Nichtlineare Probleme der Regelungstheorie*)

Von *K. Magnus*

Es wurde ein Überblick über Problemstellungen und einige neuere Ergebnisse der Theorie nichtlinearer Regelungserscheinungen gegeben. Dabei erwies sich eine Beschränkung auf Verfahren, die auf Systeme beliebig hoher Ordnung anwendbar sind, als zweckmäßig. Eine wesentliche Tatsache, die aus dem Studium der zahlreichen, in den vergangenen etwa fünf Jahren erschienenen Arbeiten abgeleitet werden kann, ist das Vordringen exakter Berechnungsmethoden. Es ist gelungen, einerseits für gewisse Klassen von Regelsystemen, andererseits für bestimmte Probleme Verfahren zur exakten Untersuchung zu entwickeln.

Die *Ljapunov*sche Theorie zur Bestimmung der Stabilität der Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen wurde von verschiedenen Autoren erweitert und ergänzt. Ajzerman und Gantmacher gelang die Verallgemeinerung von zwei *Ljapunov*chen Sätzen auf Systeme, deren nichtlineare Funktionen nur bereichsweise analytisch zu sein brauchen. Die *Lurje*schen Untersuchungen über Systeme mit nur einer nichtlinearen Funktion wurden von Hahn ergänzt durch Angabe der hinreichenden Stabilitätsbedingungen für Systeme, deren einzige nichtlineare Funktion vom Relaistyp mit Totbereich und Hysterese ist. Die Technik der Stabilitätsbestimmung wurde von Lehnigk durch einen Ansatz für die *Ljapunov*sche Funktion bereichert, der wegen der Einführung zusätzlicher Parameter besonders anpassungsfähig ist.

Für Relaissysteme liegt eine weitgehend abgeschlossene Theorie von Cypkin vor. Sie gilt für Systeme, die aus einem linearen Teilsystem und einem Relaiselement bestehen. Da am Ausgang des Relaiselementes nur Impulse konstanter Amplitude auftreten können, läßt sich die Reaktion des linearen Teilsystems durch Überlagerung von Übergangsfunktionen ermitteln. Die Stabilität kann durch Untersuchung des komplexen Übertragungsfaktors $W(p)$ des linearen Teilsystems bestimmt werden. Das Verhalten von Relaissystemen hängt eng mit dem der Impulssysteme zusammen, wobei das Impulssystem aus dem Relaissystem durch Ersatz des Relaiselementes durch ein Impulselement entsteht. Das Impulselement moduliert ein ankommendes Signal so, daß an seinem Ausgang eine zeitlich äquidistante Folge von Impulsen entweder konstanter Amplitude bei variabler Dauer, oder konstanter Dauer bei variabler Amplitude auftritt. Auch hierfür läßt sich die Reaktion des linearen Teilsystems durch Überlagern von Übergangsfunktionen berechnen. Es ist möglich, einen Übertragungsoperator $W^*(p)$ zu definieren, mit dem ganz analog zu den bekannten Untersuchungen linearer Systeme verfahren werden kann. Zu allen wichtigen für lineare Systeme bekannten Stabilitätskriterien lassen sich dabei völlig analoge Kriterien für Impulssysteme finden. Ihre Anwendung ist zum Teil sogar leichter als bei linearen Systemen.

Zahlreiche Untersuchungen sind dem Problem der Optimierung in nichtlinearen Regelkreisen gewidmet. Nachdem man erkannt hat, daß das Verhalten optimal abgestimmter linearer Regelkreise durch Einführen von geeigneten Nichtlinearitäten noch verbessert werden kann, sind zahlreiche Methoden zur Synthese optimaler, nichtlinearer Regelsysteme ausgearbeitet werden. So untersucht Ostrovskij ein lineares System von der Form $\sum_{i=0}^{n} a_i\, x^{(i)} = 0$, bei dem jedoch die Koeffizienten je zwei verschiedene Werte $a_i = b_i$ bzw. $a_i = c_i$ annehmen können. Durch geeignete Wahl der b_i und c_i und durch geschicktes Umschalten von einem Koeffizientensystem zum anderen lassen sich sehr günstige Lösungen finden. Letov hat gezeigt, daß durch rechtzeitiges Umschalten des Vorzeichens nur eines Koeffizienten eine Störung bereits nach einer Halbschwingung vollständig ausgeregelt werden kann. Die extreme Fragestellung des Optimierungsproblems dürfte im wesentlichen auf Lerner, Sylva und Feldbaum zurückgehen; sie wurde wesentlich durch Arbeiten von Pontrjagin und seinen Schülern gefördert. Es konnte gezeigt werden, daß ein in kürzester Zeit erfolgender Übergang aus einem Zustand x_1 (x sei ein n-dimensionaler Vektor der Zustandsvariablen) in einen Zustand x_2 stets zur vollen Ausnützung der zugelassenen Bereiche für alle vorhandenen Stell- oder Steuergrößen führt. Das Hauptproblem besteht in der Berechnung der jeweiligen Umschaltzeitpunkte, zu denen die Stellgrößen von einem Extremwert zum anderen springen müssen. Vorschläge zur Verwirklichung dieser Art von Optimalsystemen sind bisher nur für Systeme zweiter bzw. dritter Ordnung bekannt geworden.

Trotz beachtlicher Fortschritte bei der Entwicklung exakter Berechnungsmethoden ist das Interesse an anpassungsfähigen Näherungsverfahren nicht geringer geworden. Hier konnte nachgewiesen werden, daß die meisten der bekanntgewordenen „quasi-linearen" Näherungsverfahren im ersten Schritt völlig äquivalent sind. Am vorteilhaftesten scheint die Variationsmethode von Ritz in der von Galerkin angegebenen Form zu sein. Trotz zahlreicher Ansätze

*) Auf Einladung der Tagungsleitung gehaltener Hauptvortrag.

(Sagirov, Glatenok) ist eine befriedigende Abschätzung der Fehler dieser Näherungsverfahren bisher noch nicht gelungen. Das liegt zum Teil in der Tatsache begründet, daß nicht so sehr der Fehler der Zustandsgrößen selbst, sondern der Fehler von sekundären, erst aus den bereits fehlerbehafteten Zustandsgrößen abgeleiteten Größen interessiert. Bei der Berechnung von stationären Schwingungen sind dies z.B. die Fehler der Amplituden- und Frequenzwerte.

Das tiefere Eindringen in die Natur der nichtlinearen Erscheinungen machte Erweiterungen und Ergänzungen des Begriffssystems notwendig, das bisher zur Beschreibung linearer Systeme verwendet wurde. Dieser Prozeß wird sicher noch weiter fortschreiten. Richtungsweisend kann hier eine von Minorsky gegebene Klassifikation von Verzweigungspunkten der dynamischen Stabilität sein.

Anschrift: Prof. Dr. K. Magnus, Stuttgart O, Hackländerstr. 33

Über die totale Stabilität erzwungener Bewegungen mit kombinierter Dämpfung

Von *Rolf Reißig*

Wir betrachten einen einfachen Schwinger, dessen Verrückung mit x bezeichnet sei; $x' = y$ sei die Geschwindigkeit. Es mögen folgende Kräfte wirken: Die nichtlinearen, streng monoton abnehmenden Rückstell- und Dämpfungskräfte $-G(x)$ und $-F(y)$ $[G(0) = F(0) = 0]$, die Festreibung $-\mu'$ sgn y und die Fremderregung $E(t)$. Diese braucht nicht periodisch zu arbeiten, soll aber in dem Sinne oszillatorisch sein, daß

$$-M \leqq E(t) \leqq +M; \quad E(t_k) = (-1)^k M; \quad t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots; \quad 0 < T' \leqq t_{k+1} - t_k \leqq T''.$$

Wir verlangen ferner $M > \mu$; im entgegengesetzten Falle streben alle Bewegungen zu einer Ruhelage in dem Gleichgewichtsabschnitt $G^{-1}(M-\mu) \leqq x \leqq G^{-1}(\mu - M)$ hin. Die allgemeine Bewegung des Schwingers ist eine Stillstandsbewegung; in den Intervallen mit $x' \not\equiv 0$ gilt die Differentialgleichung

$$x'' + F(x') + \mu \operatorname{sgn} x' + G(x) = E(t),$$

während in Zeitabschnitten, wo $x' \equiv 0$, (Pausen) die Ungleichung

$$E(t) - \mu \leqq G(x) \leqq E(t) + \mu$$

besteht. Wir fragen nach der Stabilität einer Bewegung. Im Falle linearer Federkraft $[G(x) \equiv x]$ ist dieses Problem weitgehend gelöst: Unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Dämpfung $-F(y)$ sind alle Bewegungen für hinreichend große t-Werte gleichmäßig beschränkt (D-Verhalten) und asymptotisch stabil im Ganzen. Jetzt soll aber die Federkraft nichtlinear sein, und es wird nicht nach der Stabilität bei einer einmaligen Anfangsstörung, sondern bei dauernd vorhandenen Störungen gefragt. Darunter ist folgendes zu verstehen: Die Bewegung, für die wir uns interessieren, wird als ungestörte Bewegung $(x, x' = y)$ bezeichnet und als bekannt vorausgesetzt. Die Nachbarbewegungen heißen gestörte Bewegungen $(\bar{x} = x + u, \bar{x}' = y + v)$. Diese genügen nicht mehr den oben angegebenen Beziehungen; vielmehr überlagert sich der wohlbestimmten Erregerkraft $E(t)$ eine unkontrollierbare, von der Zeit t und den Koordinatendifferenzen u, v abhängige Störkraft $R(u, v, t)$, so daß wir für die gestörte Bewegung die Differentialgleichung

$$\bar{x}'' + F(\bar{x}') + \mu \operatorname{sgn} \bar{x}' + G(\bar{x}) = E(t) + R(u, v, t); \; \bar{x}' \not\equiv 0$$

und die Pausenrelation

$$E(t) + R(u, v, t) - \mu \leqq G(\bar{x}) \leqq E(t) + R(u, v, t) + \mu; \bar{x}' \equiv 0$$

erhalten. Die ungestörte Bewegung ist stabil bei ständig wirkenden Störungen (total stabil), wenn man einer beliebig vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ zwei positive Schranken η und δ zuordnen kann, so daß aus

$$|R(u, v, t)| \leqq \eta \quad (|u| \leqq \varepsilon, \quad |v| \leqq \varepsilon, \quad t \geqq 0)$$

und

$$|u(0)| \leqq \delta, \quad |v(0)| \leqq \delta$$

für alle Zeiten $t \geqq 0$

$$|u(t)| \leqq \varepsilon, \quad |v(t)| \leqq \varepsilon$$

folgt. Zum Beweis der totalen Stabilität weist man erst einmal nach bekannter Methode das D-Verhalten des Schwingers nach; daraus ergibt sich für $t \geqq 0$

$$|x(t)| \leqq a, \quad |y(t)| \leqq b.$$