

INTERNATIONAL UNION OF THEORETICAL  
AND APPLIED MECHANICS

# KREISELPROBLEME

SYMPOSION CELERINA, 20. BIS 23. AUGUST 1962

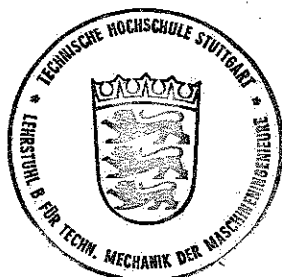
# GYRODYNAMICS

SYMPOSIUM CELERINA, AUGUST 20-23, 1962

HERAUSGEBER/EDITOR

HANS ZIEGLER

MIT 152 ABBILDUNGEN



A 024/371

SPRINGER-VERLAG  
BERLIN/GÖTTINGEN/HEIDELBERG  
1963

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten  
Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es auch nicht gestattet,  
dieses Buch oder Teile daraus auf photomechanischem Wege  
(Photokopie, Mikrokopie) oder auf andere Art zu vervielfältigen

All rights reserved. No part of this book may  
be reproduced in any form, by microfilm or  
any other means, without permission in  
writing from the publishers

© by Springer Verlag OHG., Berlin/Göttingen/Heidelberg 1963  
Library of Congress Catalog Card Number: 63-21725

Printed in Germany

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw.  
in diesem Buche berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der An-  
nahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetz-  
gebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften

# Ergebnisse und Probleme der allgemeinen Kreiseltheorie

Von

Kurt Magnus

Stuttgart, Deutschland

## 1. Allgemeines

Auf dem Gebiet der Kreiseltheorie ist die Zahl der Veröffentlichungen so stark angestiegen, daß es nicht das Ziel des vorliegenden Berichtes sein kann, eine lückenlose Übersicht über den Stand der Erkenntnisse zu geben. Anstelle einer ohnehin nicht erreichbaren Vollständigkeit sollen deshalb hier bestimmte Themengruppen herausgegriffen und die dabei erzielten Ergebnisse oder zumindest die Problemstellungen erklärt werden. Daß dabei nicht alle durch Veröffentlichungen hervorgetretenen Forscher genannt oder ihre Arbeiten ausgewertet werden können, dürfte verständlich sein. Prioritätsfragen müssen dabei als zweitrangig in den Hintergrund treten.

Eine systematische Ordnung von Kreiselproblemen kann nach verschiedenen Gesichtspunkten vorgenommen werden, je nachdem man die Form des Kreisels, die Art der auf ihn einwirkenden Momente, die Zahl der Freiheitsgrade oder die Anzahl der miteinander kinetisch gekoppelten Körper zur Klassifizierung heranzieht. Da sich diese Merkmale stets mehr oder weniger stark überlagern, läßt sich auch in der vorliegenden Zusammenstellung eine Erwähnung ähnlicher Probleme in verschiedenen Kapiteln nicht ganz vermeiden.

Großen Auftrieb hat die Kreiseltheorie im Laufe der letzten Jahre durch die Untersuchung der Bewegungen künstlicher Satelliten erhalten. Randprobleme der klassischen Kreiseltheorie sind dadurch wieder aktuell geworden, und andererseits sind völlig neuartige Problemstellungen hinzugekommen. Hierzu gehören z. B.

- Drehbewegungen von Körpern mit Selbsterregung,
- Körper mit veränderlichen Massen oder Trägheitsmomenten,
- starre Körper mit Flüssigkeitsfüllung,
- Regelung der Raumlage eines Körpers,
- Drehbewegungen in einem zentralen Schwerfeld,
- Beeinflussung von Translations- und Rotationsbewegungen.

Der Weltraum stellt mit seinen extremen Versuchsbedingungen ein Laboratorium dar, dessen Bedingungen in terrestrischen Laboratorien nicht nachgeahmt werden können. Die jetzt notwendigen Anforderungen an die Genauigkeit zwingen auch den Theoretiker dazu, seine Voraussetzungen schärfer zu formulieren und den Grad der Approximation zu erhöhen.

Anknüpfend an die Ergebnisse der klassischen Kreiseltheorie sollen hier vor allem neuere Problemstellungen erwähnt werden. Dagegen werden solche Aufgaben ausgeklammert, die entweder den Rahmen dieser Übersicht sprengen würden (z. B. die Fehlertheorie von speziellen Kreiselgeräten, die Theorie des Spielkreisels in seinen verschiedenen Varianten und Kreisel mit Flüssigkeitsfüllung) oder die in anderen Vorträgen dieses Symposiums ausführlicher behandelt werden sollen (z. B. Spezialprobleme der Beeinflussung von Kreiseln durch Schwingungen oder Reibungseffekte).

## 2. Der einzelne starre Körper mit Fixpunkt

Für einen einzelnen starren Körper gilt der Drallsatz

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{d'\mathbf{H}}{dt} - \mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}. \quad (1)$$

Die links stehende zeitliche Ableitung gilt in einem Inertialsystem, die gestrichene Ableitung in einem körperfesten, also mit der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  rotierenden Koordinatensystem  $x, y, z$ .  $\mathbf{H} = \bar{\theta} \boldsymbol{\omega}$  ist der Drallvektor,  $\bar{\theta}$  der Trägheitstensor,  $\mathbf{M}$  der Vektor des auf den Kreisel einwirkenden äußeren Moments. Schreibt man Gl. (1) in einem körperfesten Hauptachsensystem mit  $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$  sowie den Hauptträgheitsmomenten  $A, B, C$  und folglich  $\mathbf{H} = (Ap, Bq, Cr)$  an, so erhält man die bekannten EULER-Gleichungen der Kreiseltheorie. Für den Sonderfall  $\mathbf{M} = 0$  gelang bekanntlich bereits EULER die vollständige analytische Lösung der Gleichungen, während POINSON eine überaus anschauliche geometrische Deutung für die Bewegung des allgemeinen kräftefreien Kreisels gegeben hat. Schwierigkeiten bereitet die Lösung der EULER-Gleichungen beim Vorhandensein verschiedenartiger Momentenfunktionen, von denen im folgenden einige besprochen werden sollen.

### 2.1 Der schwere Kreisel

Ist  $\mathbf{r}_s$  der Fahrstrahl vom Unterstützungspunkt nach dem Schwerpunkt des Kreisels,  $\mathbf{e}_v$  der Einheitsvektor in Richtung der Vertikalen und  $G$  das Gewicht des Kreisels, so hat man für einen schweren Kreisel das Moment.

$$\mathbf{M} = G \mathbf{e}_v \times \mathbf{r}_s \quad (2)$$

in die Gl. (1) einzusetzen. Zusammen mit der geometrischen Gleichung

$$\frac{d' e_v}{dt} = e_v \times \omega \quad (3)$$

hat man somit zwei Vektorgleichungen zur Bestimmung von  $\omega$  und  $e_v$  zur Verfügung. Sind für die entsprechenden sechs Skalargleichungen vier Grundintegrale bekannt, dann läßt sich die Lösung auf einfache Integrationen (Quadraturen) zurückführen. Drei Grundintegrale allgemeiner Art lassen sich angeben:

$$\begin{aligned} \text{das Energieintegral:} & \quad \frac{1}{2} H \omega + G r_s e_v = E_0, \\ \text{das Impulsintegral:} & \quad H e_v = J_0, \\ \text{die geometrische Beziehung:} & \quad |e_v| = 1. \end{aligned} \quad (4)$$

In der klassischen Kreiseltheorie ist das Bestreben der Forscher darauf gerichtet, ein viertes Integral zu finden, um auf diese Weise die Lösung auf Quadraturen zurückführen zu können. Unabhängig von der Tatsache, daß heute im Zeitalter der elektronischen Rechenmaschinen einer Reduktion auf Quadraturen nicht mehr jene zentrale Bedeutung beigemessen werden kann, die ihr noch vor 50 Jahren gegeben wurde, sollen die wichtigsten integrierbaren Fälle in der folgenden Tabelle zusammengestellt werden:

Nr.	Bedingungen für die			Entdecker
	Form des Trägheitsellipsoids	Lage des Schwerpunktes	Anfangswerte	
1	$A = B$	$r_s = s e_z$	—	LAGRANGE
2	$A = B = 2C$	$r_s = s e_z$	—	KOVALEVS- KAJA
3	$A = B = 4C$	$r_s = s e_z$	$H_0 e_v = 0$	GORJAČEV- ČAPLYGIN
4	$2A = C$	$r_s = s e_z$	$\omega_0 e_y = 0$	STEKLOV
5	—	$x_s \sqrt{A(B-C)} = z_s \sqrt{C(A-B)}$ $y_s = 0$	$H_0 r_s = 0$	HESS
6	—	—	$\omega_0 \times e_v = 0$ $(\omega_0 \times H_0) r_s = 0$	STAUDE
7	—	$x_s \sqrt{B-C} = z_s \sqrt{A-B}$ $y_s = 0$	$\omega_0 r_s = 0$	GRIOLI

Nur in den beiden erstgenannten Fällen gibt es allgemeine, d. h. für beliebige Anfangsbedingungen gültige Lösungen. Alle anderen Fälle bilden lediglich partikuläre Lösungen, die z. T. so spezieller Natur sind, daß sie kaum allgemeines Interesse beanspruchen können. Bemerkenswert ist, daß die Form des Trägheitsellipsoids in den Fällen 5 bis 7

nicht eingeschränkt wird; im Falle der „STAUDESchen permanenten Drehungen“ ist sogar die Lage des Schwerpunktes beliebig. Es handelt sich hier um Drehbewegungen mit einem vertikalen, nach Größe und Richtung konstanten Drehvektor. Kreiselmoment und Schweremoment sind dabei gerade im Gleichgewicht.

Einige weitere, durch Quadraturen lösbare Fälle sind im Laufe der Zeit entdeckt worden. Man findet sie zusammen mit einem neuen, sehr speziellen Sonderfall in einer Veröffentlichung von BOGOJAVLENSKI [1] dargestellt. Der Verfasser verwendet ein bereits von S. KOVALEVSKAJA angegebenes Verfahren zum Nachweis der Existenz von partikulären Lösungen. Mit Hilfe eines neuartigen Verfahrens gelingt es MJASNIKOV [2], die bisher bekannten lösbaren Fälle unter einheitlichen Gesichtspunkten abzuleiten. Er führt zu diesem Zweck eine sog. „charakteristische Ebene“ ein, die von den Vektoren  $\omega$  und  $H$  aufgespannt wird. Dabei gelingt auch ihm die Auffindung eines neuen Sonderfalls. Eine Verallgemeinerung der STAUDE-Bewegungen ist GULJAEV [3] zu verdanken. Er weist nach, daß reguläre Präzessionen des schweren unsymmetrischen Kreisels nur möglich sind, wenn der Schwerpunkt auf einer Normalen zu solchen Ebenen liegt, die das Trägheitsellipsoid des Körpers bezüglich des Unterstützungspunktes in einem Kreisquerschnitt schneiden. Die von STAUDE und GRIOLI gefundenen Fälle erscheinen dabei als Spezialfälle allgemeiner „regulärer Präzessionen“.

Zahlreiche Veröffentlichungen sind der Entwicklung von Näherungslösungen gewidmet. Bei ihnen werden entweder Nachbarlösungen zu den bekannten partikulären Bewegungen gesucht, oder es werden einschränkende Voraussetzungen entweder über die Lage des Drehvektors (z. B. bei den sog. „schnellen Kreiseln“) oder über die Gestalt des Trägheitsellipsoids (z. B. kleine Unsymmetrie) getroffen.

Die von einigen Autoren vorgenommene Untersuchung von Problemen der klassischen Kreiseltheorie in mehrdimensionalen oder nichteuklidischen Räumen soll hier nicht betrachtet werden.

## 2.2 Die Stabilität der Kreiselbewegungen

Schon bei einigen der klassischen Fälle hat man die Stabilität der gefundenen Lösungen untersucht. Dabei hat man sich zur Stabilitätsbestimmung fast ausschließlich der Methoden der Theorie kleiner Störungen bedient. Die auf diese Weise erhaltenen Stabilitätskriterien sind notwendig, aber keineswegs immer hinreichend. Andererseits ist das Verfahren anpassungsfähig und weitreichend genug, um auch schwierige Fälle damit behandeln zu können. So gelang z. B. GRAMMEL auf diese Weise eine vollständige Klärung der schwierigen Stabilitätsverhältnisse für die STAUDESchen Drehungen.

Eine wichtige Abrundung der Theorie der Stabilität von Kreiselbewegungen wurde vor etwa acht Jahren eingeleitet, als ČETAEV [4] die von LJAPUNOV entwickelte direkte Methode zum Stabilitätsnachweis auf ein Kreiselproblem anwandte. Ausgehend von dieser Veröffentlichung haben in der Folgezeit vorwiegend sowjetische Forscher alle klassischen Fälle der Kreiseltheorie aufgegriffen und konnten dabei fast ohne Ausnahme zeigen, daß die bereits bekannten notwendigen Stabilitätsbedingungen zugleich auch hinreichend sind, sofern man von einer „Stabilität im Sinne LJAPUNOV“ spricht. Da sich die LJAPUNOVsche Methode zu einem wichtigen und weitreichenden — wenn auch häufig etwas schwierigen Hilfsmittel der Kreiseltheorie entwickelt hat, soll ihr Grundgedanke kurz an dem schon von ČETAEV herangezogenen Beispiel des schweren symmetrischen Kreisels erläutert werden.

Es sei  $A = B$  und  $r_s = s e_z$  mit  $s > 0$ . Neben den drei Grundintegralen (4) findet man für diesen Fall leicht noch ein viertes aus der Tatsache, daß das Moment der Schwerkraft stets senkrecht auf der Figurenachse ( $z$ -Achse) des Kreisels steht. Folglich ist die Drallkomponente  $H_z = Cr$  konstant, woraus sofort auch  $r = \text{const}$  folgt. Eine partikuläre Lösung der Bewegungsgleichungen ist die gleichförmige Drehung mit der Geschwindigkeit  $r_0$ , bei der die Figurenachse vertikal steht. Dafür gilt

$$\begin{aligned} p &= 0, & q &= 0, & r &= r_0, \\ \gamma_x &= 0, & \gamma_y &= 0, & \gamma_z &= 1. \end{aligned}$$

$\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$  sind dabei die Komponenten des Vektors  $e_v$ , also die Richtungskosinus der Vertikalen gegenüber den körperfesten Hauptachsen. Nun wird die durch

$$\begin{aligned} p &= \xi, & q &= \eta, & r &= r_0 + \zeta, \\ \gamma_x &= \alpha, & \gamma_y &= \beta, & \gamma_z &= 1 + \delta \end{aligned} \quad (5)$$

gekennzeichnete Nachbarbewegung betrachtet. Für sie gelten — wie man durch Einsetzen von (5) in (4) unter Berücksichtigung von  $r = \text{const}$  findet — die folgenden Integrale:

$$\begin{aligned} A(\xi^2 + \eta^2) + C(\zeta^2 + 2r_0\zeta) + 2Gs\delta &= V_1, \\ A(\xi\alpha + \eta\beta) + C(\zeta\delta + \zeta + r_0\delta) &= V_2, \\ \alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 + 2\delta &= V_3, \\ \zeta &= V_4. \end{aligned}$$

Im Sinne der LJAPUNOVschen Theorie kommt es nunmehr darauf an, aus den vier Konstanten  $V_i$  eine LJAPUNOVsche Testfunktion

$$V = f(V_1, V_2, V_3, V_4) \quad (6)$$

aufzubauen, die eine bezüglich der Variablen  $\xi, \eta, \zeta, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$  positiv definite quadratische Form darstellt. Zu diesem Zweck kann man in den Ansatz (6) Faktoren hereinnehmen, die dann so zu bestimmen sind, daß alle Glieder, welche die Definitheit von  $V$  stören, zum Verschwinden gebracht werden. Die Forderung nach positiver Definitheit drückt sich dann in Beziehungen zwischen den Parametern des Systems aus, die hinreichende Bedingungen für die Stabilität der betrachteten Bewegung darstellen. Da nämlich wegen  $V_i = \text{const}$  stets

$$\frac{dV}{dt} = \sum_i \frac{\partial V}{\partial V_i} \frac{dV_i}{dt} = 0 \quad (7)$$

gilt, ist das System nach einem von LJAPUNOV bewiesenen Satz stabil.

### 2.3 Der selbsterregte Kreisel

Ein Kreisel wird als selbsterregt bezeichnet, wenn der Vektor  $\mathbf{M}$  entweder im Kreiselkörper fest ist oder in ihm in vorgegebener Weise wandert. Eine erste Veröffentlichung dieser Art ist BÖDEWADT [5] zu verdanken. Er beschränkt sich auf einen symmetrischen Kreisel ( $A=B$ ) und setzt  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 = \text{const}$  für den körperfesten Beobachter. Unter diesen Voraussetzungen läßt sich eine explizite Lösung nicht nur für den Drehgeschwindigkeitsvektor  $\boldsymbol{\omega}$  sondern auch für die EULERSchen Winkel des Körpers angeben.

In einer Serie von Arbeiten hat dann GRAMMEL [6] verschiedene Aspekte des selbsterregten Kreisels untersucht. Er hat vor allem die Polkurven berechnet, aus denen die Wanderung des Vektors  $\boldsymbol{\omega}$  ersichtlich wird, und hat dadurch den Charakter verschiedenartiger Bewegungsformen selbsterregter Kreisel erkennen können. Seine Arbeiten bilden eine Art Fortsetzung für die STAUDESchen Untersuchungen des schweren Kreisels und sind keineswegs auf den symmetrischen Kreisel beschränkt. Gerade für den unsymmetrischen Kreisel sind einige überraschende Ergebnisse gefunden worden, die bei der Lagenregelung von Satelliten von praktischer Bedeutung sein können. Es zeigt sich nämlich, daß ein gewünschter Endzustand nicht in allen Fällen auch wirklich erreicht werden kann, wie dies im allgemeinen angestrebt wird, wenn eine Regelung der Raumlage durch innere Momente — also Selbsterregung — vorgenommen wird.

GRAMMEL untersucht auch selbsterregende Momente, die für den körperfesten Beobachter von der Drehgeschwindigkeit oder von der Zeit abhängen:  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\omega})$  und  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(t)$ . Er beschränkt sich dabei freilich auf eine spezielle Abhängigkeit von der Drehgeschwindigkeit, die für die Zwecke der Lagenregelungen besonders einleuchtend erscheint:

$$M_x = \mu(\omega_0^2 - \omega_x^2). \quad (8)$$



Die Selbsterregung verschwindet hier, wenn die „Soll Drehzahl“  $\omega_0$  erreicht ist. Es existieren dann asymptotische und periodische Bewegungstypen, beim unsymmetrischen Kreisel auch instabile Lösungen. Aus der Vielzahl der Ergebnisse seien hier nur zwei zitiert:

1. Abgesehen von Sonderfällen gehören zu körperfesten selbsterregenden Momenten Drehgeschwindigkeitsvektoren, die nicht körperfest sind.

2. Ein Momentenvektor, der eine körperfeste Drehung  $\omega = \text{const}$  unterhalten soll, muß i. allg. in einer körperfesten Ebene wandern.

Wenn auch durch die GRAMMELschen Arbeiten eine gewisse Übersicht erreicht wurde, so bleiben doch noch viele Probleme offen, so daß der selbsterregte Kreisel in seinen vielfältigen Varianten noch ein dankbares Betätigungsfeld für weitere Forschungen bietet.

#### 2.4 Der fremderregte Kreisel

Die Beeinflussung der Kreiselmotiv durch zeitabhängige äußere Störmomente kann große physikalische oder technische Bedeutung haben. Von atomphysikalischen Modellvorstellungen ausgehend untersucht BRAUNBECK [7] die Auswirkungen eines Moments von der Form

$$M = M_0(1 + \alpha \cos \omega t) (e_y \times e_z) \quad (9)$$

auf die regulären Präzessionen eines symmetrischen Kreisels ( $A = B$ ). Im Falle  $\alpha = 0$  existiert eine solche Präzession, die in den EULERSchen Winkeln durch

$$\vartheta = \vartheta_0, \quad \psi = \dot{\psi}_0 t, \quad \varphi = \dot{\varphi} t$$

ausgedrückt werden kann. Für  $\alpha \neq 0$  verändert das periodische Wechselfeld die Präzessionsbewegung, so daß resonanzähnliche Erscheinungen möglich sind. Man kann die Bewegungsgleichungen in eine einzige nicht-lineare Differentialgleichung für den EULER-Winkel  $\vartheta$  umwandeln. Für den Fall kleiner Störungen der regulären Präzession geht diese Gleichung in eine MATHIEUSche Differentialgleichung über, deren Lösungen bekannt sind. Aus der bekannten INCE-STURTTschen Karte lassen sich dann stabile und instabile Lösungsbereiche auch für die Präzessionsbewegungen des Kreisels ablesen.

Zu ähnlichen Ergebnissen kommt WEIDENHAMMER [8], der die Bewegungen eines schweren symmetrischen Kreisels mit vertikal erschüttertem Aufhängepunkt untersucht. Mit Hilfe eines Reihenansatzes für  $\vartheta$  kann er zeigen, daß sowohl der Öffnungswinkel  $\vartheta_0$  des Präzessionskegels als auch die Präzessionsgeschwindigkeit  $\dot{\psi}_0$  gegenüber dem ungestörten Fall verändert werden. Für die Größe der Erschütterungseffekte ist im wesentlichen ein dimensionsloser Parameter

$$\zeta = \frac{\alpha^2 \omega^2}{g L_r}$$

maßgebend, wobei  $a$  die Erschütterungsamplitude,  $\omega$  die Erschütterungsfrequenz,  $g$  die Erdbeschleunigung und  $L_r$  die reduzierte Pendellänge des schweren Kreisels ist.

Neben der Fremderregung durch periodische Störmomente gewinnt die Untersuchung der Auswirkungen von stochastischen Erregungen an Bedeutung. So hat man z. B. feststellen können, daß die Schlingerbewegungen von Schiffen durch stationäre Zufallsfunktionen mit ziemlich genau angegebbarer spektraler Leistungsdichte  $S(\omega)$  wiedergegeben werden können. Ein auf dem Schiff befindliches Kreiselgerät wird auf die Fremderregung mit einem Fehler reagieren, dessen Größe statistisch berechenbar ist. So untersucht SVESCHNIKOV [9] das Verhalten eines Kreiselpendels, dessen vereinfachte Bewegungsgleichungen durch

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} - a_1 \left(1 + \frac{\ddot{z}}{g}\right) \beta &= -a_2 \ddot{y}, \\ \ddot{\beta} + b_1 \left(1 + \frac{\ddot{z}}{g}\right) \alpha &= b_2 \ddot{x} \end{aligned} \quad (10)$$

wiedergegeben werden können. Die Größen  $x, y, z$  sind dabei die Koordinaten des Aufhängepunktes, dessen Beschleunigungen als Reaktionskräfte in die Gleichungen eingehen. Durch Lösen der Gln. (10) können nun zwar nicht  $\alpha$  und  $\beta$  selbst als Funktionen der Zeit, wohl aber die zu erwartenden mittleren quadratischen Fehler errechnet werden:

$$\overline{\alpha^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F_{\alpha}(i\omega)|^2 S(\omega) d\omega, \quad \overline{\beta^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F_{\beta}(i\omega)|^2 S(\omega) d\omega.$$

Dabei sind  $F_{\alpha}(i\omega)$  und  $F_{\beta}(i\omega)$  die aus (10) errechenbaren Übertragungsfunktionen des Systems.

Eine Reihe von Untersuchungen ähnlicher Art hat ROTTENBERG [10] durchgeführt. Auch er bestimmt mittlere quadratische Fehler von Kreiselgeräten unter dem Einfluß von Zufallserregungen mit bekannten Leistungsdichten. Wenngleich dieses Verfahren nur für stationäre Zufallsfunktionen anwendbar ist und die Ergebnisse als Wahrscheinlichkeitsaussagen über *mittlere* Fehler für den Konstrukteur eines Kreiselgerätes etwas dürftig erscheinen, so kann doch nicht daran gezweifelt werden, daß Untersuchungen dieser Art zukünftig auch in der Kreiseltheorie eine ähnliche Rolle spielen werden wie heute bereits in der Nachrichtentechnik.

## 2.5 Störmomente verschiedener Art

Störmomente  $M$  können auch bei elastischer Fesselung der Kreiselsachse an eine Gleichgewichtslage oder bei Kreiseln mit nachgiebiger Welle auftreten. Sind  $\alpha$  und  $\beta$  die Verdrehungswinkel des Kreisels, dann

können die Momentkomponenten i. allg. durch

$$M_x = -c_x \alpha \quad \text{und} \quad M_y = -c_y \beta$$

wiedergegeben werden. Besitzt die Fesselung gleiche Steifigkeit um beide Achsen ( $c_x = c_y$ ), so bekommt man ein dem schweren Kreisel sehr ähnliches Verhalten. Bei unrunder Welle ( $c_x \neq c_y$ ) ergeben sich jedoch andere Effekte. Dieser Fall wurde von CRANDALL und BROSENS [11] untersucht. Durch Bezug auf ein mit dem Kreisel rotierendes Koordinatensystem lassen sich Bewegungsgleichungen mit zeitunabhängigen Koeffizienten erhalten. Linearisiert man sie für kleine Störungen, dann lassen sich die Stabilitätsbereiche in bekannter Weise ermitteln. In einer ausführlichen Diskussion der kritischen Bereiche wird gezeigt, daß die Breite der instabilen Bereiche wesentlich von der relativen Lage der Trägheitshauptachsen gegenüber den elastischen Hauptachsen abhängt. Der instabile Bereich wächst an, wenn die beiden Eigenfrequenzen des Systems auseinandergehen, wenn also z. B. das größere Trägheitsmoment zu der kleinen Steifigkeit gehört.

Die Auswirkung von Störmomenten von der Form  $M = -\lambda H$  untersucht KOSCHLJAKOV [12]. Durch diesen Ansatz soll der Einfluß eines widerstehenden Mediums, in dem sich der Kreisel dreht, erfaßt werden. Bei symmetrischem Kreisel findet man für die Drehung um die Figurenachse leicht

$$r = r(t) = r_0 e^{-\lambda t}.$$

Aber auch  $p(t)$  und  $q(t)$  lassen sich explizit durch BESSEL-Funktionen ausdrücken. Die Auswertung zeigt, daß die Drehachse bestrebt ist, in die Richtung der Hauptachse mit dem größten Hauptträgheitsmoment hereinzuwandern. Daraus folgt, daß bei einem verlängerten Kreisel ( $A > C$ ) mit einem Überschlagen gerechnet werden muß, wie dies z. B. bei Satelliten tatsächlich beobachtet worden ist. Auch für ein andersartiges Widerstandsgesetz, das durch

$$M_x = -\lambda_1 p, \quad M_y = -\lambda_1 q, \quad M_z = \lambda_2 r^2$$

gekennzeichnet wird, sind Berechnungen durchgeführt worden.

Wenn die Störmomente aus einem nur vom Winkel  $\vartheta$  abhängigen Potential  $V(\vartheta)$  abgeleitet werden können, dann hängt — wie BOTTEMA [13] gezeigt hat — die Stabilität der regulären Präzessionen  $\vartheta = \vartheta_0$  von den Ableitungen  $(dV/d\vartheta)_{\vartheta_0}$  und  $(d^2V/d\vartheta^2)_{\vartheta_0}$  ab. Für den Fall des schweren symmetrischen Kreisels werden daraus wieder die bekannten Stabilitätsbedingungen von LAGRANGE erhalten.

### 3. Systeme starrer Körper

In der Kreiseltechnik wird fast nie ein einzelner starrer Körper allein verwendet. Schon das Einschließen des Rotors in ein Gehäuse läßt ein Zwei-Körper-System entstehen. Soll sich der Kreisel noch um

andere Achsen als die Rotorachse drehen können, so hängt man ihn in ein System von Rahmen. Eine derartige kardanische Aufhängung bildet im einfachsten Fall ein Drei-Körper-System, und neuere Kreislergeräte mit mehreren Kreiseln, entsprechenden Gehäusen und Rahmen bilden ein oft sehr kompliziertes System miteinander kinematisch und kinetisch gekoppelter starrer Körper.

Zur Berechnung derartiger Systeme sind zwei Wege begangen worden. Entweder schreibt man für jeden der beteiligten starren Körper die EULER-Gleichungen nach (1) an; da diese Gleichungen jeweils in körperfesten Koordinatensystemen gelten, müssen die oft sehr umständlichen Transformationen zwischen den Systemen berücksichtigt werden. Oder aber man leitet die Bewegungsgleichungen nach dem LAGRANGESchen Formalismus ab, indem man von den Ausdrücken für die kinetischen und potentiellen Energien ausgeht. Sehr allgemein gültige Bewegungsgleichungen sind nach beiden Methoden verschiedentlich aufgestellt worden. Jedoch klaffen zwischen diesen meist sehr abstrakten Ergebnissen der Theorie und den praktisch interessanten Problemen noch immer beträchtliche Lücken. Jede Konkretisierung führt meist zu Bewegungsgleichungen von fast hoffnungsloser Kompliziertheit, und erst langsam beginnen sich — dank der Arbeiten zahlreicher Autoren — die vorhandenen Lücken zu schließen. Einige Ergebnisse sollen hier mitgeteilt werden.

### 3.1 Mehr-Kreisel-Systeme

Ausgehend von der vorwiegend durch ROUTH zu einer gewissen Vollendung gebrachten, höchst wirkungsvollen Methode der kleinen Schwingungen haben THOMSON und TAIT eine allgemeine Klassifizierung der verschiedenen Kräftearten vorgenommen. Sie haben dabei als gyroskopische Kräfte solche bezeichnet, die von den Geschwindigkeitskoordinaten  $\dot{q}_k$  abhängen und bei wirklichen Verschiebungen keine Arbeit leisten. Macht man für die gyroskopischen Kräfte den Ansatz  $g_{ik} \dot{q}_k$ , dann muß die Matrix der  $g_{ik}$  schiefssymmetrisch sein.

Viele Jahrzehnte hindurch bestand kaum ein Anlaß, die schönen Ergebnisse von THOMSON und TAIT zu erweitern oder zu ergänzen. Erst die Fortschritte der Kreiseltechnik einerseits und andererseits die Bereitstellung weiterreichender mathematischer Hilfsmittel geben den Anlaß dazu, daß sich wieder einige Forscher der Theorie von allgemeinen Kreiselsystemen zuwandten. Man findet eine systematische Zusammenstellung der erreichten Ergebnisse in einem Buche von MERKIN [14]. Der Autor selbst hat einige sehr allgemeine Sätze abgeleitet, die z. T. als eine Art Richtschnur beim Entwurf komplizierter Kreiselsysteme dienen können. Die Sätze beziehen sich auf die Möglichkeiten der Stabilisierung durch Hinzufügen von gyroskopischen Kräften. Diese Möglich-

keiten wiederum hängen von den auf ein System einwirkenden dissipativen Geschwindigkeitskräften, konservativen bzw. nichtkonservativen Lagekräften oder auch von Kombinationen hiervon ab. Von unmittelbarer praktischer Bedeutung sind Untersuchungen MEBKINS, in denen die Zulässigkeit der in der technischen Kreiseltheorie fast stets durchgeführten Näherungen für den Fall schneller Kreisel untersucht wird. Die Näherungen führen zu brauchbaren Annäherungen, wenn die Determinante  $|g_{ik}| \neq 0$  ist, und wenn die im System vorhandenen Eigenfrequenzen in zwei Gruppen (schnelle Nutationen und langsame Präzessionen) zerfallen. Genauere Untersuchungen dazu hat NOVOSELOV [15] angestellt. Er betrachtet Systeme vom Typ

$$a_{ik} \ddot{q}_k + (b_{ik} + H g_{ik}) \dot{q}_k + c_{ik} q_k = 0 \quad (11)$$

und untersucht den Grad der Näherungen, die man erhält, wenn man einerseits  $a_{ik} = 0$  und andererseits  $c_{ik} = 0$  annimmt. Bei hinreichend großem Drall  $H$  ist eine derartige Aufspaltung denkbar und ergibt im ersten Fall Näherungen für die Präzessionen, im zweiten Näherungen für die Nutationen. Es wird gezeigt, daß in endlichen Zeitintervallen die Lösungen der vollständigen Gln. (11) durch die Lösungen der verkürzten Gleichungen mit einer Genauigkeit mindestens von der Ordnung  $H^{-1}$  angenähert werden. Natürlich ist bei derartigen Betrachtungen Vorsicht geboten, weil sich gegebene Anfangsbedingungen nicht immer erfüllen lassen, wenn die Näherungen durch Vernachlässigen der höchsten Ableitungen in (11) zustande gekommen sind. Außerdem kommt es bei starren Bindungen (z. B. beim Zwei-Kreisel-Kompaß) durchaus vor, daß Eigenschwingungen auftreten, die weder zu den Nutationen noch zu den Präzessionen gezählt werden können.

Einen allgemeinen Satz von RAYLEIGH, der besagt, daß die Eigenfrequenzen konservativer Systeme durch Hinzufügen von weiteren Bindungen zwischen den Koordinaten nicht verringert werden können, hat DUFFIN [16] auf Systeme mit Kreiseln übertragen können.

Von einem mehr gerätetechnischen Standpunkt herkommend, hat sich ISCHLINSKI [17] mit der Theorie komplizierter Kreiselsysteme beschäftigt. Er gibt dabei einer sinnvollen Anwendung des Drallsatzes den Vorzug vor der LAGRANGESchen Methode und behauptet, auf diese Weise eher die Möglichkeiten und die Zulässigkeit von Vernachlässigungen erkennen zu können. Bei der Kompliziertheit moderner Kreiselgeräte könnte man geneigt sein, ihm zuzustimmen. Andererseits darf nicht vergessen werden, daß durch ein unmittelbares Betrachten des Kräfte- oder Momentengleichgewichts bei komplizierten Geräten leicht auch Glieder vergessen werden können. Für die Untersuchung des Verhaltens von Kreiselgeräten in bewegten Bezugssystemen verwendet ISCHLINSKI Gleichungen, die auf ein weder körperfestes noch raumfestes Koordi-

natensystem bezogen sind. Der Drallsatz kann in der Form

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{d^0\mathbf{H}}{dt} - \mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega}^0 = \mathbf{M} \quad (12)$$

geschrieben werden, wobei die Ableitung im mittleren Ausdruck in dem mit der Geschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}^0$  drehenden Bezugssystem zu nehmen ist. Derartige Bewegungsgleichungen, die in Sonderfällen auch schon von SCHULER verwendet worden sind, haben sich für Näherungsbetrachtungen als außerordentlich nützlich erwiesen. Für exaktere Untersuchungen sind sie i. allg. unbrauchbar, da die Trägheitstensoren in dem gewählten Bezugssystem keine konstanten Elemente besitzen. Will man dies auch noch berücksichtigen, dann kommt man zu außerordentlich komplizierten Gleichungen, wie sie z. B. von LURJE [18] abgeleitet worden sind. LURJE hat die Bewegungsgleichungen für  $n$  gegenseitig aufeinander einwirkende Körper aufgestellt, indem er das in einem Trägerkörper feste Hauptachsensystem als Bezugssystem verwendet. In der Vektorschreibweise bleiben seine Gleichungen zwar noch einigermaßen übersichtlich, jedoch werden die Schwierigkeiten erst recht offenbar, wenn man in konkreten Fällen zu einer Berechnung in Komponenten übergehen muß.

Zwei Sonderfälle von Mehr-Körper-Systemen, die erhebliche praktische Bedeutung beanspruchen können, sollen im folgenden erwähnt werden.

### 3.2 Der Gyrostat

Nach Lord KELVIN ist der Gyrostat ein starrer Körper, der im Innern einen Rotor besitzt. Recht ausführliche ältere Untersuchungen zu diesem Zwei-Körper-System findet man vor allem in dem bekannten Buch von GRAY. Über einige neuere Ergebnisse, bei denen vor allem eine geometrische Interpretation der Bewegungen eines Gyrostaten im Sinne der POINSONSchen Theorie im Vordergrund steht, berichtet LEIPHOLZ auf diesem Symposium. Mit Sonderfragen, die an die Untersuchungen STAUTES für den unsymmetrischen schweren Kreisel anschließen, hat sich DROFA [19] beschäftigt: er hat diejenigen körperfesten Achsen des Hüllkörpers gesucht, für die permanente Drehungen kinetisch möglich sind. Eine ähnliche Aufgabe behandelt CAPRIZ [20] für die Schwingungsbewegungen eines unsymmetrischen Raumpendels mit eingebautem Rotor. Von einer technischen Fragestellung ausgehend, hat KLUMPP [21] bestimmte Bewegungsformen einer Hüllkugel mit eingebautem symmetrischem Rotor (Schwimmer eines Ein-Kreisel-Kompasses) untersucht. Er konnte zeigen, daß unter dem Einfluß von Schwingungen des Systems stets dann Fehlweisungen auftreten können, wenn die Trägheitshauptachsen der Hüllkugel gegenüber denen des Rotors verdreht sind.

### 3.3 Der Kreisel in kardanischer Lagerung

Wegen der großen technischen Bedeutung kardanisch gelagerter Kreisel sind über sein Verhalten zahlreiche Arbeiten veröffentlicht worden. Die neueren von ihnen sind meist der Untersuchung der systematischen Auswanderung der Rotorachse unter dem Einfluß von freien oder erzwungenen Schwingungen gewidmet. Da dieses Problem in mehreren Vorträgen des Symposiums gesondert behandelt werden wird, soll es hier übergangen werden. Ich habe jedoch den Eindruck, daß die Untersuchung des Schwingungseinflusses auf Kreiselsysteme trotz vieler Veröffentlichungen auf diesem Gebiet noch immer ein weites Betätigungsfeld bietet.

Die Aufstellung der exakten Bewegungsgleichungen für einen kardanisch gelagerten Kreisel bereitet keine Schwierigkeiten. In zwei Sonderfällen, die als unmittelbare Verallgemeinerungen der klassischen Fälle von EULER und LAGRANGE für den einzelnen Körper angesehen werden können, lassen sich sogar exakte Lösungen finden. Für den kräftefreien kardanisch gelagerten Kreisel, bei dem die Schwerpunkte von Rotor und Innenrahmen mit dem gemeinsamen Schnittpunkt der drei Achsen zusammenfallen, hat PORITZKI [22] eine Zusammenstellung der bisherigen Ergebnisse gegeben. Dabei wurde vorausgesetzt, daß die Hauptachsen der Kardanrahmen in der Normalstellung des Systems mit den Hauptachsen des als symmetrisch angenommenen Rotors zusammenfallen.

Bei einem unsymmetrischen kardanisch gelagerten Kreisel ist vor allem das Stabilitätsverhalten interessant. Mit gewissen Modifikationen läßt sich das bekannte Ergebnis, daß permanente Drehungen um die Achse des mittleren Hauptträgheitsmoments instabil sind, auch hier nachweisen. Freilich kommt ein bisher nicht bekannter Effekt hinzu: es zeigt sich nämlich, daß die Stabilitätsbedingungen von der Verdrehung des Innenrahmens  $1$  gegenüber dem Außenrahmen  $2$  abhängen. So findet man für ein „abgeplattetes“ System (d. h.  $A + A_1 + A_2 < C$ ,  $B + B_1 < C$ ), daß Instabilität für einen ganz bestimmten Bereich  $\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$  von Schräglagen  $\vartheta$  des Innenrahmens vorhanden ist. Bei Drehungen um die mittlere Hauptachse des Rotors verschwindet die ursprünglich vorhandene Instabilität, wenn die Neigung des Innenrahmens einen gewissen Grenzwert überschreitet.

Fällt der Schwerpunkt von Rotor und Innenrahmen nicht mit dem geometrischen Schnittpunkt der drei Achsen zusammen (schwerer Kreisel), so kommt der Richtung der äußeren Rahmenachse eine besondere Bedeutung zu. Bisher ist eine exakte Berechnung des schweren symmetrischen Kreisels nur für den Fall einer vertikal stehenden äußeren Rahmenachse gelungen [23]. Hier konnte die Lösung auf

Quadraturen zurückgeführt werden, wobei die vorkommenden Integrale freilich komplizierter sind als im Fall des nicht kardanisch gelagerten Kreisels. Aber auch ohne diese Integrale erst lösen zu müssen, lassen sich alle interessierenden Eigenschaften der Bewegung aus einer nicht-linearen Differentialgleichung von der Form

$$\dot{\vartheta}^2 = f(\vartheta) \quad (13)$$

für den EULER-Winkel  $\vartheta$ , der hier mit dem Winkel der Relativverdrehung des Innenrahmens gegenüber dem Außenrahmen identisch ist, ableiten. Gl. (13) kann als Bestimmungsgleichung für die Phasenkurven in einer  $\vartheta, \dot{\vartheta}$ -Ebene aufgefaßt werden. Ergänzt man das Phasenporträt in der  $\vartheta, \dot{\vartheta}$ -Ebene durch eine entsprechende Kurvenschar in der  $\vartheta, \dot{\psi}$ -Ebene, dann lassen sich aus beiden Kurvenscharen alle gesuchten Eigenschaften der Bewegung ablesen. Der EULER-Winkel  $\psi$  gibt dabei die Drehung des Außenrahmens an.

Eine einfache Sonderlösung ist die permanente Drehung des Rotors bei vertikal stehender Rotorachse. Wie im LAGRANGESchen Fall kann auch jetzt der aufrechte Kreisel, dessen Schwerpunkt über dem Unterstützungspunkt liegt, stabil gemacht werden. Die Stabilitätsbedingungen lauten dafür

$$C^2 r^2 > 4(A + B_1 - C_1) m g s, \quad (14)$$

$$\dot{\psi}_1 < \dot{\psi} < \dot{\psi}_2.$$

Zum Erreichen der Stabilität genügt jetzt nicht allein ein hinreichend großer Drall des Rotors, sondern es muß auch die Drehgeschwindigkeit  $\dot{\psi}$  des Rahmensystems bestimmten Bedingungen genügen. Für den aufrechten Kreisel sind die Grenzwerte  $\dot{\psi}_1$  und  $\dot{\psi}_2$  beide positiv; also kann Stabilität nur bei drehenden Rahmen erreicht werden. Der hängende Kreisel ist dagegen auch bei nichtdrehendem Rahmen stabil, da hier  $\dot{\psi}_1$  und  $\dot{\psi}_2$  verschiedene Vorzeichen haben, also  $\dot{\psi} = 0$  in dem nach (14) geforderten Bereich liegt. Jedoch kann der hängende Kreisel auch instabil werden, wenn dem Rahmensystem Drehungen erteilt werden, welche die Grenzwerte  $\dot{\psi}_1$  bzw.  $\dot{\psi}_2$  überschreiten.

Nach dem Gesagten überrascht es nicht, daß TABAROVSKI [24] für den Fall eines schweren symmetrischen Kreisels bei schräg stehender äußerer Kardanachse nachweisen konnte, daß hier der aufrechte Kreisel in jedem Falle instabil ist. Der äußere Kardanrahmen kann ja dann nicht rotieren, ohne die vertikale Lage der Rotorachse zu stören.

Die Stabilität einer Anzahl von Sonderlösungen für den schweren kardanisch gelagerten Kreisel hat RUMJANZEV [25] untersucht. Er konnte die Stabilität der regulären Präzessionen auch noch für jene Fälle nachweisen, in denen an den Rotor- oder Kardanachsen dämpfende Reibungsmomente wirksam sind.



Bei fast allen bisher erwähnten Untersuchungen wurden die Widerstandskräfte gegenüber den Rotordrehungen vernachlässigt. Bei technischen Kreiseln werden sie im allgemeinen durch einen Antrieb kompensiert, so daß bei der Betriebsdrehzahl Momentengleichgewicht herrscht. Das gilt jedoch nur für die Relativedrehung  $\omega_R$  zwischen Rotor und Innenrahmen. Nun dreht der Rotor gegenüber einem Inertialsystem mit der Geschwindigkeit

$$\dot{r} = \omega_R + \dot{\psi} \cos \vartheta.$$

Bei reibungsfrei laufendem Motor ist  $r = r_0$ ,  $\omega_R = r_0 - \dot{\psi} \cos \vartheta$ . Bei ideal starr wirkendem Antrieb hätte man dagegen  $\omega_R = \omega_{R_0}$ ,  $r = \omega_{R_0} + \dot{\psi} \cos \vartheta$ . Im ersten Fall schwankt die Relativgeschwindigkeit  $\omega_R$ , im zweiten die Absolutgeschwindigkeit  $r$ . Nun wird man bei jedem realen Antrieb für das Moment um die Rotorachse ansetzen müssen:

$$M = M_{\text{Antrieb}} - M_{\text{Widerstand}} = \left( \frac{\partial M}{\partial \omega_R} \right)_{\omega_{R_0}} \tilde{\omega}_R + \dots \approx -\lambda \tilde{\omega}_R.$$

Entsprechend den Schwankungen  $\tilde{\omega}_R$  der relativen Drehgeschwindigkeit wirkt also ein gewisses Restmoment um die Rotorachse. HARLAMOV [26] hat gezeigt, daß dieses Moment in dämpfendem Sinne auf etwa angestoßene Eigenschwingungen (Nutationen) einwirkt.

#### 4. Kreiselprobleme bei Satelliten

Kreiselercheinungen und Kreiselgesetze haben für Satelliten in doppelter Hinsicht Bedeutung: einerseits ist das Starten der Satelliten und ihr Einlenken in die gewünschte Umlaufbahn nicht ohne die Mitwirkung von Kreiselgeräten denkbar, andererseits aber bildet der auf einer Umlaufbahn kreisende Satellit selbst einen mehr oder weniger starren Körper, dessen Drehbewegungen interessieren. An dieser Stelle sollen nur einige Aspekte des letztgenannten Problems erörtert werden.

##### 4.1 Kreisel mit veränderlichen Massen oder Trägheitsmomenten

Will man die Raumlage eines Satelliten beeinflussen, so kommt es darauf an, bestimmte Momente auf den Satelliten auszuüben. Das geschieht entweder durch Bewegungen von im Satelliten befindlichen Massen oder durch gerichtetes Ausstoßen von Massen nach dem Reaktionsprinzip. In beiden Fällen ändern sich die Massenverteilungen und damit auch die Trägheitsmomente — sofern man diesen Begriff überhaupt auf einen nichtstarrten Körper übertragen will. Beim Ausstoßen von Massen wird neben den Trägheitsmomenten auch noch die Gesamtmasse geändert. Ist der Massenverlust klein, so kann er in erster Näherung vernachlässigt werden, wie dies bei den zuvor genannten Arbeiten zum Problem des selbsterregten Kreisels geschehen ist. Bei der Untersuchung

von Langzeiteffekten ist eine solche Vernachlässigung jedoch i. allg. nicht mehr zulässig. Da der Drallsatz in der Form (1) nur für ein abgeschlossenes System mit konstanter Masse gilt, muß er für die vorliegenden Zwecke erweitert werden.

Würde man unter Verwendung der für starre Körper geltenden Beziehung  $\mathbf{H} = \bar{\theta} \boldsymbol{\omega}$  rein formal schreiben

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{d}{dt} (\bar{\theta} \boldsymbol{\omega}) = \frac{d\bar{\theta}}{dt} \boldsymbol{\omega} + \bar{\theta} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{M}, \quad (15)$$

so wäre damit der Drall der bewegten Massen nur z. T. erfaßt. Gl. (15) gilt nur, wenn für alle im Trägerkörper bewegten Massen  $\mathbf{r} \times \mathbf{v}_r = 0$  gilt mit  $\mathbf{v}_r$  als der Relativgeschwindigkeit der bewegten Teilmassen. Unter diesen Voraussetzungen hat GRANTHAM [27] durch numerisches Lösen von Gl. (15) für bestimmte Anfangsbedingungen einige Probleme durchgerechnet.

Im allgemeinen Fall hat man die Dralländerung durch die hinzukommenden oder ausgestoßenen Massen zu berücksichtigen. Hat das betrachtete System die Masse  $m$  und wird diese Masse in der Zeit  $\Delta t$  um  $\Delta m$  vergrößert (oder verkleinert), dann läßt sich der für das Hauptsystem geltende Drallsatz leicht dadurch gewinnen, daß man den bekannten Drallsatz

$$\frac{d\mathbf{H}^*}{dt} = \mathbf{M} \quad (16)$$

für das aus  $m$  und  $\Delta m$  bestehende Gesamtsystem (Abb. 1) anschreibt.  $\mathbf{H}^*$  sei der Drall des gestrichelt umrandeten Gesamtsystems bezüglich des Bezugspunktes  $O$ . Ist  $\mathbf{r}_a$  der den Auftreffpunkt der Zusatzmasse  $\Delta m$  kennzeichnende Ortsvektor, und sind  $\mathbf{v}_a$  bzw.  $\mathbf{v}'_a$

die Absolutgeschwindigkeiten der Zusatzmasse  $\Delta m$  vor bzw. nach dem Auftreffen auf die Hauptmasse, dann gilt für den Drall

$$\text{zur Zeit } t: \quad \mathbf{H}^* = \mathbf{H} + \Delta m \mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a,$$

$$\text{zur Zeit } t + \Delta t: \quad \mathbf{H}^{*'} = \mathbf{H}' + \Delta m \mathbf{r}_a \times \mathbf{v}'_a.$$

Bildet man nun den Quotienten

$$\frac{\Delta \mathbf{H}^*}{\Delta t} = \frac{\mathbf{H}^{*'} - \mathbf{H}^*}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{H}}{\Delta t} + \frac{\Delta m}{\Delta t} \mathbf{r}_a \times (\mathbf{v}'_a - \mathbf{v}_a)$$

und geht zur Grenze  $\Delta t \rightarrow dt$  über, dann bekommt man aus (16) den für das System mit veränderlicher Masse geltenden Drallsatz

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{M} + \frac{dm}{dt} \mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a. \quad (17)$$

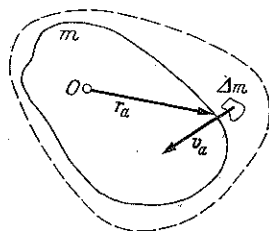


Abb. 1. System mit veränderlicher Masse

$\Delta t \rightarrow 0!$

Darin ist  $v_{ar} = v_a - v'_a$  die zur Zeit  $t$  vorhandene Relativgeschwindigkeit der Zusatzmasse  $\Delta m$  gegenüber der Hauptmasse am Ort des Auftreffens. Es macht keine Schwierigkeiten, die Gl. (17) auf die Fälle zu verallgemeinern, in denen die Massenzunahme oder -abnahme gleichzeitig an der ganzen Oberfläche des Körpers erfolgt, oder in denen die Masse  $\Delta m$  nach dem Auftreffen noch eine gewisse Relativgeschwindigkeit gegenüber dem Trägerkörper besitzt. Eine Gleichung von der Form (17) wurde von MERIAM [28] abgeleitet. Verschiedene andere Formen derselben Gleichung sind in einer Veröffentlichung von AMINOV [29] zu finden. Wenn man von der ursprünglichen Definitionsgleichung für den Drall,

$$\mathbf{H} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{v} \, dm,$$

ausgeht und feste und bewegliche Teile des Systems bei der Integration trennt, dann kommt man zu Gleichungen, die als erweiterte EULER-Gleichung aufgefaßt werden können:

$$\bar{\theta}_0 \left( \frac{d' \boldsymbol{\omega}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_0 \right) - (\bar{\theta}_0 \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M} + \mathbf{M}_R + \mathbf{M}_T + \mathbf{M}_C \quad (18)$$

Dabei ist  $\boldsymbol{\omega}_0$  der Vektor der Drehgeschwindigkeit, mit der sich die Hauptachsen des Trägerkörpers durch die Massenabgabe verdrehen;  $\bar{\theta}_0 = \bar{\theta}_0(t)$  ist der zeitabhängige Trägheitstensor des Trägerkörpers. Auf der rechten Seite treten neben dem Moment  $\mathbf{M}$  der äußeren Kräfte noch die Momente  $\mathbf{M}_R$  der Reaktivkräfte,  $\mathbf{M}_T$  der Trägheitskräfte und  $\mathbf{M}_C$  der CORIOLIS-Kräfte der gegenüber dem Trägerkörper bewegten Massen auf. In impliziter Form sind diese Glieder natürlich auch in Gl. (17) enthalten.

Die Kompliziertheit der Gl. (18) ist so groß, daß es — soweit bekannt — bisher nicht gelungen ist, über Lösungen einfachster Fälle hinauszukommen. AMINOV sind einige Aussagen gelungen, bei denen jedoch sehr spezielle und z. T. willkürliche Annahmen über die Bewegung der Teile innerhalb des Körpers sowie über die Zeitabhängigkeit der Trägheitsmomente getroffen wurden.

#### 4.2 Lagenregelungen und Dralldämpfung

Will man eine bestimmte Raumlage oder einen vorgegebenen Bewegungszustand des Satelliten erreichen und einhalten, so ist dazu ein Regler notwendig, der die auszuübenden Momente ermittelt und steuert. Hierzu muß man den Zusammenhang zwischen Momenten und Bewegungen kennen, so daß also die Bewegungsgleichungen gelöst werden müßten. Anstatt jedoch die EULER-Gleichungen für vorgegebene Momente zu lösen, verfährt man hier besser umgekehrt, indem die zu einem vorgegebenen Drehungsprogramm  $\boldsymbol{\omega}(t)$  gehörenden Momente

berechnet werden. Diesen Weg haben COLE, EKSTRAND und O'NEILL [30] beschrritten. Fügt man zu den EULER-Gleichungen auch noch die bekannten Beziehungen zwischen den körperfesten Drehungskomponenten und den EULERSchen Winkeln für die Raumlage, so lassen sich auch für die Durchführung von vorgegebenen Raumlagenänderungen die notwendigen Momente aus den sechs zur Verfügung stehenden Gleichungen bestimmen.

Schwieriger werden die Berechnungen, wenn die Lagenregelung durch Bewegungen innerer Massen erfolgen soll. Eine sehr allgemeine Theorie dieser Art wurde von ROBERSON [31] gegeben. Auch die bereits genannte Arbeit von LURJE [18] läßt sich auf diese Fälle anwenden. Beide Veröffentlichungen zeigen die überaus große Kompliziertheit des allgemeinen Problems, so daß man sich bei praktischen Anwendungen vorläufig noch weitgehend mit Näherungsbetrachtungen behelfen muß.

Sehr eingehende Untersuchungen, bei denen technische Fragestellungen im Vordergrund stehen, hat CANNON [32] für eine einachsige Lagenregelung mit einem Schwungrad als Stellglied durchgeführt. Er berechnet das Zeitverhalten des Regelkreises und ermittelt den notwendigen Energiebedarf. Bei der Übertragung der für eine Ein-Achsen-Regelung erhaltenen Ergebnisse auf einen Drei-Achsen-Regler macht sich die Verkopplung der Drehbewegungen um die drei Raumachsen infolge der Kreiselmomente störend bemerkbar. Man hat hier entweder größere Schwungräder mit entsprechend erhöhtem Energiebedarf zu verwenden, oder es muß eine Entkopplung über einen gesonderten Regler vorgenommen werden.

Anstelle der von den meisten Autoren untersuchten, mit ihren Drehachsen fest im Satelliten eingebauten Schwungrädern kann man auch kardanisch gelagerte Schwungräder für das gleichzeitige Ausüben von Momenten um zwei Achsen verwenden. Einen derartigen Regler berechnet ADAMS [33]. Verwendet man als Kommandogeber für die Verdrehungen um die Kardanachsen selbst wieder Kreisel, dann ist es durch geeignete Zusammensetzung des Regelbefehls durchaus möglich, gut gedämpfte und in gewissem Sinne optimale Bewegungen des Satelliten zu erzwingen.

Häufig begnügt man sich mit der einfacheren Aufgabe, den vom Start her vorhandenen Drall oder auch die Nutationsschwingungen eines Satelliten zu verringern. Zu diesem Zweck sind verschiedenen Konstruktionen vorgeschlagen und unter meist stark vereinfachenden Annahmen berechnet worden. Zur Dämpfung von Nutationsschwingungen können z. B. Ringrohre verwendet werden, die ganz oder z. T. mit Flüssigkeit gefüllt sind. Für eine Drallminderung hat man Einzelmassen vorgeschlagen, die an Fäden hängend infolge der Zentrifugalkräfte weit vom Satelliten fortgeschleudert werden, und die auf diese

*nicht bewiesen*

Weise einen großen Teil des Gesamtdralls aufnehmen. Berechnungen derartiger Systeme mit zwei und vier Einzelmassen sind von HASELTINE [34] durchgeführt worden.

### 4.3 Kreisel in einem zentralen Schwerfeld

Bei der Berechnung der Drehbewegungen von Kreiseln und Satelliten hat man bisher fast immer das Schwerfeld als homogen angenommen. Es hat sich jedoch gezeigt, daß diese Voraussetzung für genauere Untersuchungen nicht mehr zulässig ist.

Ist  $O$  der Bezugspunkt eines Körpers oder eines Systems von Körpern, deren Teilchen  $dm$  nach dem NEWTONSchen Gravitationsgesetz von einem Zentrum  $M$  angezogen werden, dann gilt mit den Bezeichnungen von Abb. 2 und mit dem Wert  $g$  der Gravitationsbeschleunigung in  $O$

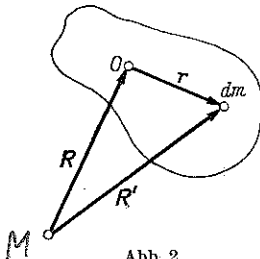


Abb. 2  
Körper im Schwerfeld

Da für alle praktisch interessierenden Fälle auf der Erde  $r \ll R$  gilt, läßt sich der Ausdruck (19) nach Potenzen von  $r/R$  entwickeln. Nimmt man von dieser Entwicklung nur die ersten beiden Glieder mit, dann bleibt

$$\begin{aligned} d\mathbf{K} &= -g R^2 \frac{\mathbf{R}'}{R'^3} dm, \\ d\mathbf{M} &= -g R^2 \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{R}'}{R'^3} dm, \\ \mathbf{M} &= -g R^2 \int \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{R}'}{R'^3} dm. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\mathbf{M} \approx \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1 = G \mathbf{e}_v \times \mathbf{r}_s + \frac{3g}{R} \int (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_v) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_v) dm. \quad (20)$$

Darin ist  $\mathbf{R} = R \mathbf{e}_v$  und  $m \mathbf{r}_s = \int \mathbf{r} dm$  gesetzt worden. Der erste Anteil von (20) ist das bekannte Schweremoment in einem homogenen Schwerfeld [s. (2)], der zweite gibt den Einfluß der Inhomogenität wieder. Bei Bezug auf ein Hauptachsensystem findet man durch Ausrechnen des Integrals

$$\mathbf{M}_1 = \frac{3g}{R} [\mathbf{e}_x (C - B) \gamma_y \gamma_z + \mathbf{e}_y (A - C) \gamma_z \gamma_x + \mathbf{e}_z (B - A) \gamma_x \gamma_y]. \quad (21)$$

Daraus folgt u. a., daß für einen Körper mit kugelförmigem Trägheitsellipsoid keine Zusatzmomente entstehen.

BELETZKI [35] hat zeigen können, daß für einen einzelnen starren Kreisel mit Fixpunkt auch bei zentralsymmetrischem Schwerfeld drei allgemeine Grundintegrale der Bewegungsgleichungen gefunden werden können. Das Impulsintegral sowie die geometrische Beziehung sind gegenüber (4) unverändert; beim Energieintegral ist lediglich das veränderte Potential des Schwerfeldes einzusetzen. Im Falle eines

symmetrischen Kreisels ( $A = B$ ) läßt sich ein viertes Integral finden, so daß die Lösung der Bewegungsgleichungen auf Quadraturen zurückgeführt werden kann. Für einen Kreisel von allgemeiner Form hat BELETZKI nachweisen können, daß permanente Drehungen nur möglich sind, wenn die Drehachse in die Verbindungslinie von Anziehungszentrum  $M$  und Bezugspunkt  $O$  fällt. Eine bemerkenswerte Abweichung von den bekannten Ergebnissen bei homogenem Schwerfeld tritt bezüglich der Stabilität dieser Drehbewegungen ein: die Drehung um die Achse des größten Hauptträgheitsmoments ist stets stabil, die Drehung um die mittlere Hauptträgheitsachse ist stets instabil, aber die Drehung um die kleinste Hauptträgheitsachse ist stabil bzw. instabil, je nachdem die Drehgeschwindigkeit  $\omega$  einen bestimmten Grenzwert  $\omega_0$  über- oder unterschreitet.

Ausführlichere Untersuchungen über die Möglichkeit permanenter Drehungen eines unsymmetrischen Kreisels mit  $r_s \neq 0$  im inhomogenen Schwerfeld hat POSHARIZKI [36] durchgeführt. In Verallgemeinerung der STAUEschen Ergebnisse konnte er zeigen, daß auch jetzt die kinetisch möglichen Achsen permanenter Drehungen im Körper einen Kegel bilden.

TABAROVSKI [37] hat einen kardanisch gelagerten schweren Kreisel mit symmetrischem Rotor und einer in die Verbindungslinie  $MO$  fallenden äußeren Kardanachse untersucht und auch hier die Existenz von vier Grundintegralen nachweisen können. Für die regulären Präzessionen wurden die Stabilitätsbedingungen angegeben.

Sehr bemerkenswert ist die Tatsache, daß die Translationsbewegungen in einem nicht-homogenen Schwerfeld nicht mehr unabhängig von den Rotationsbewegungen sind. Hier wird auch der Begriff des Schwerpunktes gegenstandslos, so daß man statt dessen mit dem Massenmittelpunkt rechnen muß. Man erkennt diese Zusammenhänge am einfachsten an dem in Abb. 3 skizzierten Beispiel: es sei  $E$  die als kugelförmig angenommene Erde mit dem Anziehungszentrum  $M$ , und es sei ferner  $S$  ein stabförmiger Satellit mit dem Massenmittelpunkt  $O$ . Die bei der Bewegung des Satelliten auf einer KEPLERschen Kreisbahn entstehenden Zentrifugalkräfte  $Z$  greifen in  $O$  an. Dagegen ist die Wirkungslinie der resultierenden Schwerkraft  $G$  nicht identisch mit der Verbindungslinie  $MO$ , weil die erdnahen Teile des Satelliten eine stärkere Anziehung erfahren als die erdfernen. Da die beiden Kräfte  $Z$  und  $G$  eine Resultierende haben, welche die Bahn-

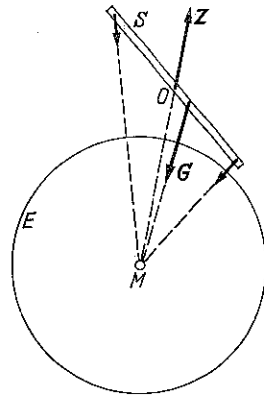


Abb. 3. Stabförmiger Satellit im Erdfeld

bewegung beeinflusst, kann der Satellit im vorliegenden Fall nicht auf einer einfachen KEPLER-Bahn umlaufen. Die Kräfte  $Z$  und  $G$  erzeugen gerade den Anteil  $M_1$  des Moments von Gl. (20).

Auf diese Zusammenhänge hat DUBOSCHIN [38] in einer Reihe von Arbeiten hingewiesen. Er hat in völliger Allgemeinheit die Bewegungsgleichungen für ein System von  $n$  Körpern angeschrieben, die sich gegenseitig nach dem Gravitationsgesetz anziehen. Man erhält ein System von  $6n$  gegenseitig miteinander verkoppelten Bewegungsgleichungen, mit denen bisher freilich nur die allereinfachsten Fälle

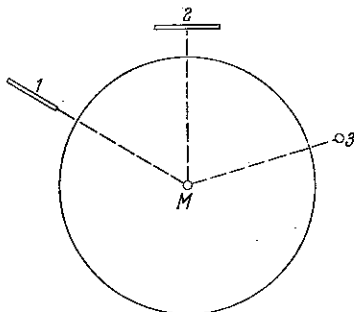


Abb. 4  
Lagen der Satelliten auf der Kreisbahn

konkreter berechnet werden konnten. DUBOSCHIN hat gezeigt, daß für ein Zwei-Körper-System aus Kugel und Stab drei partikuläre Lösungen der allgemeinen Bewegungsgleichungen gefunden werden können, bei denen sich in jedem Falle der Massenmittelpunkt des Satelliten auf einer Kreisbahn um die Erde bewegt. Die möglichen Lagen des Satelliten sind in Abb. 4 gezeichnet. Im Fall 3 steht die Stabachse des Satelliten senkrecht zur Zeichenebene.

Eine Untersuchung der Stabilität dieser drei „regulären Bewegungen“ zeigt, daß nur die Lage 1 stabil ist. Die Instabilität der Lagen 2 und 3 wird durchaus plausibel, wenn man die Größe und Richtung der resultierenden Schwerkraft nach Abb. 3 bedenkt. Die Ergebnisse lassen sich für Satelliten mit beliebigem rotationssymmetrischem Trägheitsellipsoid verallgemeinern, nur hängt dann die Stabilität der regulären Bewegungsformen auch noch vom Verhältnis  $C/A$  der Hauptträgheitsmomente ab.

Daß Effekte der hier beschriebenen Art nicht utopischen Charakter haben, sondern tatsächlich nachweisbar sind, konnte NAUMANN [39] durch überaus sorgfältige Auswertung von an Satelliten gewonnenen Meßergebnissen zeigen.

#### Literatur

- [1] BOGOJAVLENSKI, A. A.: *Prikladnaja Matematika i Mechanika (PMM)* 22, 622—645 (1958).
- [2] MJASNIKOV, P. V.: *Vestnik Moskovsk. Univ.* 9, 47—55 (1954).
- [3] GULJAEV, M. P.: *Akad. Nauk Kazach. SSR* 1, 202—208 (1958).
- [4] ČETAJEV, N. G.: *PMM* 18, 123/24 (1954).
- [5] BÖDEWADT, U. T.: *Math. Z.* 55, 310—320 (1952).
- [6] GRAMMEL, R.: *Ing.-Arch.* 29, 153—159 (1960).
- [7] BRAUNBECK, W.: *Z. angew. Math. Mech.* 33, 174—188 (1953).
- [8] WEIDENHAMMER, F.: *Z. angew. Math. Mech.* 38, 480—483 (1958).
- [9] SVESCHNIKOV, A. A.: *PMM* 26, 402—411 (1962).

- [10] BOITENBERG, J. N.: PMM 24, 463—472 (1960).
- [11] CRANDALL, S. H., u. P. J. BROSENS: J. appl. Mech. 567—570 (1961).
- [12] KOSCHLJAKOV, V. N.: PMM 17, 137—148 (1953).
- [13] BOTTEMA, O.: Ing.-Arch. 28, 425—427 (1960).
- [14] MERKIN, D. R.: Kreisel-Systeme. Moskau 1956, 299 S.
- [15] NOVOSILOV, V. S.: PMM 23, 176—178 (1959).
- [16] DUFFIN, R. J.: Quart. Appl. Math. 18, 215—221 (1960).
- [17] ISCHLINSKI, A. J.: PMM 22, 359—373 (1958).
- [18] LURJE, A. I.: Trudy Leningr. Univ. 7—22 (1960).
- [19] DROFA, V. N.: PMM 25, 941—945 (1961).
- [20] CAPELZ, G.: R. C. Mat. appl. 7, 229—236 (1953).
- [21] KLUMPP, M.: Ing. Arch. 30, 153—159 (1961).
- [22] PORTZKY, H.: J. appl. Mech. 75, 1—8 (1953).
- [23] MAGNUS, K.: Ing. Arch. 28, 184—198 (1959).
- [24] TABAROVSKI, A. M.: PMM 24, 572—574 (1960).
- [25] RUMJANZEW, V. V.: PMM 22, 374—378 u. 499—503 (1958).
- [26] HARLAMOV, S. A.: Doklady Akad. Nauk 580—582 (1962).
- [27] GRANTHAM, W. D.: NASA T. N. D-803 (1961) 40 S.
- [28] MERIAM, J. L.: Aerospace Eng. 52—58 (1962).
- [29] AMINOV, M. SCH.: Kazan. Avia. Inst. (1959) 116 S.
- [30] COLE, R. D., M. E. EKSTAND u. M. R. O'NEILL: ARS-J. 1446/47 (1961).
- [31] ROBERSON, R. E.: Proc. IX. I.A.F.-Kongreß 33—43 (1958).
- [32] CANNON, R. H.: ARS-J. 32, 61—74 (1962).
- [33] ADAMS, J. J.: NASA T.N. D-905 (1961) 30 S.
- [34] HASELTINE, W. R.: Aerospace Science 543—549 (1962).
- [35] BELETZKI, V. V.: PMM 21, 749—758 (1957).
- [36] POSHARIZKI, G. K.: PMM 23, 792/93 (1959).
- [37] TABAROVSKI, A. M.: PMM 25, 259—264 (1961).
- [38] DUBOSCHIN, G. N.: IUTAM-Symposium, Paris 1962, 9 S.
- [39] NAUMANN, R. J.: IUTAM-Symposium, Paris 1962, 35 S.