

von innen wirkt. Er kann etwa durch einen konzentrischen halbkugelförmigen Kern ausgeübt werden. Für idealplastischen Werkstoff ($Y = \text{const.}$) ergibt sich der Einziehdruck p zu

$$p = -Y \cdot \ln \sin \mu_0.$$

Die Belastung K des Kernes darf zwischen wohlbestimmten Schranken variieren.

Das beschriebene Geradenbüschelfeld scheint das einzige zu sein, für das eine der beiden Charakteristikenscharen aus Geraden besteht. Man muß i. a. mit weniger einfachen Konstruktionsmethoden als in der Gleitlinientheorie rechnen. Allgemeine geometrische Eigenschaften der Felder waren — abgesehen von der Orthogonalität — bisher nicht zu erkennen. Erschwerend wirkt sich die prinzipielle Unsymmetrie in λ und μ aus.

Literatur

- [1] R. HILL, The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford 1950, Clarendon Press.
- [2] D. D. IVLEV, J. Appl. Math. Mech. 22 (1958), p. 943—951; Soviet Physics Dokl. 123(3) (1958), p. 1294—1296; Izv. Akad. Nauk SSSR Otd. Techn. Nauk. Meh. Mašinostr. 1959, no. 1, p. 132—133.
- [3] W. JOHNSON and H. KUDO, Int. J. Mech. Sciences 1 (1960), p. 175—191.
- [4] D. H. PARSONS, Proc. London Math. Soc., III. Ser., 6 (1956), p. 610—625; J. London Math. Soc. 32 (1957), p. 233.
- [5] R. T. SHIELD, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 233 (1955), p. 267—287.
- [6] D. R. BLAND, J. Mech. Phys. Solids 6 (1957), p. 71—78.

Anschrift: Dr. H. LIPPMANN, Kleinburgwedel b. Hannover, Marktstraße 15A

Der selbsterregte und der parametererregte Schaukelschwinger

Von KURT MAGNUS

Die Bewegungen des ungedämpften Fadenpendels genügen der Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L} \sin \varphi = 0 \dots \dots \dots (1).$$

Mit $L = L(t)$ wird (1) zur Gleichung eines rheonomen Systems, in dem bei periodischem $L(t)$ für bestimmte „Parameterfrequenzen“ Ω Schwingungen entstehen können, die man als parametererregt bezeichnet hat. Als Musterbeispiel wird in diesem Zusammenhang meist die Schaukel erwähnt (s. z. B. [1], [2], [3]), deren Schwingungen durch periodische Verlagerungen des Schwerpunktes angeregt und unterhalten werden. Der Schaukelnde muß durch geeignete Bewegungen den Schwerpunkt des Systems während des Durchganges durch die tiefste Lage etwas anheben (d. h. die Fadenlänge L verkleinern) und in der Nähe der Umkehrpunkte wieder senken (d. h. die Fadenlänge L vergrößern). Die Fadenlänge L hängt dabei vom Schwingungszustand ab, sie ist eine Funktion der Auslenkung φ und der Schwingungsgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$, nicht aber der Zeit t . Die Zeitabhängigkeit kommt erst sekundär über $\varphi = \varphi(t)$ herein. Mit $L = L(\varphi, \dot{\varphi})$ nimmt aber Gl. (1) die Gestalt

$$\ddot{\varphi} + f(\varphi, \dot{\varphi}) = 0 \dots \dots \dots (2)$$

an. Dies ist die allgemeine Gleichung eines autonomen Schwingers, der im Falle der Schaukel selbsterregungsfähig ist. Parametererregte Schwingungen sind demgegenüber heteronom, weil die Parameteränderungen nicht vom Schwingungszustand abhängen.

Ein vereinfachtes Schaukelmodell, bei dem die Fadenlänge bereichsweise konstant ist, wurde z. B. in [2], [3] näherungsweise berechnet. Es lassen sich jedoch sowohl für den selbsterregten als auch für den parametererregten Schwinger exakte Lösungen finden. Hierzu sollen als Beispiele a) das Amplitudengesetz für die selbsterregte Schaukel und b) die periodischen Bewegungen der parametererregten Schaukel erwähnt werden.

a) Es sei

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{L_1 + L_2}{2} - \frac{L_1 - L_2}{2} \text{sgn } \varphi \text{sgn } \dot{\varphi} \dots \dots \dots (3).$$

Das entspricht dem in Bild 1 gezeichneten Schwerpunktsweg: das Heben erfolgt momentan beim Durchgang durch den tiefsten Punkt, entsprechend das Senken in den Umkehrpunkten. Die Halbschwingung kann in die Bereiche „1“ und „2“ zerlegt werden, für die L jeweils konstant

ist. Gesucht wird der Zusammenhang zwischen dem Anfangswert φ_{10} für den ersten Bereich und dem Endwert φ_{20} des zweiten Bereiches. Nach dem Energiesatz gilt

$$\dot{\varphi}_{1m}^2 = \frac{2g}{L_1} (1 - \cos \varphi_{10}); \quad \dot{\varphi}_{2m}^2 = \frac{2g}{L_2} (1 - \cos \varphi_{20}) \dots \dots \dots (4).$$

Der Zusammenhang zwischen den beiden Maximalgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_{1m}$ und $\dot{\varphi}_{2m}$ (im tiefsten Punkt) ist aus dem Drallsatz zu erkennen: durch das momentane Anheben im tiefsten Punkt wird der Drall des Systems bezüglich des Aufhängepunktes nicht geändert, so daß gilt:

$$L_1^2 \dot{\varphi}_{1m} = L_2^2 \dot{\varphi}_{2m} \dots \dots \dots (5).$$

Aus (4) und (5) folgt:

$$L_1^3 (1 - \cos \varphi_{10}) = L_2^3 (1 - \cos \varphi_{20}) \dots \dots \dots (6).$$

Diese Formel kann zu einer Rekursionsformel erweitert werden, da sie sinngemäß für jede weitere Halbschwingung gilt. Man bekommt nach $n - 1$ Halbschwingungen:

$$\cos \varphi_{n0} = 1 - \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^{3(n-1)} (1 - \cos \varphi_{10}) \dots \dots \dots (7).$$

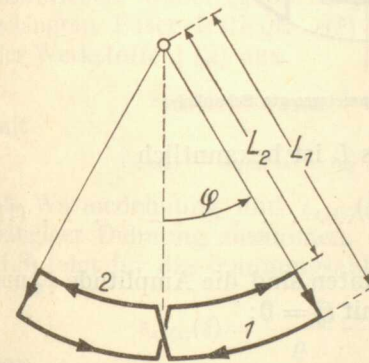


Bild 1. Schwerpunktsweg bei einem vereinfachten Schaukelmodell

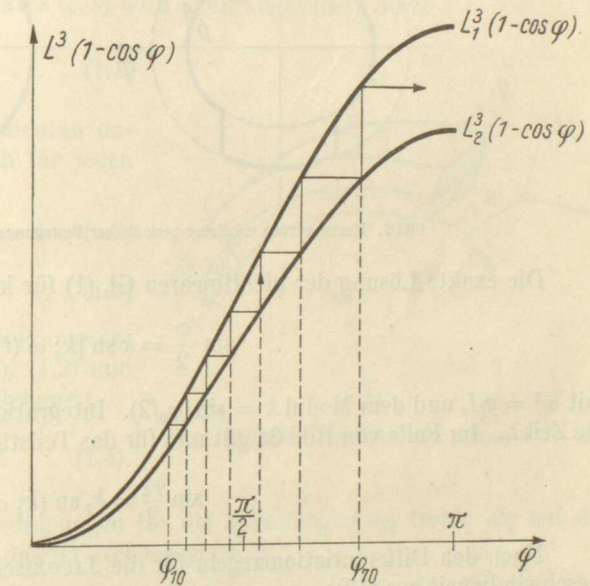


Bild 2. Bestimmung der Umkehramplituden für die selbsterregte Schaukel

Am einfachsten läßt sich die Folge der Umkehramplituden graphisch bestimmen, wie es in Bild 2 dargestellt ist: ausgehend von einer Anfangsauslenkung φ_{10} hat man die zwischen den Kurven $L_1^3 (1 - \cos \varphi)$ und $L_2^3 (1 - \cos \varphi)$ aufsteigende Treppenkurve zu zeichnen. Ihre Sprungabzissen ergeben die Umkehramplituden.

Ist die zur Anfangsauslenkung φ_{10} gehörende potentielle Energie des Systems gleich E_{10} , so findet man leicht für den Energiezuwachs während der ersten Halbschwingung:

$$E = \frac{(L_1 - L_2)(L_1^2 + L_1 L_2 + L_2^2)}{L_2^3} E_{10} = c E_{10} \dots \dots \dots (8)$$

mit der nur noch von den beiden Werten der Pendellänge abhängigen Konstanten c . Da (8) wiederum sinngemäß für alle weiteren Halbschwingungen gilt, erhält man für die Energie nach n Halbschwingungen:

$$E_{n0} = E_{10} (1 + c)^{n-1} \dots \dots \dots (9).$$

Die Energie wächst also in geometrischer Progression mit der Zahl der Halbschwingungen.

b) Es sei jetzt $L(t)$ eine zwischen den Werten L_1 und L_2 periodisch wechselnde Mäanderfunktion mit der vorgegebenen Periodenzeit T_p . Wir wollen periodische Lösungen der Gl. (1) suchen. Da hierfür der Energieinhalt des Systems für alle Zeitpunkte, die um den Betrag T_p auseinanderliegen, konstant bleibt, müssen sich Energiezufuhr durch Heben und Energieverlust durch Senken für eine Periode aufheben. Das ist sicher der Fall, wenn das Heben und Senken an Stellen geschieht, an denen jeweils $\cos \varphi$ (potentielle Energie) bzw. $\dot{\varphi}^2$ (kinetische Energie) dieselben Werte haben. Außerdem müssen die Zeitpunkte für Heben und Senken um $T_p/2$ auseinanderliegen. Die Erfüllung dieser Forderungen hat eine gewisse Symmetrie der zugehörigen

Phasenkurven in der $\varphi, \dot{\varphi}$ -Ebene zur Folge. Zwei von den zahlreichen Möglichkeiten sind in Bild 3 skizziert. Bei konstantem L treten periodische Schwingungen auf, deren Phasenkurven ellipsenähnliche Gestalt haben. Sprunghafte Änderungen von L bedeuten ein Springen von einer Phasenkurve zu einer anderen, wobei der Abszissenwert beibehalten wird, während für die Größe des Ordinaten Sprunges Gl. (5) gilt. Wegen der Symmetrie der Kurven genügt es, den Verlauf in einem Quadranten zu untersuchen. Die Teilstücke AB und CD werden jeweils in den Zeiten $T_p/4$ durchlaufen; der Sprung BC erfolgt momentan. Aus den Übergangsbedingungen an der Sprungstelle

$$\varphi_B = \varphi_C \quad \text{und} \quad L_2^2 \dot{\varphi}_B = L_1^2 \dot{\varphi}_C \quad \dots \quad (10)$$

läßt sich dann die zu vorgegebener Parameterzeit T_p gehörende Amplitude der Schwingung errechnen.

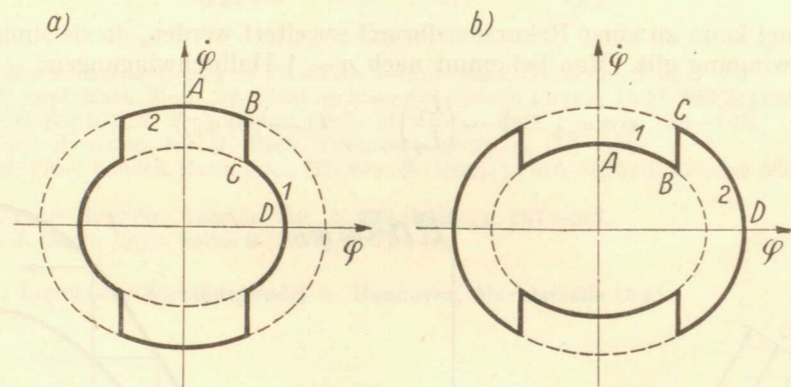


Bild 3. Phasenkurven möglicher periodischer Bewegungen für die parameterrregte Schaukel

Die exakte Lösung der nichtlinearen Gl. (1) für konstantes L ist bekanntlich

$$\sin \frac{\varphi}{2} = k \operatorname{sn} [k; \omega (t - t_0)] \quad \dots \quad (11)$$

mit $\omega^2 = g/L$ und dem Modul $k = \sin(\varphi_0/2)$. Integrationskonstanten sind die Amplitude φ_0 und die Zeit t_0 . Im Falle von Bild 3a gilt nun für das Teilstück AB mit $t_0 = 0$:

$$\sin \frac{\varphi_2}{2} = k_2 \operatorname{sn} (k; \omega_2 t) \quad \dots \quad (12)$$

Nach den Differentiationsregeln für die JACOBI'schen elliptischen Funktionen folgt für die Geschwindigkeit aus (12):

$$\dot{\varphi}_2 = 2 \omega_2 k_2 \operatorname{cn} (k; \omega_2 t) \quad \dots \quad (13)$$

Für das Teilstück CD setzt man $\omega_1 t_0 = -K(k_1)$ mit dem vollständigen elliptischen Integral erster Gattung $K(k_1)$ und bekommt so:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{\varphi_1}{2} &= k_1 \operatorname{sn} \left[k_1; \omega_1 \left(t + \frac{K(k_1)}{\omega_1} \right) \right], \\ \dot{\varphi}_1 &= 2 \omega_1 k_1 \operatorname{cn} \left[k_1; \omega_1 \left(t + \frac{K(k_1)}{\omega_1} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (14)$$

Mit Einsetzen von $t = T_p/4$ in (12) und (13), sowie $t = -T_p/4$ in (14) erhält man nun aus den Übergangsbedingungen (10) zwei transzendente Gleichungen, aus denen k_1 und k_2 und damit die beiden unbekannt Amplituden φ_{10} und φ_{20} errechnet werden können. Im Falle 3a ist φ_{10} , im Falle 3b φ_{20} die interessierende Amplitude des Schwingungsvorganges. Durch Variieren von T_p und Ausrechnen der dazu gehörenden φ_0 -Werte können die zu periodischen Lösungen gehörenden Wertepaare T_p, φ_0 bestimmt, und damit auch die Grenzen zwischen stabilen und instabilen Lösungen des parameterrregten Schaukelschwingers exakt berechnet werden. Näheres s. [4]).

Literatur

- [1] I. P. DEN HARTOG-MESMER, Mechanische Schwingungen, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1952, Springer-Verlag, Kap. VIII.
- [2] S. P. STRELKOV, Einführung in die Theorie der Schwingungen (russisch), Moskau/Leningrad 1951, Kap. 7.
- [3] K. F. TEODORČIK, Selbstschwingende Systeme (russisch), Moskau/Leningrad 1952, § 37.
- [4] K. MAGNUS, Schwingungen, Stuttgart 1961, B. G. Teubner-Verlag, Kap. 4.

Anschrift: Prof. Dr. KURT MAGNUS, Stuttgart-O, Hackländerstraße 33

Zur Theorie des Bimetall-Streifens

Von O. MAHRENHOLTZ*) und W. JOHNSON

1. Grundbeziehungen

Wir betrachten einen freien aus zwei Rechteckstäben 1 und 2 zusammengesetzten, bei der Ausgangstemperatur t_0 geraden und spannungsfreien Bimetall-Streifen, bei dem ideale Haftung in der Berührungsfläche von 1 und 2 vorausgesetzt wird. Die Werkstoffe 1 und 2 haben die konstanten linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten α_1 und α_2 mit $\alpha_2 > \alpha_1$, so daß der Streifen bei der in ihm konstanten Temperatur $t > t_0$ den Krümmungsradius $\varrho = \varrho(t)$ hat mit 1 auf der konkaven und 2 auf der konvexen Seite (s. Bild 1; dort weitere Bezeichnungen, auf die im folgenden Bezug genommen wird). Weiter wird von den Annahmen der elementaren Theorie der elastischen Balkenbiegung Gebrauch gemacht: Spannungszustand $\sigma_s = \sigma, \sigma_\xi = 0 = \sigma_b, \sigma_{ik} = 0$ für $i \neq k$; ebene und zur Biegeachse normale Querschnitte bleiben eben und normal zur Biegeachse; von der Querdehnung wird abgesehen, h_1, h_2 und b sind hier konstante Längen.

Der Verzerrungszustand eines Punktes (ξ, s) wird dann angenähert durch

$$\varepsilon(\xi, s) = \varepsilon(\xi) = \frac{\xi - \xi_0}{\varrho} \quad \dots \quad (1.1)$$

beschrieben, wobei ξ_0 die Lage der momentan ungelängten Faser festlegt. $\varepsilon(\xi)$ setzt sich für jeden der Werkstoffe 1 (2) aus

$$\varepsilon_{1(2)}(\xi) = \varepsilon_{w1(2)} + \varepsilon_{s1(2)}(\xi) \quad \dots \quad (1.2)$$

mit

$$\varepsilon_{w1(2)} = \alpha_{1(2)} (t - t_0) = \alpha_{1(2)} \Delta t \quad \dots \quad (1.3)$$

als Wärmedehnung und $\varepsilon_{s1(2)}(\xi)$ als spannungsabhängiger Dehnung zusammen. Aus (1.1), (1.2) und (1.3) folgt für die spannungsabhängige Dehnung

$$\varepsilon_{s1(2)}(\xi) = \frac{\xi - \xi_0}{\varrho} - \alpha_{1(2)} \Delta t \quad \dots \quad (1.4)$$

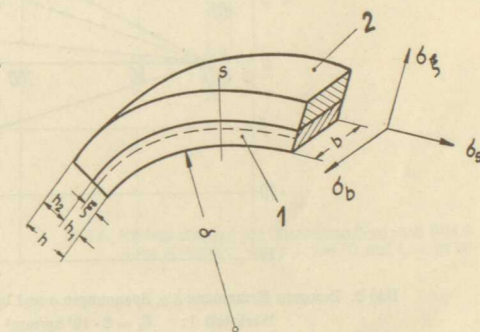


Bild 1. Bimetall-Streifen bei einer Temperatur $t > t_0$

An die Stelle der Gleichgewichtsbedingungen für die Spannungen σ_{ik} treten die auf die Einheitsbreite bezogenen Ausdrücke für das Kräftegleichgewicht

$$\int_0^{h_1} \sigma_1(\xi) d\xi + \int_{h_1}^{h_2} \sigma_2(\xi) d\xi = 0 \quad \dots \quad (1.5)$$

und das Momentengleichgewicht

$$\int_0^{h_1} \sigma_1(\xi) \xi d\xi + \int_{h_1}^{h_2} \sigma_2(\xi) \xi d\xi = 0 \quad \dots \quad (1.6)$$

über dem Streifenquerschnitt. Die Spannungsrandbedingungen werden als erfüllt angesehen, die Biegeformen $\varrho(t)$ stellen sich als eine Folge statischer Gleichgewichtszustände dar.

2. Elastisches Werkstoffverhalten

Das HOOKESche Gesetz

$$\varepsilon_{s1(2)}(\xi) = \frac{\sigma_{1(2)}(\xi)}{E_{1(2)}} \quad \dots \quad (2.1)$$

liefert mit (1.4), (1.5) und (1.6) sowie den Abkürzungen $m = h_1/h_2$ und $n = E_1/E_2$ die bezogene Krümmung

$$\frac{h}{\varrho} = \frac{6(1+m)^2 n m}{n^2 m^4 + 4 n m^3 + 6 n m^2 + 4 n m + 1} (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta t \quad \dots \quad (2.2)$$

Zu diesem Resultat gelangte auf anderem Wege, jedoch mit den im Prinzip gleichen Annahmen, TIMOSHENKO [1].

Die Lage ξ_0 der ungelängten Faser hängt nicht von der Temperatur t ab.

*) Lehrstuhl für Mechanik der Technischen Hochschule Hannover.