PROF. DR. K. MAGNUS, T. H., STUTTGART

# Nichtlineare Probleme der Regelungstheorie

## 1. Einführendes

Von nichtlinearen Problemen zu sprechen, ist auf vielen Gebieten der angewandten Wissenschaften schon fast zur Mode geworden. Es ist daher verständlich, daß die Zahl der Veröffentlichungen, die das Gebiet der nichtlinearen Regelungen betreffen, ähnlich angestiegen ist, wie wir es bei anderen aktuellen Gebieten beobachten. So notwendig gerade deshalb zusammenfassende Übersichtsberichte geworden sind, so schwierig ist gleichzeitig auch die Abgrenzung ihrer Themenkreise. Es ist meist weder möglich noch zweckmäßig, Vollständigkeit anzustreben. In diesem Bericht sollen daher Teilprobleme herausgegriffen werden, die eine gewisse Vorstellung von den Entwicklungstendenzen auf dem Gebiet der Regelungstheorie geben können. Daß dabei auf Beweise verzichtet werden muß, dürfte verständlich sein. Jedoch soll versucht werden, Problemstellungen zu beleuchten und Ergebnisse mitzuteilen.

Dabei soll von vornherein diejenige große Gruppe von Arbeiten ausgeklammert werden, in denen ausschließlich Systeme mit nur einem Freiheitsgrad behandelt werden. So wertvoll auch die in der letzten Zeit gerade auf diesem Gebiet gewonnenen Erkenntnisse sind, ihre Behandlung würde hier zu weit führen.

Vergegenwärtigen wir uns zunächst, welche Probleme bei der Untersuchung von Regelkreisen interessieren. Es sind dies vor allem Fragen nach der Reaktionsgeschwindigkeit eines Reglers, nach dem Verlauf von Übergängen aus einem Zustand in einen anderen, nach der Existenz periodischer Bewegungsformen sowie deren Stabilität und schließlich nach den günstigsten Verhältnissen, die an einem Regler oder an einem Regelkreis eingestellt werden können. Obwohl die genannten Probleme seit langem schon Gegenstand von Untersuchungen waren, sind doch in der letzten Zeit vor allem in zwei Richtungen erhebliche Fortschritte zu verzeichnen: erstens in der immer weitergehenden Sicherung und Verallgemeinerung von bereits bekannten Ergebnissen und zweitens in der Schaffung und Anwendung exakter Untersuchungsmethoden. Das Vordringen dieser Methoden ist geradezu ein Charakteristikum für die Entwicklung der letzten Jahre. Daß daneben die Näherungsmethoden nicht verdrängt, sondern sogar noch ausgebaut wurden, dürfte in der Notwendigkeit begründet sein, auch für viele der komplizierten, praktisch vorkommenden, nichtlinearen Regelkreise gewisse Aussagen zu machen.

## 2. Stabilitätsprobleme

Die Stabilität von Regelungsvorgängen ist in den letzten Jahren nicht nur in zahlreichen Originalarbeiten behandelt worden, sondern es sind zugleich einige ausgezeichnete Übersichtsberichte erschienen [1, 2]. Daher sollen an dieser Stelle nur solche Arbeiten der letzten Zeit erwähnt werden, die neue Gedanken und Ergebnisse gebracht haben.

Eines der wichtigsten Ergebnisse der Ljapunovschen Theorie der Stabilität von Bewegungen besteht in der Erkenntnis, daß die Stabilität der Lösungen eines Systems von Differentialgleichungen der Form:

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{1}$$

in denen $x$ ein $n$-dimensionaler Vektor ist und die Vektorfunktionen $f$ periodisch in $t$ sein sollen, stets dann nach dem Verhalten der Lösungen des Systems erster Näherung

$$\dot{x} = Ax \tag{2}$$

beurteilt werden kann, wenn nicht ausgeartete Sonderfälle vorliegen, bei denen die charakteristischen Wurzeln des Systems erster Näherung verschwindende Realteile besitzen. $A$ ist eine Matrix mit konstanten Koeffizienten, die in bekannter Weise durch einen Linearisierungsprozeß aus (1) gewonnen wird.

Das genannte Ergebnis ist verschiedentlich verallgemeinert worden. So haben Ajzerman und Gantmacher [3] die Voraussetzung, daß die Funktionen $f(x, t)$ analytisch sein sollen, dahingehend erweitert, daß endlich viele Sprungstellen zugelassen werden. Hahn [4] ist eine Erweiterung auf Differenzengleichungen von der Form

$$x(t+1) = A(t)x(t) + g(t) \tag{3}$$

zu verdanken. Er leitet als hinreichende Bedingungen für die Stabilität der Lösungen dieses Systems ab: wenn die Lösung des abgekürzten Systems

$$x(t+1) = A(t)x(t) \tag{4}$$

„exponentiell stabil" ist, d. h., wenn gilt:

$$\left| x(t_o+k) \right| \leqq ae^{-\alpha k} \left| x(t_o) \right|, \tag{5}$$

dann sind auch die Lösungen des Ausgangssystems (3) bei beliebigem aber beschränktem $g(t)$ stabil.

Die Hahnschen Ergebnisse können bei der Berechnung von Impuls- und Schrittregelungen, deren Behandlung auf Differenzengleichungen führt, mit Vorteil verwendet werden. Desgleichen führt die Behandlung von Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten häufig auf die Untersuchung eines Systems von Differenzengleichungen, da die Elemente einer aus dem Fundamentalsystem der Differentialgleichung gebildeten Matrix einer Differenzengleichung genügen müssen.

Die direkte Methode zum Stabilitätsnachweis, die meist als zweite Methode von *Ljapunov* bezeichnet wird, gipfelt im Aufsuchen einer im ganzen Definitionsbereich positiv definiten Ljapunovschen Funktion $V(x)$. Von ihr wird verlangt, daß die unter Berücksichtigung der Ausgangs-Differentialgleichungen (1) gebildete totale zeitliche Ableitung:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\dot{x}_i = \sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_i, t) \tag{6}$$

negativ definit ist. Die mit der Anwendung dieses Verfahrens zusammenhängenden mathematischen Fragen können als weitgehend geklärt angesehen werden, doch ist der Weg bis zum Auffinden einer Ljapunovschen Funktion außerordentlich mühsam. Wenngleich es Ansätze zu einer Systematik des Aufbaus von Ljapunov-Funktionen gibt, so muß doch jeder Schritt begrüßt werden, der diese Arbeit erleichtert. Einen Vorschlag in dieser Richtung hat *Lehnigk* [5] gemacht, indem er für die totale zeitliche Ableitung der Ljapunov-Funktion einen quadratischen Ausdruck aufstellt, der noch gewisse Gewichtsfaktoren enthält. Die freie Wählbarkeit dieser Faktoren erlaubt die Anpassung des Ansatzes an das jeweilige Problem. An Beispielen konnte gezeigt werden, daß die oft störende Diskrepanz zwischen den nach Ljapunov ausgerechneten Bereichen der hinreichenden Stabilität und den Stabilitätsgebieten, die von einer Theorie der ersten Näherung geliefert werden, durch geschickte Wahl der Gewichtsfaktoren erheblich verringert werden kann.

Die Ljapunovsche Theorie wurde für den Sonderfall eines Systems mit nur einem nichtlinearen Glied durch *Lurje* [6] weitgehend ausgebaut. Er untersucht Systeme von der Form.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + a\xi \\ \dot{\xi} &= f(s) \\ s &= bx + c\xi \end{aligned} \tag{7}$$

Darin seien $x$, $a$, $b$ Vektoren, $A$ eine Matrix, $\xi$, $s$, $c$ Skalare.

[1]) Überarbeitete Fassung eines Vortrages, der auf der Jahrestagung 1959 der GAMM in Hannover gehalten wurde.

$f(s)$ ist im allgemeinen die nichtlineare Kennlinie eines Stellmotors. Sie soll den Bedingungen genügen:

$$f(0) = 0 \qquad s \cdot f(s) > 0 \qquad \text{für } s \neq 0$$

Durch Anwenden einer kanonischen Transformation, die die Matrix $A$ in Diagonalform überführt, gelingt Lurje eine weitgehende Vereinfachung der Stabilitätsuntersuchungen. Für den Sonderfall einer Stellgliedkennlinie von der Form $f(s) = c \cdot \mathrm{sign}\, s$ (Relaistyp) gibt er hinreichende Bedingungen für die Stabilität eines Regelkreises an, wobei der Faktor $c$ beliebige, aber konstante Werte annehmen kann.

Diese Lurjeschen Ergebnisse wurden von *Jakubovič* [7] ergänzt, der eine invariante Form der Lurjeschen Ausgangsgleichungen angibt und damit eine Vereinfachung der praktischen Ausrechnung ermöglicht. Die recht mühsame kanonische Transformation des Ausgangssystems wird dabei umgangen. *Bedeljbajev* [8] wiederum nimmt die Glieder der Matrix $A$ sowie den Faktor $a$ als periodische Funktionen der Zeit an und gibt ein hinreichendes Kriterium für Stabilität im Ganzen an. Unmittelbar auf Lurje aufbauend behandelt *Hahn* [9] ein System, dessen Stellmotor ebenfalls durch ein Relais geschaltet wird. Allerdings verwendet Hahn eine verallgemeinerte Relaiskennlinie, bei der sowohl Totzeit als auch Hysteresis vorkommen kann. Derartige Systeme lassen sich jedoch, wie im nächsten Absatz gezeigt werden wird, auch auf anderem Wege vollkommen streng untersuchen.

### 3. Theorie der Relaissysteme

Relaisregler, bei denen das Stellglied im allgemeinen nur zwei oder drei Stellungen einnehmen kann, werden wegen ihrer konstruktiven Einfachheit gern verwendet. Sie sind auch unter den Bezeichnungen Schwarz-Weiß-Regler, Ja-Nein-Regler oder nach der neueren Terminologie als Zweipunkt- bzw. Dreipunktregler bekannt geworden. Ansätze zu einer Theorie derartiger Regler sind schon sehr alt [10]. Neuere Untersuchungen zu diesem Problem gehen u. a. auf *Flügge-Lotz* [11], *Klotter* [12] und vor allem auf *Bilharz* [13] und seine Würzburger Schule [14, 15] zurück. Insbesondere aber kann dank der Arbeiten von *Cypkin* [16] die Theorie der Relaisregler jetzt als im wesentlichen abgeschlossen bezeichnet werden. Bei diesen Untersuchungen wird der Relaisregelkreis in ein lineares Teilsystem (L. S.) und in ein Relaiselement (R. E.) aufgeteilt wie es Abb. 1 zeigt. Da am

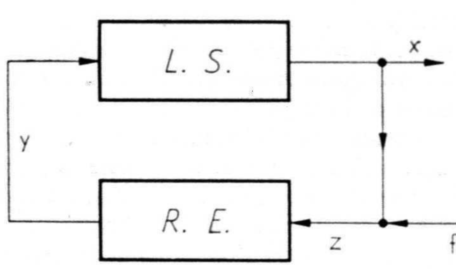


Abb. 1

Ausgang des Relaiselements stets nur Impulse konstanter Amplitude, jedoch wechselnden Vorzeichens und verschiedener Dauer auftreten können, unterliegt also das lineare Teilsystem der Einwirkung von Sprungfunktionen konstanter Amplitude. Die Reaktion des linearen Teilsystems auf diese Eingangsfunktionen läßt sich exakt ausrechnen. Ist die Übergangsfunktion, also die Reaktion auf einen Einheitssprung am Eingang $h(t)$, so läßt sich wegen der Überlagerbarkeit der Teillösungen die Gesamtlösung in der Form:

$$x = \sum_{\nu} c_\nu \, h_\nu \, (t - t_\nu) \tag{8}$$

schreiben. Dabei gilt

$$h_\nu \equiv 0 \quad \text{für} \quad t - t_\nu \leq 0 \, .$$

Die Zeitpunkte $t_\nu$ ergeben sich nun aus Schaltbedingungen, die z. B. die Form haben können:

$$z(t_\nu) = 0 \text{ mit } z = x - f \, .$$

Besitzt das Relais eine Totzone, dann wird die Schaltbedingung ortsabhängig, liegt dagegen eine Totzeit oder Verzögerungszeit vor, dann kommt eine Zeitabhängigkeit hinzu.

Ist nun die Reaktion des Regelkreises auf instationäre Störungen zu untersuchen, so kann die Lösung nach irgendeinem numerischen oder graphischen Verfahren schrittweise berechnet und unter Berücksichtigung der Schaltbedingungen aus einzelnen Teilstücken zusammengeflickt werden. Bei stationären periodischen Bewegungen des Systems dagegen lassen sich die Schaltzeitpunkte aus der Periodizitätsbedingung bestimmen. In diesem Fall kann die Stabilität beurteilt werden, ohne daß die Lösung selbst explizit ausgerechnet werden muß. Es können vielmehr aus dem Übertragungsfaktor $W(p)$ des linearen Teilsystems alle interessierenden Aussagen entnommen werden.

Cypkin hat außerdem gezeigt, daß die Stabilität des periodischen Zustandes eines Relaissystems eng mit dem Stabilitätsverhalten eines Impulssystems zusammenhängt. Unter einem Impulssystem wird dabei ein System verstanden, das aus einem Relaissystem bei Ersatz des Relaiselementes durch ein Impulselement entsteht. Dieses Impulselement stellt einen Modulator dar, der die ankommenden Signale so umformt, wie es in Abb. 2 skizziert ist. 2a zeigt das ankommende Signal $z$, 2b und

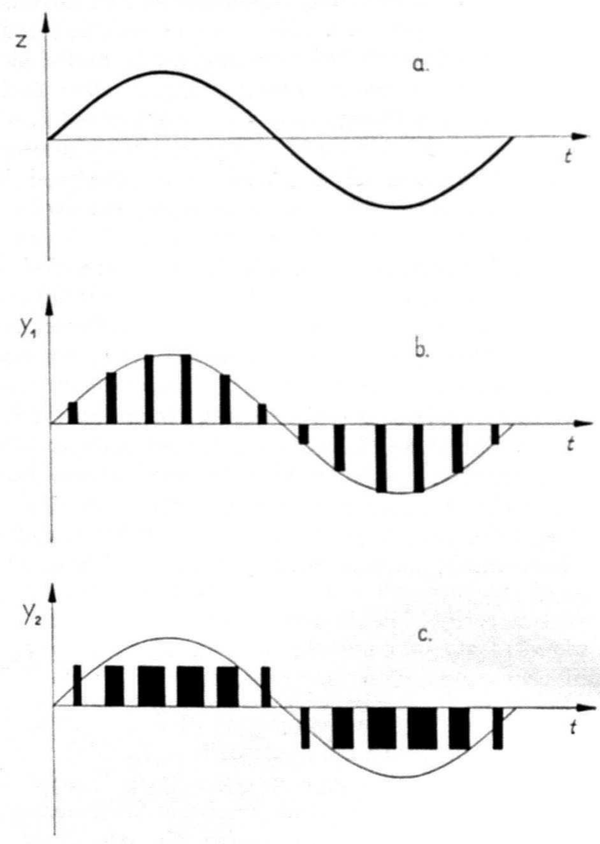


Abb. 2

2c zeigen die beiden wichtigsten Fälle für das entsprechende Ausgangssignal. Bei 2b wird eine äquidistante Folge gleichbreiter Impulse erzeugt, deren Höhe ein Maß für $z$ ist; bei 2c haben die Impulse stets die gleiche Amplitude, jedoch ist ihre Breite ein Maß für die Eingangsgröße $z$. In beiden Fällen kann man – wie bei den Relaissystemen – die Lösung $x$ durch Überlagerung von Übergangsfunktionen aufbauen. Das Verfahren ist sogar für Impulssysteme einfacher zu handhaben, weil die Schaltzeitpunkte von vornherein durch den Tastzyklus vorgeschrieben sind. Diese Tatsache ermöglicht die Definition eines Operators $W^*(p)$ für das Impulssystem, mit dem in völlig analoger Weise wie mit dem Übergangsfaktor $W(p)$ des linearen Teilsystems gearbeitet werden kann. Zum Beispiel lassen sich für die Untersuchung der Stabilität eines derartigen Impulssystems Analogien zu fast allen wichtigen Stabilitätskriterien (z. B. von Routh, Hurwitz, Nyquist, Michailow, Leonard, Küpfmüller) finden.

Die hier erwähnten Impulsregelkreise, die in der Regelungstechnik häufig auch als Schrittregelkreise bezeichnet werden, bilden zugleich eine Brücke zur Nachrichtenimpulstechnik und zur modernen Digitaltechnik elektronischer Rechenmaschinen.

Bisher wurde von Relaissystemen gesprochen, bei denen die Ausgangsgröße des Relais konstante Werte annehmen kann. Man kann jedoch erweiterte Relaissysteme betrachten, bei denen die Kennlinie des Relais aus einer Relaisfunktion $\varphi(z)$ (Sprungfunktion, eventuell mit Totbereich und Hysterese) und einer linearen Funktion zusammengesetzt ist:

$$f(z) = \varphi(z) + cz. \tag{9}$$

Zwei Beispiele für die so entstehenden Funktionen zeigt Abb. 3. Weiterhin kann eine Verallgemeinerung durch die Annahme von stückweise linearen Kennlinien für das nichtlineare Element eines Regelkreises vorgenommen werden. Ausführliche Untersuchungen über Systeme mit derartigen Nichtlinearitäten sind *Ajzerman* und *Gantmacher* (17) zu verdanken. Die Erweiterung Ljapunovscher Sätze wurde bereits im Abschnitt 2 erwähnt. Hier muß ergänzend bemerkt werden, daß es durch Definition von verallgemeinerten Ableitungen gelungen ist, die Berechnungen wieder in völliger Analogie zu den bei linearen Systemen üblichen durchzuführen. Bezeichnet man mit $pf(t)$ die zeitliche Ableitung einer analytischen Funktion $f(t)$, so wird die Ableitung einer nur stückweise analytischen Funktion durch

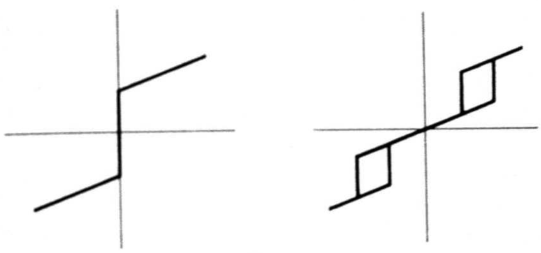

Abb. 3

$$p^{*}f(t) = pf(t) + \sum_{\nu} \zeta_{\nu}\, \delta(t - t_{\nu}) \tag{10}$$

dargestellt. Die $\zeta_{\nu}$ sind dabei ein Maß für die Höhe der jeweiligen Sprünge, $\delta$ ist die bekannte Dirac-Funktion.

Bei der praktischen Ausrechnung wird man im wesentlichen auf zwei altbekannte Methoden zurückgeführt: die Anstückelungsmethode und den Fourieransatz. Das Anstückelungsverfahren besteht in einer bereichsweisen Lösung des Differentialgleichungssystems und einem Aneinanderheften dieser Lösungen an den Übergangsstellen. Dabei treten drei Arten von Schwierigkeiten auf: 1. Es muß der allgemeine Typ der periodischen Schwingung vorgegeben werden, das heißt es muß vorausgesetzt werden, wieviele Schaltpunkte während einer Periode vorhanden sein sollen. 2. Die sich aus der Schließungsbedingung ergebende Periodengleichung ist im allgemeinen transzendent und daher nur schwer lösbar. 3. Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung müssen für jeden Teilbereich bestimmt werden.

Bei dem Verfahren des Fourieransatzes werden für alle Zustandsgrößen periodische Funktionen angesetzt und in Fourierreihen zerlegt. Diese enthalten außer den Amplitudenfaktoren auch die Frequenz als Unbekannte. Wenngleich dabei die Lösung der charakteristischen Gleichung entfällt, so ist die Ausrechnung doch recht kompliziert, da ein System von unendlich vielen nichtlinearen Gleichungen zwischen den Amplitudenfaktoren gelöst werden muß. Es kommt hinzu, daß die Lösung der Frequenzgleichung im allgemeinen nicht eindeutig ist, so daß erst durch physikalische Überlegungen die richtige Schaltfolge und damit die richtige Frequenz herausgefunden werden muß.

Das Verfahren des Fourieransatzes hat jedoch den Vorteil, daß durch Vernachlässigung der höheren Harmonischen Näherungslösungen gewonnen werden können. Bevor jedoch über die damit zusammenhängenden Fragen gesprochen wird, soll ein anderes, mit dem Verhalten von Relaissystemen eng zusammenhängendes Problem behandelt werden, das der Optimierung.

## 4. Das Optimierungsproblem

Schon in der linearen Regelungstheorie hat man sich bemüht, die Koeffizienten der Reglergleichungen so zu wählen, daß ein möglichst günstiger Regelungsverlauf entsteht. Es wurden verschiedene Arten von Optimalkriterien entwickelt und angewendet; so z. B. die Kriterien:

$$\int_0^\infty x\,dt = Min; \quad \int_0^\infty |x|\,dt = Min; \quad \int_0^\infty x^2 dt = Min \tag{11}$$

oder verallgemeinerte Kriterien von der Form:

$$\int_0^\infty (x^2 + \tau^2 \dot{x}^2)\,dt = Min; \qquad \int_0^\infty \sum_i c_i \left(\frac{d^i x}{dt^i}\right)^2 = Min \tag{12}$$

Seit etwa zehn Jahren hat sich nun die Erkenntnis durchgesetzt, daß die Regeleigenschaften durch Anwendung nichtlinearer Regler verbessert werden können. Probleme dieser Art wurden von zahlreichen Autoren (z. B. *Hopkin* [18], *Lewis* [19], *Schwartz* [20], *Matuschka* [21] u. a.) untersucht. Einen bedeutenden Schritt vorwärts brachten jedoch erst die Untersuchungen von *Lerner* [22] und *Silva* [23, 24]. Beide Autoren berücksichtigten die Tatsache, daß die in einem Regelkreis zur Verfügung stehende Energie (z. B. zur Verstellung des Stellgliedes) stets beschränkt ist. Ein optimaler Regelverlauf, d. h. ein möglichst schnelles Einschwingen der Regelgröße nach einer Störung, kann offenbar nur dann erreicht werden, wenn die zur Verfügung stehende Energiequelle stets voll eingeschaltet wird. So wird beispielsweise ein Schiff, das vom Kurs abgekommen ist, auf dem schnellsten Wege in den Sollkurs zurückgebracht werden können, wenn das Ruder bis zum Anschlag ausgelenkt wird. Eine einfache Überlegung zeigt jedoch, daß das Ruder vor Erreichen des neuen Kurses nicht nur zurückgestellt, sondern sogar in entgegengesetzter Richtung verstellt werden muß, damit ein Hinausschwingen über den vorgegebenen Kurs vermieden wird. Das Schiff kann im Sollkurs zur Ruhe kommen, wenn das Ruder schließlich im genau richtigen Zeitpunkt in die Normallage gebracht wird. Eine derartige Regelung, die jeweils das Stellglied von einer Endlage in die andere springen läßt, wurde von Silva als „predictor control" bezeichnet. Es konnte gezeigt werden, daß das Umspringen des Stellgliedes aus einer Endlage in die gegenüberliegende um so häufiger stattfinden muß, je höher der Grad der beschreibenden Differentialgleichung des Regelkreises ist. Ist die Differentialgleichung von der Ordnung $n$, dann muß das Stellglied $(n-1)$-mal aus der einen Endlage in die andere umspringen. Das kann bei Systemen höherer Ordnung zu gerätetechnischen Schwierigkeiten führen, weil dieses Umspringen um so schneller erfolgen muß, je mehr sich der eigentliche Regelvorgang seinem Ende nähert. Silva hat nun gezeigt, daß man durch Beschränkung auf drei Schaltungen eine gut brauchbare fast optimale Regelung auch bei Systemen höherer Ordnung bekommen kann.

Das Verdienst von Lerner ist, den Einfluß von Begrenzungen nicht nur der Stellgröße, sondern auch der Differentialquotienten der Stellgröße oder anderer Zustandsgrößen eines Regelkreises untersucht zu haben. Daß diese Fragestellung praktische Bedeutung besitzt, läßt sich leicht an dem schon genannten Beispiel der Schiffskursregelung erklären: das Ruder kann ja nicht in unendlich kurzer Zeit aus einer Grenzlage in die andere springen, weil die Laufgeschwindigkeit der Rudermaschine, also der erste Differentialquotient der Ruderlage, ebenfalls beschränkt ist. Andererseits wird beim plötzlichen Einschalten der Rudermaschine die volle Laufgeschwindigkeit nicht sofort, sondern erst allmählich erreicht werden können, da auch die Beschleunigung, also der zweite Differentialquotient der Ruderlage, Beschränkungen unterworfen ist. Durch derartige Überlegungen kommt man zu Aufgabenstellungen, bei denen nach dem Regelverlauf gefragt wird unter der Voraussetzung, daß die i.-Ableitung der Regelgröße einer Beschränkung der Form:

$$\left| x^{(i)} \right| \leq k \tag{13}$$

unterworfen ist. Auch in diesem Fall läßt sich zeigen, daß optimale Regelungen nur erhalten werden, wenn der volle Bereich dieses *i*.-Differentialquotienten wirklich ausgenutzt wird. Dann gilt für die Zeit zwischen zwei Schaltungen:

$$\begin{aligned} x^{(i)} &= \pm k \\ x^{(i-1)} &= \pm kt + x_0^{(i-1)} \\ &\;\;\vdots \\ x &= \frac{+kt^i}{-i!} + x_0^{(i-1)} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} + \ldots + x_0 \end{aligned} \tag{14}$$

Abb. 4 zeigt den Regelverlauf für den Fall $i = 2$.

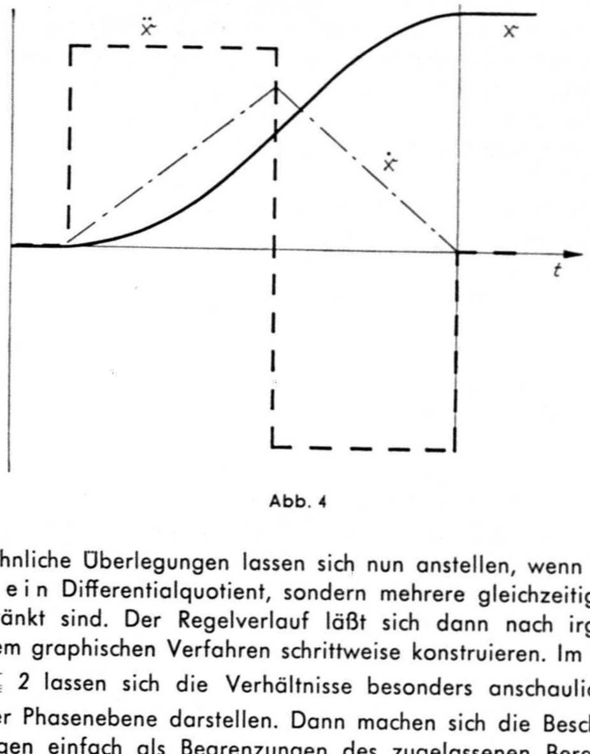


Abb. 4

Ähnliche Überlegungen lassen sich nun anstellen, wenn nicht nur e i n Differentialquotient, sondern mehrere gleichzeitig beschränkt sind. Der Regelverlauf läßt sich dann nach irgendeinem graphischen Verfahren schrittweise konstruieren. Im Falle $i \leq 2$ lassen sich die Verhältnisse besonders anschaulich in einer Phasenebene darstellen. Dann machen sich die Beschränkungen einfach als Begrenzungen des zugelassenen Bereiches in der Phasenebene bemerkbar.

*Feldbaum* [25] hat das Problem nun dahingehend verallgemeinert, daß er eine Begrenzung von der Form:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} c_i x^{(i)} \right| \leq k \tag{15}$$

voraussetzt. Durch diese Bedingung ist der zulässige Bereich im Raume der $x^{(i)}$ gegeben. Seine Grenzen werden aus (15) durch Einsetzen des Gleichheitszeichens erhalten. Auch hier lassen sich optimale Verhältnisse nur erreichen, wenn die Arbeitspunkte stets auf einer der beiden Grenzflächen des zugelassenen Bereiches liegen. Es kann gezeigt werden, daß die geometrische Gestalt dieser Hyperflächen maßgebend für den Aufbau eines Optimalreglers ist.

Das von Feldbaum in großer Allgemeinheit behandelte Problem führt in der Praxis insbesondere bei Systemen höherer Ordnung zu sehr umfangreichen Rechnungen. Daher hat S u n C z j a n [26] eine Vereinfachung dadurch zu erreichen versucht, daß er die charakteristischen Hyperflächen durch einfachere Flächen, z. B. durch Tangentialebenen annähert. Man kann auf diese Weise – ähnlich wie Silva – fast optimale Regler erhalten.

Bei den bisher erwähnten Untersuchungen sind die Beschränkungen stets den Zustandsgrößen, ihren Ableitungen oder gewissen Kombinationen von ihnen auferlegt worden. Es gibt jedoch noch andere Möglichkeiten: so können die Beschränkungen den Koeffizienten einer Differentialgleichung oder aber bestimmten „Steuergrößen" auferlegt werden. Beide Möglichkeiten sind untersucht worden. O s t r o v s k i j [27] betrachtet eine lineare Differentialgleichung von der Form

$$\sum_{i=0}^{n} c_i x^{(i)} = 0, \tag{16}$$

in der die Koeffizienten $c_i$ jeweils zwei konstante Werte:

$$c_i = a_i \text{ bzw. } c_i = b_i$$

annehmen können. Das eine Wertesystem entspricht einem schnell reagierenden, wenig gedämpften linearen System, während das andere Wertesystem eine besonders hohe Dämpfung ergibt. Das Problem besteht nun darin, den günstigsten Zeitpunkt zu finden, bei dem die Umschaltung von einem Koeffizientensystem zum anderen so erfolgt, daß der Regelvorgang nach einer Störung in kürzester Zeit zur Ruhe kommt.

L e t o v [28] ist eine interessante Weiterentwicklung dieser Idee zu verdanken. Er variiert nicht alle Koeffizienten seines Ausgangsgleichungssystems, sondern nur einen einzigen, z. B. die Aufschaltgröße des Stellgliedes. Sein Ausgangssystem hat die Form:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_{\nu=1}^{n} c_{i\nu} x_\nu + c_y y \quad (i = 1, \ldots, n) \\ \dot{y} &= \pm c_s x_1 \end{aligned} \tag{17}$$

Darin kann der Koeffizient $c_s$ die Werte $+k$ und $-k$ annehmen. Es läßt sich nun zeigen, daß durch Umschalten des Vorzeichens in einem geeignet ausgewählten Zeitpunkt eine Beruhigung des Regelverlaufes nach nur e i n e r Halbschwingung erreicht werden kann. Der Regelvorgang kommt dann schneller zur Ruhe, als bei demselben System mit festem Koeffizienten $c_s$, auch wenn es in optimaler Weise abgestimmt wurde. Durch das Umschalten kann allerdings die Stabilität für das umgeschaltete System verloren gehen; der Verfasser spricht deshalb von einem „bedingt stabilen System". Um die Instabilität nicht zur Auswirkung kommen zu lassen, muß der Umschaltzeitpunkt sehr sorgfältig durch ein recht kompliziertes Rechengerät ermittelt werden.

Die Formulierung und Behandlung des extremen Optimierungsproblems dürfte auf P o n t r j a g i n und seine Schüler [29] zurückgehen. Dabei wurde das Problem völlig geometrisiert und mit differentialgeometrischen Hilfsmitteln in verallgemeinerten Räumen behandelt. Gegeben sei ein Differentialgleichungssystem von der Form:

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{18}$$

Darin ist $x$ ein *n*-dimensionaler Zustandsvektor, während $u = u(x)$ ein *r*-dimensionaler Stellvektor („Steuervektor") ist, der in einem beschränkten Bereich des *r*-dimensionalen Raumes liegen soll. Gesucht wird ein solcher zeitlicher Verlauf $u = u(t)$, daß die Zustandsgröße x in kürzester Zeit von einem Punkt $x = x_1$ in einen Punkt $x = x_2$ übergeht und in diesem Punkt zur Ruhe kommt. Man kann diese Problemstellung als das verallgemeinerte klassische Problem der Brachistochrone bezeichnen, das darin besteht, die Form der Kurve zu bestimmen, die ein Massenpunkt durchlaufen muß, wenn er unter dem Einfluß des Schwerefeldes der Erde in kürzester Zeit von einem vorgegebenen Punkt zu einem anderen gelangen soll. Wie im Falle der Brachistochrone, so ist auch die hier formulierte Aufgabe ein

Variationsproblem, das mit den klassischen Methoden der Variationsrechnung behandelt werden kann. Es läßt sich zeigen, daß eine notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Optimums darin besteht, daß eine „Hamiltonsche Funktion" einen Extremwert annimmt.

Gamkrelidze [30] führt die Untersuchungen für ein spezielleres System weiter:

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{19}$$

Er beweist für stückweise stetige $u$ zwei Sätze:

1. Wenn es mehrere Wege vom Punkte $x_1$ zum Punkte $x^2$ gibt, dann existiert unter ihnen auch einer, für den die Durchlaufungszeit ein Minimum wird.
2. In linearen Systemen von der Form (19) ist der optimale Zustand niemals ein „Gleitzustand".

Dabei ist unter dem Gleitzustand ein spezieller Bewegungszustand in Relaissystemen zu verstehen, bei dem das Umspringen des Stellvektors $u$ von einem Grenzwert zum anderen in zitternder Form und mit so hoher Frequenz erfolgt, daß sich das Zittern praktisch nicht mehr auf die Zustandsgröße $x$ auswirkt.

Alle hier erwähnten Optimierungsverfahren benötigen zur praktischen Verwirklichung einen Rechner für die Schaltzeitpunkte, an den außerordentlich hohe Anforderungen gestellt werden müssen. Neben einer verzögerungsfreien Messung der jeweiligen Zustandsgrößen und ihrer Differentialquotienten müssen Berechnungen von Haupt- und Unterdeterminanten, Additionen und Quotientenbildungen ohne wesentliche Verzögerung durchgeführt werden, damit auch die Schaltung nach Erreichen eines für den Schaltzeitpunkt kennzeichnenden Wertes der Schaltfunktion ohne Verzögerung durchgeführt werden kann. Es ist nicht bekannt, ob die praktische Lösung dieses Problems für Systeme von höherer als zweiter Ordnung gelungen ist.

Es sei abschließend bemerkt, daß mit den hier besprochenen optimal abgestimmten Reglern nicht die sogenannten Optimalwertregler oder Extremalwertregler verwechselt werden dürfen. Bei diesen handelt es sich darum, eine von den Zustandsgrößen des Systems abhängende, aber nicht unmittelbar meßbare Größe zu einem Extremwert zu machen. Zum Beispiel wird man bei der Regelung einer Dampfkesselanlage die Zustandsgrößen so einzustellen suchen, daß der Wirkungsgrad des Gesamtsystems ein Maximum ist. Der Wirkungsgrad selbst hängt aber vom Dampfdruck, von der Dampftemperatur, der Wassertemperatur, dem Dampfdurchsatz, dem Heizwert und zahlreichen anderen Größen ab. Ein Regler, der den Wirkungsgrad zum Maximum macht, muß nun selbsttätig von einem vorgegebenen Arbeitspunkt ausgehend die benachbarten Arbeitspunkte abtasten und aus den dafür gemessenen Veränderungen der Zustandsgrößen den Gradienten des Wirkungsgrades errechnen. Er muß dann die Verstellung der Stellglieder so vornehmen, daß der Arbeitspunkt in Richtung des stärksten Anwachsens des Wirkungsgrades verschoben wird. Durch Wiederholung dieses Prozesses tastet sich der Regler dann an den Extremalwert heran.

### 5. Näherungsmethoden

Bisher wurde ausschließlich von Methoden gesprochen, die eine exakte Berechnung des Regelungsverlaufes gestatten. Es wäre allzu optimistisch, wollte man behaupten, daß diese Methoden schon allgemeinen Eingang in die Regelungstheorie und die Regelungstechnik gefunden hätten. Ihre praktische Anwendung ist zum Teil nur mit einem solchen Aufwand an Rechenarbeit möglich, daß der Wunsch nach vielseitig anwendbaren Näherungslösungen nicht verstummt, sondern eher noch stärker geworden ist. Dabei wird hier nicht an die näherungsweise numerische oder graphische Lösung der Regelungsdifferentialgleichungen, sondern an solche Näherungsmethoden gedacht, die auf irgendeine Weise allgemeinere Aussagen zu machen gestatten.

Auf den verschiedensten Gebieten der Physik und Technik (Astronomie, Mechanik, Elektrotechnik, Regelkunde) sind teilweise unabhängig voneinander Methoden entwickelt worden, deren innere Verwandtschaft man erst heute von einem allgemeineren Standpunkt aus übersehen kann. Fast immer wird dabei der Versuch gemacht, von bekannten linearen Problemen ausgehend, einen Vorstoß in den nichtlinearen Bereich zu unternehmen. Eine der Grundannahmen, die sich in fast allen Näherungsverfahren wiederfindet, besteht in der Voraussetzung, daß periodische Schwingungen im Regelkreis nicht allzu viel vom harmonischen Verlauf abweichen sollen. Die verschiedenen Verfahren unterscheiden sich jedoch in der spezifischen Art der Ansätze, die der weiteren Rechnung zugrunde gelegt werden. Man hat nun erkannt [31], daß die wichtigsten der bekannt gewordenen Näherungsverfahren trotz sehr verschiedenartiger Ansätze im ersten Näherungsschritt äquivalent sind.

Die kennzeichnenden Ansätze einiger Verfahren sollen im folgenden besprochen werden:

a) Bei der Methode der „Harmonischen Balance", die im angelsächsischen Schrifttum als Verfahren der „Beschreibungsfunktion" bezeichnet wird, wird die als harmonisch schwingend angenommene Zustandsgröße $x = A \sin \omega t$ in die nichtlineare Funktion eingesetzt und diese dann in eine Fourierreihe zerlegt. Ist $f(x)$ eine ungerade, eindeutige Funktion, so hat man:

$$y = f(x) = f(A \sin \omega t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin \nu\omega t \approx a_1 \sin \omega t = \frac{a_1}{A} x = c(A)x \tag{20}$$

$$y \approx c(A)x \text{ mit } c(A) = \frac{1}{\pi A} \int_{-\pi}^{+\pi} f(A \sin \omega t) \sin \omega t \, d(\omega t) \quad . \tag{21}$$

Krylov und Bogoljubov [32] ist der systematische Ausbau dieses Verfahrens – auch für kompliziertere Fälle – zu verdanken. Es mag jedoch an dieser Stelle interessieren, daß G. Hamel [33] bereits im Jahre 1922 dasselbe Verfahren zur Lösung eines speziellen Problems, der Berechnung eines Schwerependels bei endlichen Amplituden verwendet hat.

b) Bei dem Verfahren der Fehlertheorie wird die Differenz zwischen dem wirklichen Wert von $y = f(A \sin \omega t)$ und ihrem Näherungswert $\tilde{y} = Y \sin \omega t$ als Fehler eingeführt. Die Bedingung dafür, daß der mittlere quadratische Fehler über eine volle Periode der Schwingung genommen ein Minimum ist, führt dann wieder zur Beziehung (21).

c) Beim Verfahren der Energiebalance [34] wird das nichtlineare System durch ein lineares so angenähert, daß der Energieinhalt von linearem und nichtlinearem System für jede Amplitude gleich groß wird. Daraus ergibt sich für das lineare Ersatzsystem ein amplitudenabhängiger Steigungsfaktor $c(A)$ der Kennlinie, der aus (21) bestimmt werden kann.

d) Die von Van der Pol [35] bei der Berechnung eines Röhrengenerators verwendete Methode der Variation der Konstanten geht ebenfalls davon aus, daß die Abweichungen vom harmonischen Verlauf klein sind. Bei dem Ansatz:

$$x = A(t) \sin [\omega t + \varphi(t)] \tag{22}$$

darf man daher annehmen, daß die Änderung der Amplitude sowie der Phase langsam gegenüber der Schwingung selbst erfolgt ($\dot{A} \ll A\omega$ bzw. $\dot{\varphi} \ll \omega$). Bildet man nun die Mittelwerte von $\dot{A}$ bzw. $\dot{\varphi}$ über eine volle Periode, so folgen daraus Bedingungen, die den schon genannten vollkommen entsprechen.

e) Poincaré [36] hat zur Lösung von nichtlinearen Systemen den Störungsansatz:

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i x_i$$

verwendet, bei dem $\mu$ ein kleiner Parameter ist. Unter geeigneten Bedingungen erhält man für die erste Näherung $x = x_0$ eine harmonische Schwingung. Setzt man diese in die Bestimmungsgleichungen für die zweite Näherung ein, so ergibt die

Forderung nach Periodizität eine Beziehung, die mit (21) äquivalent ist.

f) Bei der stroboskopischen Methode von Minorski [37] werden die Bildkurven eines Systems aus der Phasenebene in eine Stroboskopebene transformiert. Eine periodische Schwingung des Systems macht sich in der Stroboskopebene als ein singulärer Punkt bemerkbar. Die mathematische Bedingung für die Existenz einer Singularität erweist sich als äquivalent mit den früher genannten Forderungen.

g) Klotter [38] hat darauf hingewiesen, daß die Ritz-Galerkinsche Variationsmethode mit Vorteil auch zur Lösung nichtlinearer Schwingungsprobleme verwendet werden kann. Verwendet man als Approximationsfunktionen im Ritzschen Reihenansatz trigonometrische Funktionen und berücksichtigt nur die ersten Glieder, dann führt auch diese Methode zu Bedingungen von der Form (21).

Die Äquivalenz dieser Verfahren im ersten Näherungsschritt schließt nicht aus, daß gewisse Unterschiede in der Anwendungsart und im Anwendungsbereich vorhanden sind. Am anpassungsfähigsten scheint das Variationsverfahren nach Ritz und Galerkin zu sein, weil es weitere Approximationsschritte ermöglicht und außerdem als Approximationsfunktionen beliebige, möglichst orthogonale Funktionensysteme verwendet werden können.

Die bei der praktischen Anwendung der genannten Näherungsverfahren notwendige Integraltransformation (21) wird in neueren Lehrbüchern der Regelungstheorie vielfach bereits in Tabellen für die wichtigsten nichtlinearen Funktionen $f(x)$ angegeben. Eine sehr brauchbare Bestimmungsmethode für $c(A)$, die von einer gegebenen Kennlinie $f(x)$ ausgeht, hat Cypkin [39] angegeben.

Hat man die Transformation durchgeführt, so lassen sich zur weiteren Untersuchung des Regelverhaltens im allgemeinen die bei linearen Systemen üblichen Verfahren anwenden, um Aussagen entweder über die Existenz von Dauerschwingungen oder die Stabilität der Lösungen der nichtlinearen Regelungsgleichungen zu finden. Wenn sich dieses Vorgehen auch bei Anwendung auf nicht ausgeartete Systeme außerordentlich bewährt hat, so muß doch zugegeben werden, daß die Zuverlässigkeit der erhaltenen Aussagen mangelhaft sein kann. Es ist möglich, daß Dauerschwingungen ausgerechnet werden, die in Wirklichkeit nicht vorhanden sind, und umgekehrt kann fälschlicherweise ein dauerschwingungsfreies Verhalten vorgetäuscht werden. Man hat daher nach Kriterien gesucht, die zu entscheiden gestatten, wann die Anwendung der Näherungsverfahren erlaubt ist. Versuche in dieser Richtung sind von verschiedenen Autoren, u. a. auch von Popov [40] unternommen worden. Er kommt durch Verschärfung der bei linearen Systemen üblichen Kriterien zu Stabilitätsbedingungen, die für beliebige Amplitudenbereiche des nichtlinearen Systems gelten. An sechs sehr verschieden aufgebauten Beispielen zeigt er, daß die erhaltenen Stabilitätsbedingungen genau mit den hinreichenden Bedingungen übereinstimmen, die nach der Ljapunovschen Methode erhalten werden. Es erscheint nicht ausgeschlossen, daß durch Verfolgen dieses Weges die genannten Näherungsverfahren in ähnlicher Weise durch die exakte Ljapunovsche Stabilitätstheorie gestützt werden könnten, wie dies bei der Methode der kleinen Schwingungen möglich gewesen ist.

Andererseits hat man versucht, Abschätzungen für die Fehler der Näherungsmethoden zu finden. Trotz zahlreicher Bemühungen in dieser Richtung muß festgestellt werden, daß die bisherigen Ergebnisse nicht ermutigend sind. Das liegt zum großen Teil an der Tatsache, daß ja nicht die Fehler der Zustandsgrößen selbst, sondern die Fehler von sekundären Größen, wie z. B. Amplitude und Frequenz von Dauerschwingungen gesucht werden. Sagirow [41] hat für Systeme mit einer nichtlinearen Funktion ein Verfahren zur Abschätzung angegeben, *jedoch scheinen die Ergebnisse* bisher nur für Differentialgleichungen bis zur dritten Ordnung praktisch verwertbar zu sein.

Glatenok [42] hat sich die Aufgabe gestellt, die Bedingungen aufzusuchen, denen die nichtlineare Funktion eines Systems zweiter Ordnung genügen muß, damit aus der Existenz einer näherungsweise berechneten periodischen Lösung auch die Existenz einer periodischen Lösung für das wirkliche System folgt. Die sorgfältigen Untersuchungen zeigen, daß die Abschätzungen so kompliziert und schwierig sind, daß es zur Zeit hoffnungslos erscheint, sie in ähnlicher Weise auch auf Systeme höherer Ordnung zu übertragen. Man darf daher wohl feststellen, daß das Problem der Fehlerabschätzung noch nicht in einer den Praktiker befriedigenden Weise gelöst ist.

## 6. Erweiterte und neue Begriffe

Das tiefere Eindringen in die Natur der nichtlinearen Erscheinungen zeigt immer mehr, daß das bisher zur Beschreibung des Verhaltens linearer Systeme verwendete Begriffssystem nicht ausreicht, alle in nichtlinearen Systemen möglichen Erscheinungen befriedigend zu erfassen. Schon in der Theorie der nichtlinearen Schwingungen sind Begriffe notwendig, die die lineare Schwingungstheorie nicht kennt, z. B. das Kippen oder Mitziehen. In der nichtlinearen Regelungstheorie sind es insbesondere Stabilitätsbegriffe, die eine Erweiterung erfahren mußten. Wenn man das Verhalten eines Systems in Abhängigkeit von der Größe eines gerade interessierenden Parameters darstellt, so kann es vorkommen, daß für bestimmte Werte des Parameters nicht nur quantitative, sondern auch qualitative Änderungen des Verhaltens existieren können. Man hat den zugehörigen kritischen Wert des Parameters als Verzweigungspunkt bezeichnet. Eine von Minorsky [43] vorgenommene Klassifizierung der Verzweigungspunkte scheint besonders gut geeignet zu sein, die verschiedenen Verhaltensweisen nichtlinearer Systeme zu beleuchten. In den Abb. 5–7 sind die Amplituden $A$ über einem

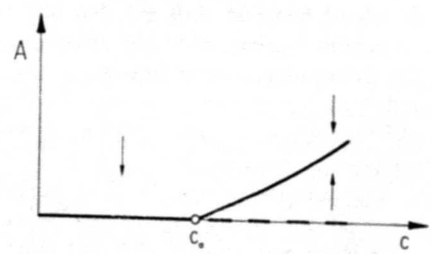

Abb. 5

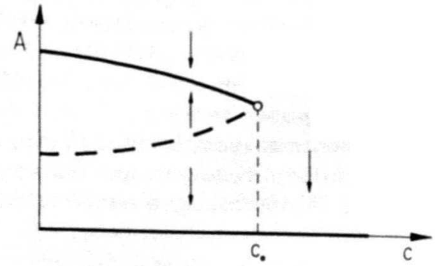

Abb. 6

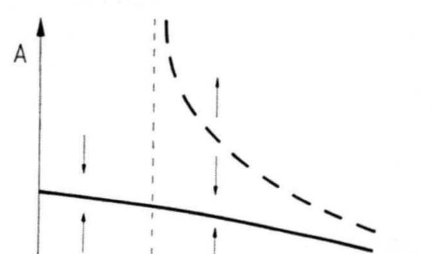

Abb. 7

Parameter c aufgetragen. Dabei wurden stabile stationäre Schwingungen ausgezogen dargestellt, die instabilen Schwingungen dagegen gestrichelt. In allen drei Fällen ändert sich das Verhalten des Systems bei den Verzweigungspunkten $c = c_0$. Im Bild 5 wächst mit Vergrößerung von c aus einer stabilen Gleichgewichtslage ein stabiler Grenzzyklus heraus und macht dabei die Gleichgewichtslage labil. Im Bild 6 wachsen mit $c \rightarrow c_0$ ein stabiler und ein labiler Grenzzyklus zusammen und heben sich gegenseitig auf. Schließlich entsteht im Falle von Bild 7 für $c > c_0$ ein neuer instabiler Grenzzyklus, dessen Amplitudenkurve aus dem Unendlichen kommt. Zu den drei gezeichneten Bildern gibt es reziproke, bei denen stabile und instabile Amplitudenkurven vertauscht sind. Die eingezeichneten Pfeile sollen die Tendenz der Amplitudenänderungen von instationären Schwingungen andeuten.

Zu einer Beschreibung des Verhaltens von Systemen, für die die Skizzen der Abb. 5–7 kennzeichnend sind, werden nun Begriffe benötigt wie z. B. „Stabilität im Kleinen", „Stabilität im Großen" und „Stabilität im Ganzen". Im Fall von Bild 7 wird außerdem noch der in der letzten Zeit mehrfach erwähnte Begriff der Gefährlichkeit oder Ungefährlichkeit einer Stabilitätsgrenze eine Rolle spielen. Berücksichtigt man weiterhin, daß gelegentlich auch von asymptotischer Stabilität, von starker, schwacher, vorübergehender oder totaler Stabilität gesprochen wird, – alles Begriffe, deren Bedeutungsinhalt genau abgegrenzt werden kann–, so erkennt man, daß hier wesentliche Erweiterungen unseres Begriffssystems vorgenommen wurden. Von den Gefährlichkeitsbegriffen darf man sagen, daß sie sich zur Stabilität etwa so verhalten, wie die Stabilität zum Begriff des Gleichgewichts; denn wie man die Stabilität eines Systems erst erkennen kann, wenn das Gleichgewicht gestört wird, so lassen sich auch Gefährlichkeit bzw. Ungefährlichkeit der Stabilitätsgrenzen erst erkennen, wenn man diese Grenzen überschreitet.

Diese Beispiele mögen zeigen, daß die Dinge noch sehr im Fluß sind. Man wird damit rechnen können, daß auch künftig nicht nur Präzisierungen von bereits vorhandenen Begriffen vorkommen werden, sondern daß daneben auch die Schaffung neuer Begriffe notwendig wird, um die vielseitigen Erscheinungen in nichtlinearen Regelkreisen zu erfassen und zu beschreiben. Immerhin darf man hoffen, daß in nicht allzu ferner Zeit ein wenigstens von der phänomenologischen Seite her einigermaßen gefestigtes, wenn auch nicht abgeschlossenes Lehrgebäude existieren wird, das unser Wissen von den nichtlinearen Schwingungen und den nichtlinearen Regelungen gleichermaßen umfaßt. Dann aber wird man allmählich daran denken können, das kennzeichnende Attribut „nichtlinear" etwas weniger stark zu betonen als es jetzt häufig geschieht. Es soll ja, wenn von nichtlinearen Problemen gesprochen wird, nicht ein Anspruch auf Absplitterung eines besonderen Wissensgebietes proklamiert werden, vielmehr handelt es sich nur um eine Betrachtung unserer physikalisch-technischen Probleme unter verallgemeinerten Aspekten.

### 7. SCHRIFTTUM


[1] W. Hahn „Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov", Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1959.
[2] I. G. Malkin „Theorie der Stabilität einer Bewegung", deutsche Übersetzung, München 1959.
[3] M. A. Ajzerman, F. R. Gantmacher, Prikladnaja Matematika i Mechanika, 21, 1957, 658—669.
[4] W. Hahn, Math. Annalen, 136, 1958, 430—441.
[5] S. Lehnigk, DFL-Bericht Nr. 106, Braunschweig 1958.
[6] A. I. Lurje „Einige nichtlineare Probleme aus der Theorie der selbsttätigen Regelungen", deutsche Übersetzung, Berlin 1957.
[7] W. A. Jakubovič, Doklady akademii nauk, 117, 1957, 44—46.
[8] A. K. Bedeljbajev, Izvestija akademii nauk kazachskoj SSR, 6 (10), 1957, 51—59.
[9] W. Hahn, Z. Angew. Math. Mech., 37, 1957, 224—227.
[10] H. Thoma „Theorie der Tirrillregler", Berlin 1914.
[11] I. Flügge-Lotz „Discontinuous automatic control" Princeton, 1953.
[12] I. Flügge-Lotz und K. Klotter, Z. Angew. Math. Mech. 28, 1948, 318—337.
[13] H. Bilharz, Luftfahrtforschung 18, 1941, 317—326 und Z. Angew. Math. Mech. 22, 1942, 206—215.
[14] J. André und P. Seibert, Arch. Math. 7, 1956, 148—164.
[15] H. J. Behnke, „Regelungstechnik, Moderne Theorien und ihre Verwendbarkeit", Heidelberger Kongreß 1956, 216—220.
[16] J. Z. Cypkin: „Theorie der Relaissysteme der automatischen Regelung", deutsche Übersetzung, München 1958.
[17] M. A. Ajzerman und F. R. Gantmacher, Avtomatika i Telemechanika, 18, 1957, 97—110 und 1017—1028.
[18] A. M. Hopkin, Trans. AIEE, 70, I, 1951, 631—639.
[19] J. B. Lewis, Trans. AIEE, 71, II, 449—453.
[20] I. W. Schwartz, Trans. AIEE, 71, II, 401—405.
[21] H. Matuschka, Heidelberger Regelungskongreß 1956, 172—182.
[22] A. J. Lerner, Avtomatika i Telemechanika, 13, 1952, 133—144 und 429—444.
[23] L. M. Silva, „Nonlinear Optimization of Relay Servomechanismus" University of California, 1953.
[24] L. M. Silva, Trans. ASME, 1955, 1317—1323.
[25] A. A. Fel'dbaum, Avtomatika i Telemechanika, 14, 1953, 712—728.
[26] Sun Czjan', Avtomatika i Telemechanika, 20, 1959, 273—288.
[27] G. M. Ostrovskij, Avtomatika i Telemechanika, 19, 1958, 208—216.
[28] A. M. Letov, Avtomatika i Telemechanika, 18, 1957, 601—614.
[29] V. G. Boltjanskij, R. V. Gamkrelidze, L. S. Pontrjagin, Doklady akademii nauk SSSR, 110, 1956, 7—10.
[30] R. V. Gamkrelidze, Izvestija akademii nauk SSSR, 22, 1958, 449—474.
[31] K. Magnus, Z. Angew. Math. Mech., 37, 1957, 471—485.
[32] N. M. Krylov, N. N. Bogoljubov „Einführung in die nichtlineare Mechanik", Kiew 1937, englische Übersetzung Princeton 1947.
[33] G. Hamel, Math. Ann. 86, 1922, 1—13.
[34] J. P. Den Hartog „Mechanische Schwingungen", Kap. VIII, Berlin 1952.
[35] B. Van der Pol, Phil. Mag. 7, 2, 1926, 978.
[36] H. Poincaré „Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste" Paris 1899.
[37] M. N. Minorsky, Bulletin S. F. M. Nr. 13, 1953.
[38] K. Klotter, Proc. First U. S. Nat. Congress of appl. Mech., Chikago, 1951, 125—131.
[39] J. Z. Cypkin, Regelungstechnik, 6, 1958, 285—287.
[40] E. P. Popov, Izvestija akademii nauk SSSR, OTN, 1959, 53—64.
[41] P. Sagirow, Z. Angew. Math. Mech., 40, 1960
[42] I. V. Glatenok, Avtomatika i Telemechanika, 18, 1957, 1132—1135.
[43] M. N. Minorsky, Le Journal de Physique et le Radium, 18, 1957, 121 A—130 A.


# Stimmen aus der Wirtschaft


HERBERT KREJCI, WIEN [1]


## Wissenschaft im Dienste der wirtschaftlichen Integration

Der größere europäische Markt wird in den Dispositionen der österreichischen Industrieunternehmen schon seit langem als feste Größe angesetzt. Die österreichische Industrie geht diesem Tag keineswegs, wie oft oberflächlich behauptet wird, ungerüstet entgegen. Eine vor einigen Monaten von der Vereinigung Österreichischer Industrieller angestellte Umfrage bei einer Reihe von Industrieunternehmen aller Größen bestätigte dies sehr eindrucksvoll. Schon als sich die Konturen der Bildung der Europäischen Wirtschaftsgemeinschaft der Sechs abzeichneten, setzte in der Mehrzahl der österreichischen Industrieunternehmen ein seitdem nicht mehr zum Stillstand gekommener Prozeß der unternehmerischen Gewissenserforschung, der Standortbestimmung und der Abwägung der Zukunftschancen ein. Dieser Denkarbeit folgten bald die praktischen Maßnahmen. Wer heute in der Industrie herumhört, wird immer wieder mit Genugtuung feststellen, daß man sich der Größe der Gefahren wie der Chancen durchaus bewußt ist. Im allgemeinen überwiegt ein optimistischer Unterton, da die Industrie in den letzten Jahrzehnten mehrfach Umstellungen meistern mußte. Im Vordergrund steht die Rationalisierung: der Produktionsprozesse ebenso wie des innerbetrieblichen Transportes und der Verwaltung, vor allem aber der Produktionsprogramme und Typenzahlen. Programm- und Typenbereinigung wird groß geschrieben. In diesem Zusammenhang bahnt sich auch eine fruchtbare Zusammenarbeit zwischen Industriebetrieben, sowohl innerhalb Österreichs als auch mit Industrieunternehmungen des Auslandes, an.

Aber nicht allein die Großbetriebe der österreichischen In-

[1] Vereinigung österreichischer Industrieller