlich wichtige Auswanderungserscheinung des kräftefreien Kreisels ist bereits von mehreren Autoren untersucht worden (s. z. B. 1, 2, 3).

Die weiteren Abb. 5 bis 7 zeigen Vertikalprojektionen der Bahnkurven auf eine die Einheitskugel am Pol berührende Tangentialebene. In allen drei Fällen sind die gleichen Anfangsbedingungen gewählt worden: Der für  $t = 0$  in vertikaler Stellung befindlichen Figurenaxe ist ein seitlicher Stoß gegeben worden. Dann entsteht bei einem nicht kardanisch gelagerten schweren Kreisel (*Lagrangescher* Fall) die Bahnkurve von Abb. 5. Über die einzelnen Nutationsumläufe lagert sich eine Präzessionsbewegung, die im vorliegenden Fall den gleichen Drehsinn (gestrichelt gezeichneter Pfeil) besitzt, wie die Nutationsbewegungen. Ein unter sonst gleichen Bedingungen angestoßener kardanisch gelagerter Kreisel ergibt die wesentlich andere Bahnkurve von Abb. 6. Nutationsumlauf und Präzessionsdrehsinn sind in diesem Fall verschieden. Außerdem fällt die Streckung der Bahnkurven beim Durchgang durch den Pol auf. Bei zusätzlichen Anstoß des äußeren Kardanringes können bei sonst ungeänderten Anfangsbedingungen auch Bahnkurven entstehen, wie sie in Abb. 7 gezeichnet sind. Bemerkenswert ist hier das Auftreten von Wendepunkten, die im *Lagrangeschen* Fall bei entsprechenden Anfangsbedingungen nicht zu beobachten sind.

Einige experimentell aufgenommene Bahnen zeigen die Abb. 8 bis 15. Bei ihnen ist eine an der Figurenaxe angebrachte Taschenlampenbirne senkrecht von oben her photographiert worden. Die Bahnphotos entsprechen daher etwa den in den Abb. 5 bis 7 gezeichneten Projektionen. Die

<sup>1</sup> Siehe Fußnote 3 S. 184.

<sup>2</sup> Siehe Fußnote 4 S. 184.

<sup>3</sup> Siehe Fußnote 6 S. 184.

Abb. 8 und 9 wurden an einem nicht kardanisch gelagerten Kreisel erhalten, während alle weiteren Abb. verschiedene Bewegungszustände am kardanisch gelagerten schweren Kreisel wiedergeben.

Die Abb. 8 und 5 bzw. 10 und 6 entsprechen sich jeweils in den Anfangsbedingungen: in allen vier Fällen ist der in vertikaler Lage befindlichen Figurenachse des Kreisels ein seitlicher Stoß gegeben worden. Auch die Kurve von Abb. 11 ist noch bei ähnlichen Anfangsbedingungen aufgenommen worden, nur macht sich hier interessanterweise der Einfluß der bei den theoretischen Berechnungen vernachlässigten Reibung dadurch bemerkbar, daß der Übergang von einem Bewegungszustand zu einem anderen deutlich sichtbar wird. Die Figurenachse durchschlägt zunächst die obere Pollage zweimal, wobei die Kurven die schon bei Abb. 6 erwähnte Streckung zeigen. Bei der nachfolgenden nochmaligen Annäherung an die Pollage reicht die Energie nicht mehr aus, diesen Punkt zu durchlaufen. Die Bewegung wird rückläufig, und es entsteht eine Art Zykloidenbewegung.

Der Charakter der Bahnkurven hängt noch von dem Vorzeichen des Schweremomentes ab: die Abb. 12 und 13 gelten für einen „gehobenen Kreisel“, bei dem der Schwerpunkt höher als der Unterstützungspunkt liegt ( $s > 0$ ), während die Abb. 14 und 15 entsprechende Bewegungen für den „gesenkten Kreisel“ wiedergeben, bei dem der Schwerpunkt tiefer als der Unterstützungspunkt liegt ( $s < 0$ ). In Abb. 14 ist deutlich die für kardanisch gelagerte Kreisel charakteristische eiförmige Verbeulung der Bahnkurven bei der Annäherung an die Pollage zu erkennen.

**4. Reguläre Präzessionen.** Es soll die Frage untersucht werden, ob beim schweren symmetrischen Kardankreisel „reguläre Präzessionen“ möglich sind, die den regulären Präzessionen des *Lagrange*-Kreisels entsprechen. Dabei wird üblicherweise unter einer regulären Präzession eine solche Bewegung verstanden, bei der die Rotorachse einen Kreiskegelmantel mit gleichförmiger Geschwindigkeit umfährt. Im *Lagrange*-schen Fall sind die Achsen der möglichen Präzessionskegel stets vertikal, fallen also mit der Richtung der Schwerkraft zusammen. Beim schweren Kardankreisel existieren jedoch zwei ausgezeichnete Richtungen: die der Schwerkraft und der äußeren Kardanachse. Man kann sich leicht überlegen, daß jeder Kegel einer möglichen regulären Präzession sowohl die eine, als auch die andere Richtung zur Symmetrieachse haben muß. Demnach wird man reguläre Präzessionsbewegungen nur in dem hier näher betrachteten Fall erwarten können, bei dem die äußere Kardanachse vertikal steht, also mit der Richtung der Schwerkraft zusammenfällt.

Würden beide Richtungen nicht übereinstimmen, so würden bei einer bezüglich der Schwerkraftrichtung symmetrischen Präzessionsbewegung ungleichmäßige Bewegungen des Kardansystems auftreten, die zu entsprechenden ungleichmäßigen Reaktionsmomenten für das Gesamtsystem führen würden. Ein Durchlaufen des Präzessionskegels mit gleichförmiger Geschwindigkeit wäre somit ausgeschlossen. Umgekehrt würde sich bei einer bezüglich der äußeren Kardanachse symmetrischen Bewegung das Schweremoment während des Präzessionsumlaufes nicht nur der Richtung, sondern auch der Größe nach ändern, so daß wiederum keine konstante Präzessionsgeschwindigkeit existieren könnte.

Da es somit genügt, den Fall  $\vartheta_0 = 0$  zu untersuchen, können wir nunmehr die regulären Präzessionen durch die Bedingungen:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\psi} &= 0; & \dot{\psi} &= \text{const} \\ \dot{\vartheta} &= 0; & \vartheta &= \text{const} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

kennzeichnen. Geht man mit (20) in die beiden Integrale (9) und (11) der Bewegungsgleichungen ein, so bekommt man zwei Bestimmungsgleichungen für die Konstanten  $r_0$  und  $D_z$ . Geht man weiter mit (20) in die dritte der Bewegungsgleichungen (8) ein, so folgt

$$[\dot{\psi}^2 (A_1 + B_2 - C_2) \cos \vartheta - \dot{\psi} C_1 r_0 + m g s] \sin \vartheta = 0$$

bzw.

$$\left[ \dot{\psi}^2 k_6 u - \dot{\psi} k_1 + \frac{1}{2} k_3 \right] \sin \vartheta = 0. \quad (21)$$

Schließt man hier zunächst den Fall  $\sin \vartheta = 0$  aus, so ergeben sich aus der in  $\dot{\psi}$  quadratischen Gleichung (21) die folgenden beiden Werte für die Geschwindigkeit der möglichen regulären Präzessionen

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{aligned} \right\} = \frac{k_1}{2 k_6 u} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2 k_3 k_6 u}{k_1^2}} \right]. \quad (22)$$

Da bei den üblichen Konstruktionen des inneren Kardanringes stets  $k_6 > 0$  gilt, so ist ein negativer Wert für den Radikanden nur zu befürchten, wenn das Produkt  $k_3 u$  positiv ist. Das

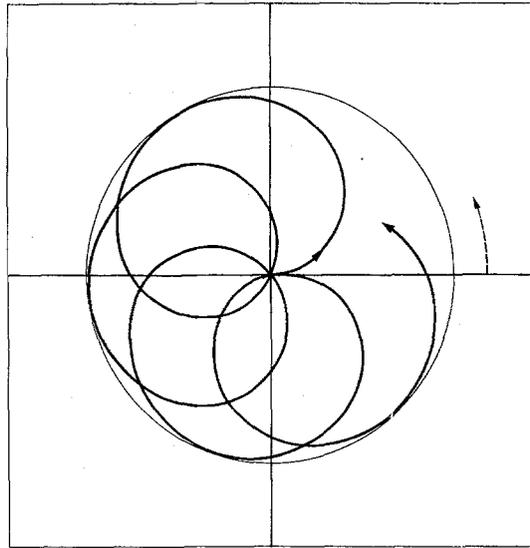


Abb. 5.  
Nicht kardanisch  
gelagerter Kreisel.

Abb. 6.  
Kardanisch gelagerter  
Kreisel, ohne Anstoß  
des Kardansystems.

Abb. 7.  
Kardanisch gelagerter  
Kreisel mit zusätzlichem  
Anstoß des Kardansystems.

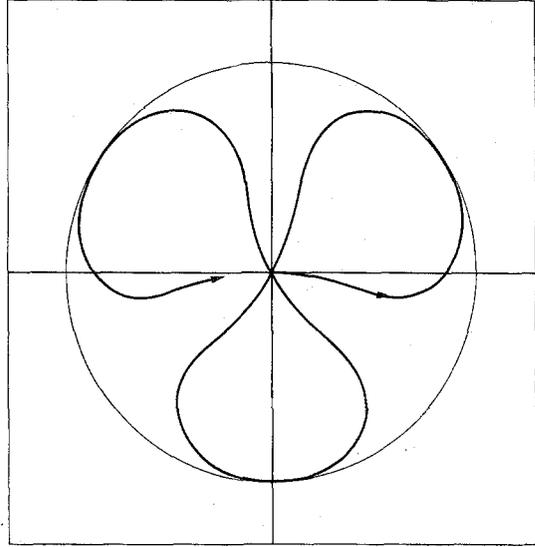
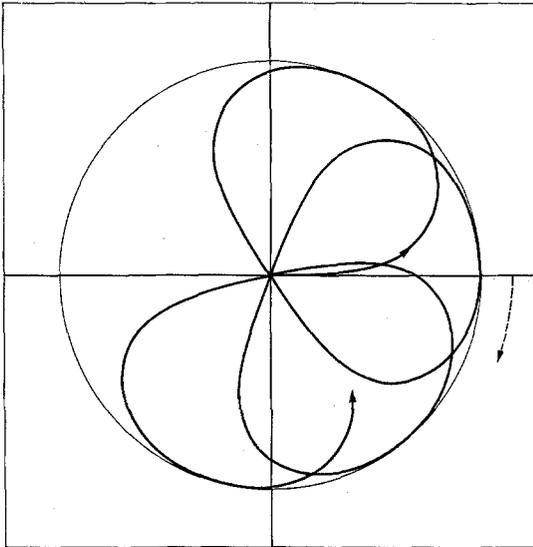


Abb. 5 bis 7. Projektionen der Bahnkurven eines Punktes auf der Figurenachse für einen schweren Kreisel bei gleichem Rotorimpuls.

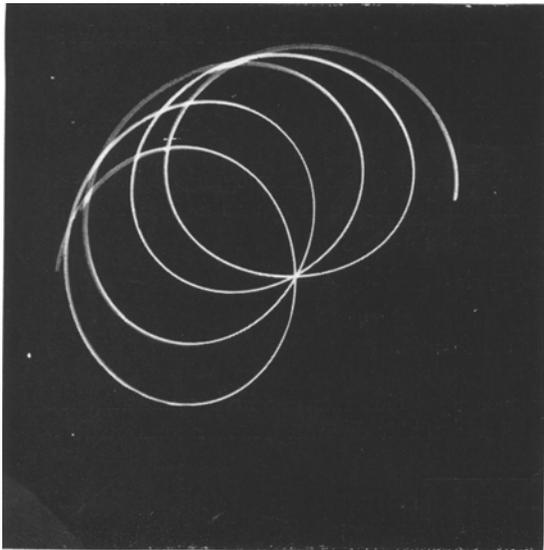


Abb. 8.

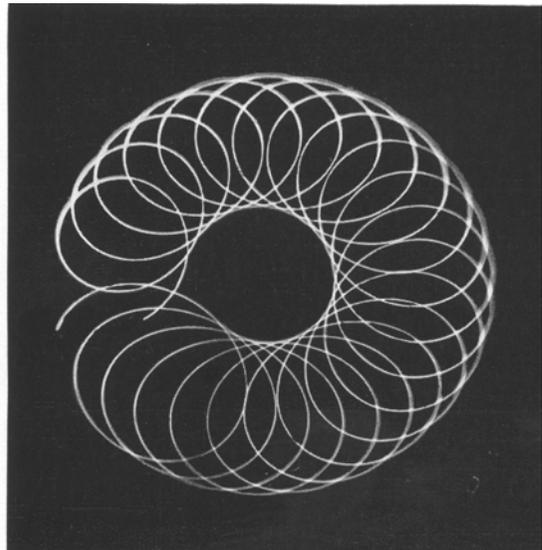


Abb. 9.

Abb. 8 bis 15. Experimentell gewonnene Bahnkurven eines Punktes auf der Figurenachse. Variiert wurden die Anfangsbedingungen und das Schweremoment (gehobener bzw. gesenkter Kreisel). Die Abb. 8 und 9 gelten für einen nicht kardanisch gelagerten Kreisel, die Abb. 10 bis 15 für einen kardanisch gelagerten Kreisel.

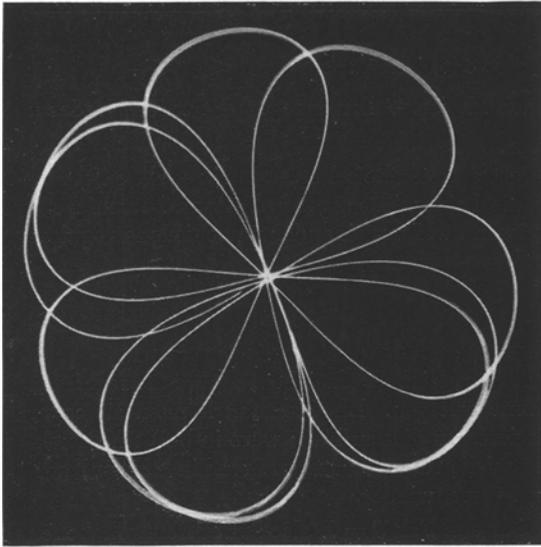


Abb. 10.

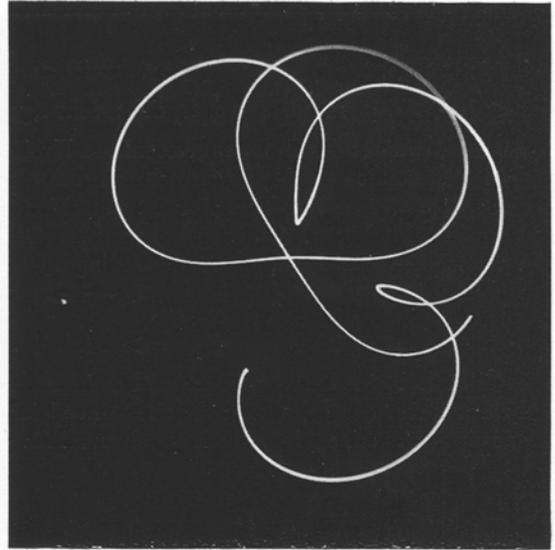


Abb. 11.

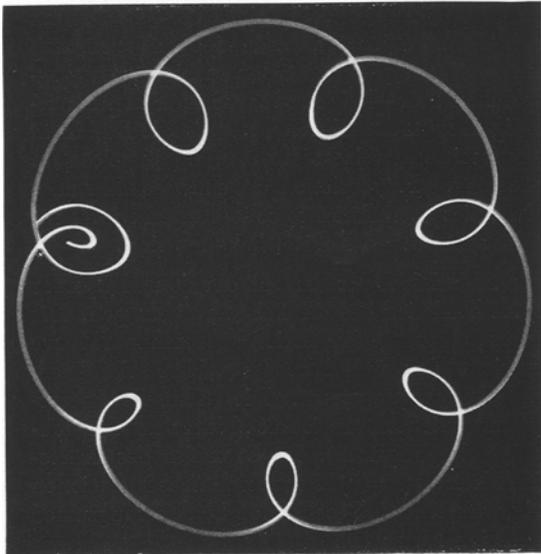


Abb. 12.

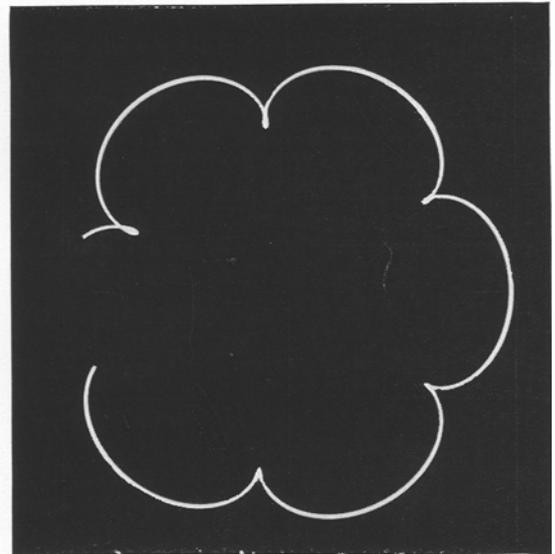


Abb. 13.

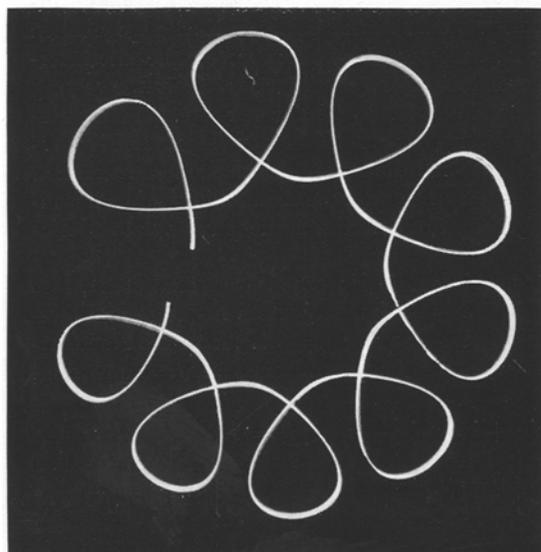


Abb. 14.

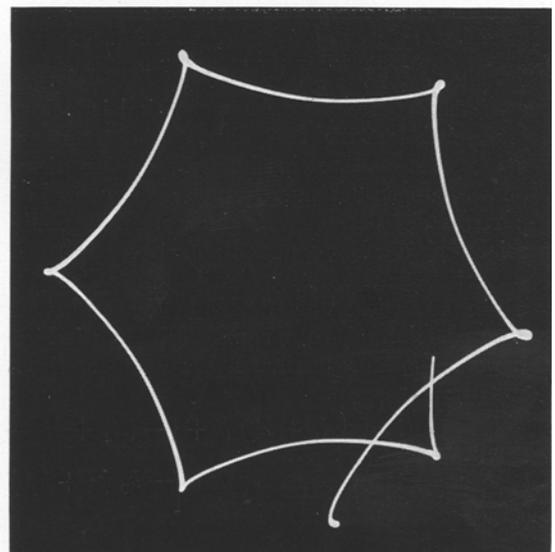


Abb. 15.

ist der Fall, wenn  $k_3$  und  $u$  gleiche Vorzeichen haben, also entweder für  $s > 0; 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$  oder für  $s < 0; \frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi$ . Beides entspricht dem „gehobenen Kreisel“. Ist dagegen entweder  $k_3$  oder  $u$  negativ, so liegt der Fall des „gesenkten Kreisels“ vor.

Es ist somit aus (22) zu entnehmen, daß für den gesenkten Kreisel stets zwei reguläre Präzessionen existieren. Ihr Drehsinn ist verschieden, da die beiden Lösungen (22) dann verschiedene Vorzeichen haben. Für den gehobenen Kreisel existieren zwei voneinander verschiedene reguläre Präzessionen nur dann, wenn die Bedingung

$$\left. \begin{aligned} k_1^2 &> 2 k_3 k_6 u \\ C_1^2 r_0^2 &> 4 (A_1 + B_2 - C_2) m g s \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

bzw.

erfüllt ist. Beide Werte von (22) haben in diesem Falle das gleiche Vorzeichen, so daß die regulären Präzessionen des gehobenen Kreisels im gleichen Sinne erfolgen. Im Grenzfall können sie sogar zusammenfallen, so daß eine Doppelwurzel für  $\dot{\psi}$  existiert. In diesem Falle wäre in (23) ein Gleichheitszeichen einzusetzen, während in (22) der Radikand verschwindet.

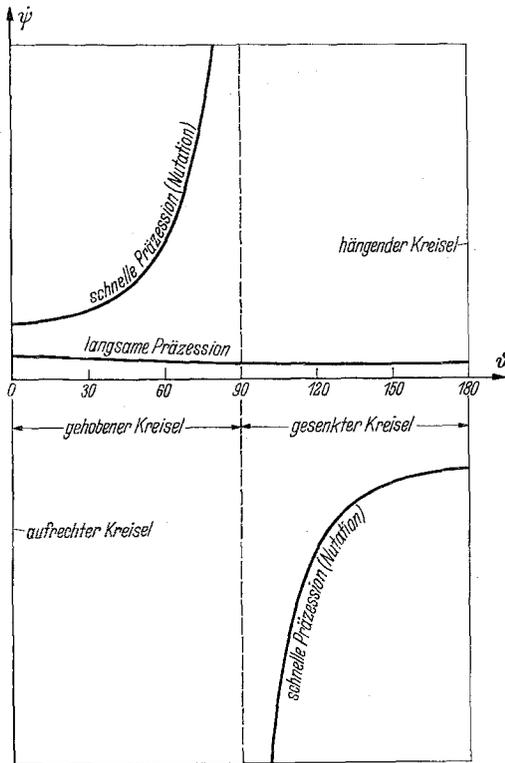


Abb. 16. Die Abhängigkeit der regulären Präzessionen vom Elevationswinkel  $\vartheta$ .

ermitteln. Allgemeine Aussagen sind jedoch wegen der Kompliziertheit der vorkommenden Integrale praktisch nicht möglich, so daß man zur Untersuchung der Stabilität der Lage der Figuren-achse andere Wege einschlagen muß. In diesem Abschnitt soll die bekannte Methode der kleinen Schwingungen herangezogen werden, während im folgenden Abschnitt die Aufstellung von Phasenporträts der Bewegungen einen anderen, völlig strengen und dabei anschaulichen Weg zur Kennzeichnung der Bewegungen aufzeigen wird.

Wir betrachten diejenige Lage des Kardansystems, bei der die Rotorachse vertikal steht, also  $\vartheta = 0$  ist. Diese Lage ist bei beliebigen konstanten Werten von  $\dot{\varphi}$  und  $\dot{\psi}$  stets Lösung der Bewegungsgleichungen (6), (7) und (8) falls, wie hier vorausgesetzt wurde,  $\vartheta_0 = 0$  ist. Für die Nachbarbewegungen zur vertikalen Lage setzen wir üblicherweise  $\cos \vartheta \approx 1$  und  $\sin \vartheta \approx \vartheta$ . Dann folgt aus (8):

$$\left. \begin{aligned} (A_1 + A_2) \ddot{\vartheta} + [-(A_1 + B_2 - C_2) \dot{\psi}^2 + C_1 r_0 \dot{\psi} - m g s] \vartheta &= 0 \\ \text{bzw.} \quad \ddot{\vartheta} + \left[ -k_6 \dot{\psi}^2 + k_1 \dot{\psi} - \frac{k_3}{2} \right] \vartheta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Für den Fall  $\vartheta = 0$ , also den extrem gehobenen oder „aufrechten Kreisel“, bei dem der Schwerpunkt vertikal über dem Unterstützungspunkt liegt, gibt (23) zugleich eine notwendige Bedingung für die Stabilität. Wir werden jedoch sehen, daß diese Bedingung — zum Unterschied vom Lagrangeschen Fall — für den Kardankreisel nur notwendig aber nicht hinreichend für die Stabilität des aufrechten Kreisels ist. Im übrigen gelten für die regulären Präzessionen des schweren Kardankreisels dieselben Fallunterscheidungen wie sie für den Lagrangeschen Kreisel bekannt sind.

In Abb. 16 ist der Verlauf der  $\dot{\psi}_1$  und  $\dot{\psi}_2$  nach (22) als Funktion des Winkels  $\vartheta$  aufgetragen. Die hier als „langsame Präzession“ bezeichnete Kurve entspricht der üblicherweise „Präzession“ genannten Bewegungsform. Die „schnelle Präzession“ entspricht der meist als „Nutation“ bezeichneten Bewegungsform. Im Grenzfall des kräftefreien Kreisels ( $s = 0$ ) bleiben nur diese Nutationen übrig, während die Geschwindigkeit der langsamen Präzession Null wird.

### 5. Die Stabilität der vertikalen Lage der Figuren-achse.

Aus den im Abschnitt 3 angegebenen Lösungen lassen sich für konkrete Fälle alle interessierenden Eigenschaften der Kreiselbewegung

Darin ist  $\dot{\psi}$  nach (14) eine Funktion von  $\vartheta$ . Wenn für  $t = 0$   $\dot{\psi}(0) = \dot{\psi}_0$  gilt, so hat man die Impuls-komponente

$$D_z = C_1 r_0 + (C_2 + C_3) \dot{\psi}_0.$$

Setzt man diesen Wert in (14) ein und berücksichtigt  $\cos \vartheta \approx 1$ , so folgt für alle weiteren  $t$ :  $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$ . Folglich kann bei der hier vorgenommenen Näherungsrechnung  $\dot{\psi}$  in (24) als Konstante betrachtet werden. (24) ist dann die Differentialgleichung eines konservativen Schwingers von einem Freiheitsgrad, dessen Rückführkonstante durch den in eckigen Klammern stehenden Ausdruck gegeben ist. Stabile Schwingungen um die Gleichgewichtslage  $\vartheta = 0$  können nur existieren, wenn die Rückführkonstante positiv ist. Durch Nullsetzen der Rückführkonstante und Auflösen der so entstehenden in  $\dot{\psi}$  quadratischen Gleichung findet man die beiden Grenzwerte:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{array} \right\} = \frac{k_1}{2k_6} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2k_3 k_6}{k_1^2}} \right]. \quad (25)$$

Stabile Schwingungen sind möglich, wenn (unter der Voraussetzung  $k_1 > 0$  und  $k_6 > 0$ )

$$\dot{\psi}_1 > \dot{\psi} > \dot{\psi}_2 \quad (26)$$

ist. Je nach dem Vorzeichen von  $k_3$  sind nun die beiden Fälle des „aufrechten“ ( $k_3 > 0$ , Schwerpunkt senkrecht über dem Schnittpunkt der Kardanachsen) und des „hängenden“ Kreisels ( $k_3 < 0$ , Schwerpunkt senkrecht unter dem Schnittpunkt der Kardanachsen) zu unterscheiden. Es gilt:

$$\begin{array}{l} \text{für den aufrechten Kreisel: } \dot{\psi}_1 > \dot{\psi}_2 > 0, \\ \text{für den hängenden Kreisel: } \dot{\psi}_1 > 0 > \dot{\psi}_2. \end{array}$$

Daraus folgt, daß der aufrechte Kreisel nicht stabil sein kann, wenn nicht seinem Kardansystem ein gewisser Anstoß — und zwar in der Bewegungsrichtung des Rotors — gegeben wird. Dieser Anstoß darf jedoch nicht zu groß werden, weil sonst die obere Stabilitätsgrenze ( $\dot{\psi} = \dot{\psi}_1$ ) überschritten wird. Der hängende Kreisel ist bei ruhendem Kardansystem stets stabil, jedoch kann auch er seine Stabilität verlieren, wenn das Kardansystem entweder entgegen der Drehrichtung des Rotors so angestoßen wird, daß  $\dot{\psi} < \dot{\psi}_2 < 0$  wird, oder wenn es in der Drehrichtung des Rotors mit  $\dot{\psi} > \dot{\psi}_1 > 0$  angestoßen wird. Stabilität ist also nur in einem ganz bestimmten Bereich von  $\dot{\psi}$ -Werten möglich. Die Grenzen dieses Bereiches fallen gerade mit denjenigen Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\psi}$  zusammen, die sich für die regulären Präzessionen mit  $\vartheta \rightarrow 0$  aus (22) ergeben. Nur für  $\dot{\psi}$ -Werte, die zwischen den Geschwindigkeiten der regulären Präzessionen liegen, ist die vertikale Lage stabil. Man kann diese Bereiche auch aus Abb. 16 für  $\vartheta = 0$  (aufrechter Kreisel) bzw.  $\vartheta = 180^\circ$  (hängender Kreisel) erkennen, da der Übergang vom aufrechten zum hängenden Kreisel außer durch Wechsel des Vorzeichens von  $k_3$  auch durch Übergang von  $\vartheta = 0$  zu  $\vartheta = 180^\circ$  bei  $k_3 = \text{const.}$  erreicht werden kann.

Der Stabilitätsbereich des aufrechten Kreisels ist in jedem Falle kleiner als der des hängenden; für  $k_1^2 = 2k_3 k_6$  schrumpft er auf Null zusammen, weil dann die notwendige Bedingung (23) für die Stabilität des aufrechten Kreisels nicht mehr erfüllt ist.

Die hier vorgenommenen Untersuchungen zur Stabilität können auch durch die Verwendung exakter Verfahren (z. B. nach *Ljapunov*) präzisiert werden, ohne daß sich an den Ergebnissen etwas ändert (s. z. B. <sup>1</sup>).

**6. Veranschaulichung der Kreiselbewegungen durch das Phasenporträt.** Unter Berücksichtigung der Abkürzungen (16) kann das Energie-Integral (12) durch Einsetzen von (14) in die Gestalt gebracht werden:

$$\dot{\vartheta}^2 = k_4 - k_3 \cos \vartheta - \frac{(k_2 - k_1 \cos \vartheta)^2}{k_5 - k_6 \cos^2 \vartheta} = k_4 - f(\vartheta). \quad (27)$$

Darin ist  $\dot{\vartheta}^2$  der kinetischen Energie des  $\vartheta$ -Schwingers proportional,  $f(\vartheta)$  ist ein Maß für die potentielle Energie, während  $k_4$  die Energiekonstante ist. (27) kann als Gleichung des Phasenporträts für den Winkel  $\vartheta$  aufgefaßt werden, wobei der Winkel  $\vartheta$  üblicherweise als Abszisse, seine Änderungsgeschwindigkeit  $\dot{\vartheta}$  jedoch als Ordinate aufgetragen wird. Das Phasenporträt läßt die wesentlichsten Eigenschaften des Systems erkennen, ohne daß eine nochmalige Integration durchgeführt werden muß. Allerdings geht die Zeit dabei nur als Parameter ein, so daß der zeitliche Verlauf der Bewegung nicht unmittelbar abgelesen werden kann.

<sup>1</sup> K. Magnus, *Prikladnaja Matematika i Mechanika* 22 (1958) S. 173—178.

Im vorliegenden Fall hat man zur Konstruktion des Phasenporträts zunächst die „Potentialfunktion“  $f(\vartheta)$  zu zeichnen. Die in  $f(\vartheta)$  eingehenden Größen  $k_1$  (bezogene Rotordrehung),  $k_3$  (bezogenes Schwermoment),  $k_5$  und  $k_6$  (Trägheitsmomentenverhältnisse) sollen dabei als konstant betrachtet werden; dagegen werden die Impulskonstante  $k_2$  und die in (27) eingehende Größe  $k_4$  (Energiekonstante) variiert.

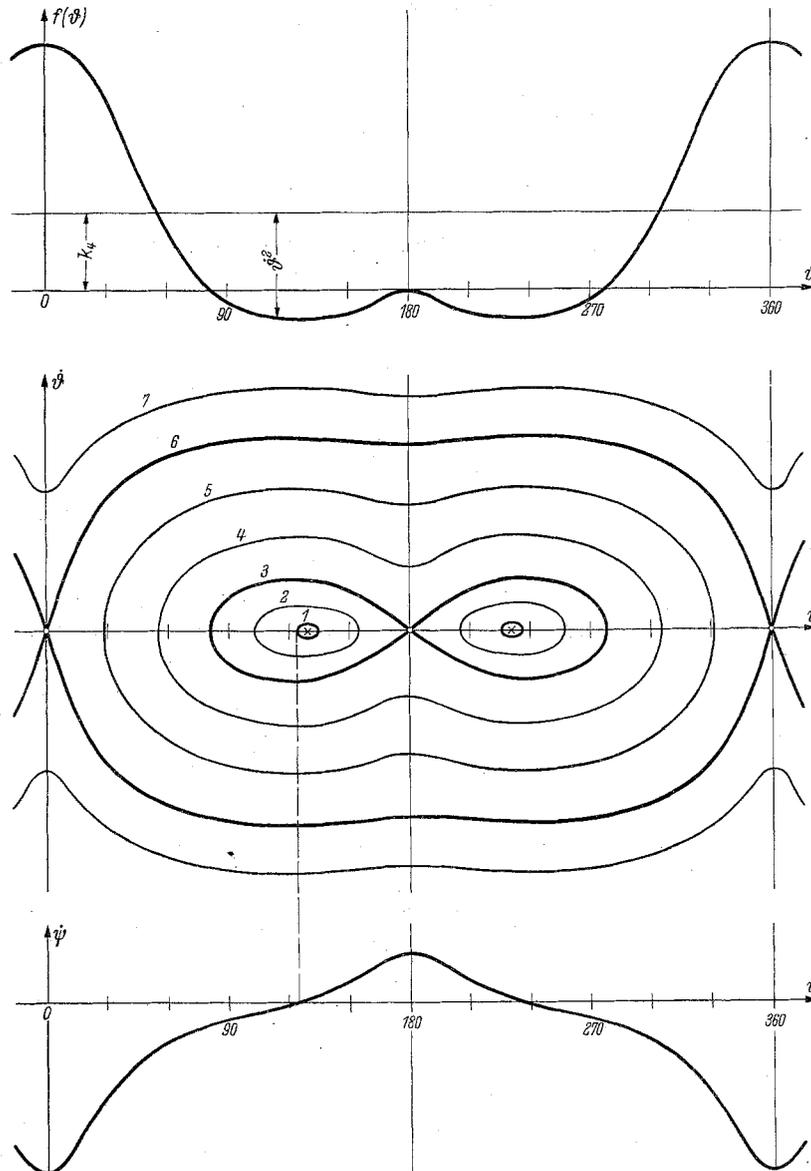


Abb. 17. Potentialfunktion  $f(\vartheta)$ , Phasenporträt  $\dot{\vartheta}(\vartheta)$  und Präzessionsfunktion  $\dot{\psi}(\vartheta)$  für einen kardanisch gelagerten Kreisel mit vorgegebener Impulskonstante  $k_2$ .

Die in Abb. 17 oben gezeichnete Potentialfunktion  $f(\vartheta)$  hat Maxima bei den Werten  $\vartheta = 0^\circ$ ,  $\vartheta = 180^\circ$ , sowie zwei dazwischen liegende Minima.  $f(\vartheta)$  ist symmetrisch, so daß es genügt, ihren Verlauf im Bereich  $0 \leq \vartheta \leq 180^\circ$  zu kennen. Da der Schwinger konservativ ist, entsprechen den Maxima der Potentialfunktion instabile Gleichgewichtslagen; sie sind durch kleine Kreise auf der Abszisse von Abb. 17 mitte dargestellt worden; den Minima entsprechen stabile Gleichgewichtslagen, die durch Kreuze gekennzeichnet wurden.

Bei vorgegebener Energiekonstante  $k_4$  kann der Wert von  $\dot{\vartheta}^2$  aus Abb. 17 oben leicht als Differenz zwischen einer Parallelen zur Abszisse im Abstände  $k_4$  und der  $f(\vartheta)$ -Kurve abgegriffen werden. Somit kann bei festgehaltenem  $k_4$  zu jedem Wert von  $\vartheta$  der zugehörige Wert von  $\dot{\vartheta}$  ermittelt und

die entsprechende Kurve im Phasenporträt punktweise konstruiert werden. Zu jedem Wert von  $k_4$  gehört eine „Phasenkurve“ des Phasenporträt, die die Abszisse  $\dot{\vartheta} = 0$  bei dem gleichen  $\vartheta$ -Wert schneidet, bei dem auch der Schnitt zwischen der  $k_4$ -Geraden und der  $f(\vartheta)$ -Kurve in Abb. 17 oben auftritt. So entspricht dem eingezeichneten Wert von  $k_4$  die mit der Nummer 4 bezeichnete Phasenkurve. Man erkennt sofort, daß nicht nur die stabilen Gleichgewichtslagen, sondern auch die Maxima der einzelnen Phasenkurven denselben Abszissenwert besitzen wie das Minimum der Potentialfunktion  $f(\vartheta)$ . Umgekehrt liegen die Minima der Phasenkurven und die instabilen Gleichgewichtslagen stets an den Stellen der Maxima von  $f(\vartheta)$ .

Jede Phasenkurve ist eine Lösungskurve der Differentialgleichung (27). Mit Ausnahme der singulären Punkte geht durch jeden Punkt der Phasebene ( $\dot{\vartheta}$   $\vartheta$ -Ebene) nur jeweils eine Lösungskurve. Physikalisch bedeutet dies, daß die Bewegung durch Vorgabe der Anfangsbedingungen für  $\vartheta$  und  $\dot{\vartheta}$  eindeutig bestimmt ist. Singuläre Punkte liegen auf der Abszisse an den Stellen der Extremwerte für die Funktion  $f(\vartheta)$ . Ihr Charakter ist durch den Verlauf der Lösungskurven in der Umgebung bestimmt; die von geschlossenen Lösungskurven umgebenen „Wirbelpunkte“ entsprechen den stabilen Gleichgewichtslagen des Systems, während die von je zwei trennenden Lösungskurven (Separatrizen) durchlaufenen „Sattelpunkte“ den instabilen Gleichgewichtslagen entsprechen. In der Umgebung der Sattelpunkte haben die Lösungskurven Hyperbelcharakter — während die Wirbelpunkte von ellipsenähnlichen Lösungskurven umgeben sind. Aus diesem Verlauf der Lösungskurven kann die Stabilität der Gleichgewichtslagen in unmittelbar anschaulicher Weise abgelesen werden.

Das Phasenporträt Abb. 17 mitte, läßt die möglichen Bewegungstypen leicht erkennen. Unter Berücksichtigung eines entsprechenden Diagramms für die Präzessionsgeschwindigkeit  $\dot{\psi}$  (Abb. 17 unten) lassen sich sogar Aussagen über die Form der Bahnkurven machen, die die Punkte der Figurenachse durchlaufen. Aus (19) sieht man, daß  $\dot{\psi}$  nicht von der Größe der Energiekonstanten  $k_4$  abhängt. Folglich gilt für alle im Phasenporträt gezeichneten Kurven dieselbe Abhängigkeit  $\dot{\psi}(\vartheta)$ .

Die innerhalb der Separatrix 3 gelegenen ellipsenartigen Phasenkurven (z. B. 1 und 2) ergeben Bewegungen, bei denen der Elevationswinkel  $\vartheta$  zwischen zwei Grenzwerten schwankt. Da die zugehörigen Werte von  $\dot{\psi}$  sowohl positiv als auch negativ sein können, beschreiben die Punkte der Figurenachse zyklidenähnliche Bahnen, die jeweils zwischen zwei Grenzkreisen liegen. Das entspricht vollkommen den vom *Lagrangeschen* Fall her bekannten Ergebnissen. Die Bahnen können Wellen- oder Schleifen-Charakter haben und als trennenden Fall dazwischen auch Spitzen bilden. Auch diese Fälle lassen sich aus dem Phasenporträt erkennen. Lotet man nämlich den Punkt, bei dem die  $\dot{\psi}$ -Kurve durch die Abszisse läuft, in das Phasenporträt herauf, dann entspricht die dieses Lot tangierende Phasenkurve (hier Kurve 1) gerade der Spitzenzykloide; bei ihr wird für  $\dot{\vartheta} = 0$ , also im Umkehrpunkt der Bewegung auch gleichzeitig  $\dot{\psi} = 0$ . Alle innerhalb der Phasenkurve 1 verlaufenden (nicht gezeichneten) Phasenkurven bilden demnach Wellenzykliden; alle zwischen der Kurve 1 und der Separatrix 3 verlaufenden Phasenkurven ergeben Schleifenzykliden. Bahnkurven des hier besprochenen Schleifentyps zeigen z. B. die Abb. 9, 12 und 14, während der Sonderfall der Spitzenzykliden sehr schön in den Abb. 13 und 15 zu sehen ist.

Die zwischen den Separatrizen 3 und 6 liegenden Phasenkurven repräsentieren Schleifenbewegungen, bei denen der untere Pol des Systems ( $\vartheta = 180^\circ$ ) durchlaufen wird. Der innere Kardanring schlägt dabei durch die Ebene des äußeren Kardanringes. Bahnkurven dieser Art zeigen die Abb. 5 bis 8 und 10. Bei der Phasenkurve 7 von Abb. 17, die einem besonders großen Wert der Energiekonstanten  $k_4$  entspricht, schlägt der innere Kardanring sowohl im unteren als auch im oberen Pol durch die Ebene des äußeren Kardanringes. Bewegungen dieser Art lassen sich zwar leicht beobachten, wenn man bei nicht zu starkem Eigendrall des Rotors den Innenring kräftig anstößt, jedoch sind die Projektionen ihrer Bahnkurven unübersichtlich, so daß sie hier nicht dargestellt wurden.

Die Separatrizen 3 und 6 entsprechen asymptotischen Bewegungen, bei denen der von den Separatrizen durchschnittene singuläre Punkt erst nach unendlich langer Zeit erreicht wird — ähnlich wie derartige Bewegungen auch bei dem *Lagrangeschen* Kreisel untersucht worden sind (s. z. B. <sup>1</sup>). Man erkennt die Tatsache des asymptotischen Hereinwanderns in den singulären Punkt am einfachsten aus der Beziehung für den zeitlichen Verlauf der durch die Phasenkurven dargestellten Bewegung. Es gilt allgemein für die Zeit der Bewegung:

$$t = \int \frac{d\vartheta}{\dot{\vartheta}(\vartheta)}. \quad (28)$$

<sup>1</sup> R. Grammel, Der Kreisel, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950, Bd. I, § 7, S. 99.

Nähert man nun die Separatrizen in der unmittelbaren Umgebung der singulären Punkte durch ihre Tangenten an, setzt also  $\dot{\vartheta} = \pm c \vartheta$  mit einer entsprechenden Konstanten  $c$ , so folgt aus (28):

$$t = \pm \frac{1}{c} \int \frac{d\vartheta}{\vartheta} = \pm \frac{1}{c} \ln \vartheta + t_0, \quad (29)$$

mit einer neuen Integrationskonstanten  $t_0$ . Man erkennt, daß die Zeit für die Bewegung mit  $\vartheta \rightarrow 0$  logarithmisch gegen unendlich geht, also eine asymptotische Annäherung stattfindet.

Es ist übrigens nicht schwer, sich die Veränderungen des Phasenporträts vorzustellen, die bei Vorhandensein nicht zu starker dissipativer Kräfte im System auftreten. Die Phasenkurven werden dann im allgemeinen nicht mehr geschlossen sein, sondern spiralig verlaufen. Dabei kann sich auch der Typ der Bewegung vollkommen ändern. So stellt die in Abb. 11 wiedergegebene Aufnahme eine Bewegung dar, deren Phasenkurve zunächst vom Typ der Phasenkurve 4 ist, dann aber die Separatrix 3 durchschneidet, um den Charakter der Phasenkurve 2 anzunehmen.

Das in Abb. 17 gezeichnete Phasenporträt gilt für einen festen Wert der Impulskonstanten  $k_2$ . Will man sich eine Übersicht über die Bewegungstypen verschaffen, die bei Variation von  $k_2$  möglich sind, dann genügt es im allgemeinen, die Veränderungen der Lage der singulären Punkte im Phasenporträt (also der Gleichgewichtslagen) sowie den Verlauf der Separatrizen zu untersuchen. Die Gleichgewichtslagen sind durch die Extremwerte der Potentialfunktion  $f(\vartheta)$  gegeben. Aus (27) findet man leicht durch Differentiation:

$$\frac{df}{d\vartheta} = \sin \vartheta \left\{ \frac{2(k_2 - k_1 \cos \vartheta) [k_1(k_5 - k_6 \cos^2 \vartheta) - k_6 \cos \vartheta (k_2 - k_1 \cos \vartheta)] - k_3}{(k_5 - k_6 \cos^2 \vartheta)^2} - k_3 \right\}. \quad (30)$$

Daraus sieht man zunächst, daß Extremwerte stets in den Pollagen  $\vartheta = 0^\circ$  und  $\vartheta = 180^\circ$  auftreten, da dort  $\sin \vartheta$  verschwindet. Die Pollagen bilden also in jedem Falle Gleichgewichtslagen. Weitere Gleichgewichtslagen können existieren, wenn der in der geschweiften Klammer stehende Ausdruck zu Null wird. Da dieser eine Funktion 4. Grades für  $\cos \vartheta$  ist, läßt sich eine allgemeine Lösung nicht angeben. Man kann jedoch die Verhältnisse unter Berücksichtigung der Ergebnisse des vorigen Abschnitts recht gut übersehen: Bei vorgegebenen geometrischen Abmessungen des Systems (d. h. festen  $k_5$  und  $k_6$ ) und vorgegebenem Eigenimpuls des Rotors (d. h. festem  $k_1$ ) hängt die Lage und auch die Zahl der Extremwerte der Potentialfunktion von der Größe der Impulskonstanten  $k_2$  ab. Verändert man die Größe von  $k_2$  gegenüber dem in Abb. 17 verwendeten Wert, so wirkt sich das in einer Verschiebung der Minima von  $f(\vartheta)$ , also der stabilen Gleichgewichtslagen im Phasenporträt aus. Die Gleichgewichtslagen können entweder in Richtung zur oberen oder zur unteren Pollage wandern. Bei Hereinwandern in eine der Pollagen wird aber deren Charakter geändert: der Sattelpunkt wird zu einem Wirbelpunkt, also die instabile Gleichgewichtslage stabil. Die Verzweigungsstellen für das Gleichgewicht in den Pollagen sind im vorhergehenden Abschnitt untersucht und sowohl für den aufrechten als auch für den hängenden Kreisel in Abhängigkeit von der Größe  $\psi$  bestimmt worden (s. Gleichung [25]).

Aus den kritischen Werten für  $\psi$  lassen sich nun leicht auch die entsprechenden kritischen Werte für die Impulskonstante  $k_2$  ausrechnen: wegen (11) gilt unter Berücksichtigung von (16):

$$k_2 = k_1 \cos \vartheta + \psi (k_5 - k_6 \cos^2 \vartheta). \quad (31)$$

Setzt man hierin die kritischen Werte  $\psi_1$  und  $\psi_2$  sowohl für den aufrechten (Index  $a$ ) als auch für den hängenden Kreisel (Index  $h$ ) ein, so bekommt man vier Grenzwerte für  $k_2$ , die wie folgt verteilt sind:

$$k_{21}^a > k_{22}^a > 0 > k_{21}^h > k_{22}^h. \quad (32)$$

Dabei wurde  $k_3 > 0$  vorausgesetzt und deshalb der Übergang vom aufrechten zum hängenden Kreisel durch Veränderung von  $\vartheta$  um den Betrag  $\pi$  vorgenommen.

Die qualitative Struktur des Phasenporträts ändert sich nun jedesmal, wenn  $k_2$  einen der vier kritischen Werte (32) durchschreitet. Diese Änderungen sind in Abb. 18 dargestellt, und zwar sind — ähnlich wie schon in Abb. 17 — von oben nach unten die Funktionen  $F(\vartheta)$ ,  $\dot{\vartheta}(\vartheta)$  und  $\psi(\vartheta)$  mit gleichen Abszissenmaßstäben eingetragen.  $F(\vartheta)$  ist dabei die um den Betrag  $f(0)$  verschobene Potentialfunktion  $f(\vartheta)$ , also  $F(\vartheta) = f(\vartheta) - f(0)$ .

Zur Vereinfachung der Darstellung sind im Phasenporträt nur die singulären Punkte und die Separatrizen gezeichnet worden. Instabile Gleichgewichtslagen sind wieder durch einen Kreis, stabile durch ein Kreuz kenntlich gemacht. Die Fälle  $A, B, C, D$  gehören zu abnehmenden Werten für  $k_2$ .

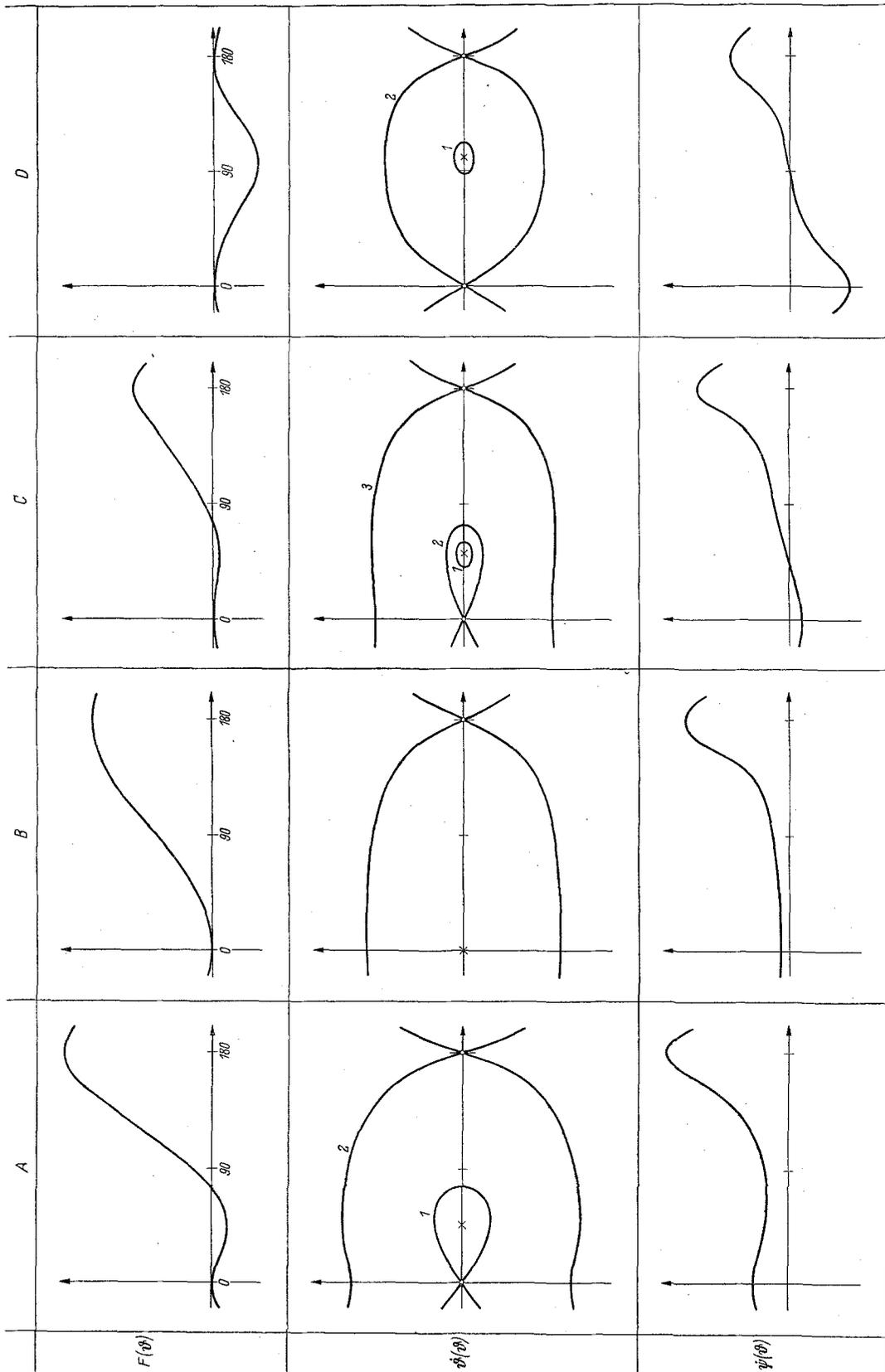


Abb. 18. Überschrift über den Einfluß von Veränderungen der Impulskonstanten  $k_2$  auf das Bewegungsverhalten eines kardanisch gelagerten Kreisels. Die Fälle A, B, C, D entsprechen abnehmenden Werten von  $k_2$ . Wie bei Abb. 17 sind die (reduzierten) Potentialfunktionen  $F(\phi)$ , die Phasenporträts  $\phi(\phi)$  und die Präzessionsfunktionen  $\psi(\phi)$  gezeichnet worden.

Im Falle *A* ist  $k_2 > k_{21}^a$ ; das ist bei starkem Anstoß des äußeren Kardanringes stets realisierbar. Neben den beiden instabilen Gleichgewichtslagen in den Polen existiert hier (ähnlich wie in Abb. 17) noch eine stabile Gleichgewichtslage bei  $\vartheta \approx 45^\circ$ . Bemerkenswert ist, daß in diesem Fall stets  $\dot{\psi} > 0$  bleibt, also das Kardansystem monoton dreht. Die stabile Gleichgewichtslage entspricht hier gerade der früher schon untersuchten „schnellen regulären Präzession“ (Nutation). Nachbarbewegungen dazu verlaufen wieder zwischen zwei Grenzwerten des Elevationswinkels jedoch sind, ihre Bahnkurven stets vom Typ der Wellenzykloiden; Schleifen und Spitzen sind wegen  $\dot{\psi} > 0$  nicht möglich.

Im Falle *B* ist  $k_{21}^a > k_2 > k_{22}^a$ . Durch Verkleinerung der Impulskonstanten ist die im Falle *A* noch getrennt vorhandene stabile Gleichgewichtslage in den Nullpunkt hereingewandert und hat diesen stabil gemacht.  $F(\vartheta)$  hat entsprechend jetzt bei  $\vartheta = 0$  ein Minimum. Alle zwischen der stabilen Gleichgewichtslage und der Separatrix verlaufenden Phasenkurven haben ein ellipsenähnliches Aussehen. Die zugehörigen Bahnkurven laufen in jedem Falle durch die obere Pollage, wobei stets  $\dot{\psi} > 0$  bleibt.

Mit weiterer Verkleinerung von  $k_2$  kommt man zum Fall *C*, für den  $k_{22}^a > k_2 > 0$  gilt. Die obere Pollage ist wieder zu einem Sattelpunkt geworden, weil aus ihr ein stabiler Wirbelpunkt abgewandert ist, der im vorliegenden Fall bei  $\vartheta \approx 50^\circ$  liegt. Qualitativ hat das Phasenporträt das gleiche Aussehen wie im Falle *A*. Die Unterschiede werden aber deutlich, wenn man die  $\psi$ -Kurve berücksichtigt. Die Drehung des äußeren Kardanrahmens braucht nicht mehr monoton zu sein. Wie im Falle von Abb. 17 können hier wieder Wellen- und Schleifenbahnen für die innerhalb der Separatrix verlaufenden Phasenkurven unterschieden werden. Sie werden durch die Phasenkurve *I* („Spitzenzykloide“) voneinander getrennt. Die stabile Gleichgewichtslage gibt in diesem Falle die „langsame reguläre Präzession“ wieder. Alle sonst noch möglichen Bahntypen entsprechen vollkommen den schon bei Abb. 17 ausführlich erläuterten.

Mit weiterer Verkleinerung von  $k_2$  wandert die stabile Gleichgewichtslage nach rechts, während sich die sie umschließende Separatrix aufbläht. Bei dem Werte

$$k_2 = \frac{k_3 (k_5 - k_6)}{2 k_1} \quad \text{mit} \quad k_{22}^a > k_2 > k_{21}^b \quad (33)$$

verschmelzen beide Separatrizen zu einer einzigen, die dann durch beide Polpunkte hindurchläuft. Diesen Fall zeigt Abb. 18*D*. Die stabile Gleichgewichtslage ist dabei bis zu  $\vartheta = 100^\circ$  abgewandert. Es existiert eine Phasenkurve *I*, der eine Bahnkurve mit Spitzen entspricht. Sie trennt in üblicher Weise die Bereiche der Wellen- und der Schleifenbahnen. Der Fall *D* ist dadurch ausgezeichnet, daß die Maxima der  $F(\vartheta)$ -Kurve die gleichen Ordinatenwerte haben.

Würde man nun  $k_2$  noch weiter verkleinern, so würden bei weiterem Rechtswandern der stabilen Gleichgewichtslage wieder zwei getrennte Separatrizen auftreten. Es entstände dann ein Phasenporträt von dem in Abb. 17 gezeigten Typ. Die in den Abb. *A*, *B*, *C* gezeigten Veränderungen der Struktur des Phasenporträts beim Durchgang durch den Stabilitätsbereich der oberen Pollage wiederholen sich dann sinngemäß auch bei der unteren Pollage, nur sind die Punkte  $\vartheta = 0^\circ$  und  $\vartheta = 180^\circ$  entsprechend zu vertauschen. Auf eine Darstellung auch dieser Dinge in Abb. 18 ist daher verzichtet worden.

(Eingegangen am 29. April 1958.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. Kurt Magnus, Stuttgart-O, Hackländerstr. 33.