

- [16] H. Fabian: Experimentelle Untersuchung der Geschwindigkeitsschwankungen in der Mischungszone eines Freistrahles nahe der Düsenmündung. Bericht Nr. 122 der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, Mülheim (Ruhr). Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen 1960.
- [16] A. Michalke: Akustische Beeinflussung von Freistrahlgrenzschichten. Vortrag auf dem III. Internationalen Kongreß für die Flugwissenschaften (ICAS III), Stockholm 1962.
- [17] R. Wille: Modellvorstellungen zum Übergang Laminar-Turbulent. Bericht Nr. 113 der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, Mülheim (Ruhr) 1960. Heft 72 der Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen. Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen 1960.
- [18] J. Tyndall: On the action of sonorous vibrations on gaseous and liquid jets. Phil. Mag. (4) 33 (1867), S. 375–391.
- [19] M. Dubois: Jets gazeux sensibles aux sons et aux ultrasons. Publ. Sci. Techn. Min. Air No. 249 (1951).
- [20] E. J. Richards: Some recent developments in jet noise research. Proc. 3rd Intern. Congress of Acoustics (1960).
- [21] R. Wille: Über Strömungserscheinungen im Übergangsbereich von geordneter zu ungeordneter Bewegung. Jahrbuch Schiffbautechn. Ges. 46 (1952), S. 176–186.
- [22] F. R. Hama et al.: On the transition from laminar to turbulent flow. J. Appl. Phys. 28 (1957), S. 388–394.

(Eingegangen am 21. 1. 1963)

Kurt Magnus, Stuttgart

DK 629.19  
551.507.362.2  
521.4

## Der Stabsatellit in einem radialsymmetrischen Schwerfeld

*Übersicht:* Unter vereinfachenden Voraussetzungen wird ein Sonderfall des allgemeinen Zwei-Körper-Problems behandelt, bei dem der eine Körper eine homogene Kugel, der andere ein beliebiger starrer Körper, vorwiegend von Stabform, ist. Mit Ausnahme der Gravitationskräfte werden alle äußeren Kräfte vernachlässigt. Bahn- und Drehbewegungen können dann im allgemeinen nicht mehr getrennt voneinander behandelt werden. Für die Bahnbewegungen ergeben sich geringe Abweichungen von der klassischen Keplerbewegung zweier Massenpunkte. Die Drehbewegungen des Satelliten werden wesentlich durch Schweremomente beeinflusst, die stets dann wirksam sind, wenn der Satellit kein kugelförmiges Trägheitsellipsoid besitzt. Einige für ein Hantelmodell bekannte Ergebnisse können hier für Stabsatelliten verallgemeinert werden.

*Summary:* A special case of the general two-body-problem is treated with certain simplifying restrictions: one body shall be a homogeneous sphere, the other is an arbitrary rigid body, which for special considerations is assumed to be rod-shaped. External forces, except those arising from gravity, are neglected. In this case translational and rotational motions generally cannot be treated separately. The translational motions are slightly different from the classical Kepler motion of two mass points. The rotational motions of the satellite are considerably influenced by gravitational torques, arising if the ellipsoid of inertia of the satellite is not spherical. It can be shown that some results derived for a dumbbell-shaped satellite are valid for rod-shaped satellites too.

*Résumé:* En supposant des conditions simplifiantes, un cas spécial du problème général des deux corps est traité: un corps est une sphère homogène, et l'autre un corps arbitraire rigide dont la forme prédominante est celle d'une barre. A l'exception des forces de gravitation, toutes les forces extérieures sont négligées. Les mouvements de translation et de révolution ne peuvent, en général, pas être traités séparément. Les mouvements de translation diffèrent légèrement du mouvement classique de deux points masse selon Kepler. La force rotatrice due à la gravitation, qui est effective lorsque l'ellipse d'inertie du satellite n'est pas sphérique, influence considérablement les mouvements de révolution d'un satellite. Quelques résultats dérivés pour un satellite en forme d'une haltère sont également valables pour des satellites en forme d'une barre.

### 1. Problemstellung

Solange man sich in der Mechanik der Satelliten vorwiegend für die Bahnen von Körpern mit nahezu kugelförmigem Trägheitsellipsoid interessiert, ist die klassische Keplerbewegung im allgemeinen ausreichend. Für stab- oder scheibenförmige Körper müssen, insbesondere wenn deren Drehbewegungen untersucht werden sollen, die Grundgleichungen des allgemeineren Zwei-Körper-Problems herangezogen werden. Sie bilden ein System von Differentialgleichungen, das die kinetischen Gleichungen für Bahn- und Drehbewegungen (Kräfte- und Momentengleichungen) mit den zur Beschreibung der Raumlage des Satelliten notwendigen kinematischen Gleichungen verknüpft.

Durch die folgenden Betrachtungen soll ein Beitrag zum Verständnis der recht komplizierten Bewegungen geleistet werden, wobei vorwiegend das Verhalten eines stabförmigen Satelliten untersucht werden soll. Dabei wird folgendes vorausgesetzt:

1. Kräfte und Momente, die vom Widerstand in der erweiterten Atmosphäre, von Magnetfeldern oder vom

Strahlungsdruck abhängen, werden vernachlässigt. Einzige äußere Kraft auf den Satelliten soll die Schwerkraft sein.

2. Es soll die klassische Newtonsche Mechanik und das Newtonsche Gravitationsgesetz gelten.
3. Es wird ein reines Zwei-Körper-Problem behandelt; Einflüsse anderer Himmelskörper werden vernachlässigt.
4. Die Erde wird als homogene Kugel (oder als aus homogenen Kugelschalen aufgebaut) betrachtet.
5. Der gemeinsame Massenmittelpunkt von Erde und Satellit ist in Ruhe.
6. Der Satellit ist ein starrer Körper.

In einzelnen Abschnitten wird weiterhin wie folgt eingeschränkt:

- a) Die Abmessungen des Satelliten sind klein im Vergleich zum Erdradius.
- b) Der Satellit ist ein Stab, für dessen Hauptträgheitsmomente die Beziehungen  $A = B$ ,  $C = 0$  gelten.

Das so umrissene Problem ist gegenüber der Wirklichkeit vereinfacht, jedoch läßt es sich bei dem heutigen Stand unserer Kenntnisse nur in dieser Vereinfachung mathematisch klar formulieren und bietet dadurch Aussicht auf verlässliche Lösungen. Da bei der Bewegung von Satelliten Effekte von Einfluß sein können, die in der terrestrischen Mechanik völlig vernachlässigbar sind, ist bei Näherungsbetrachtungen besondere Vorsicht geboten. Das zeigt sich beispielsweise an der Tatsache, daß der Begriff des Schwerpunktes auf Satelliten nicht mehr anwendbar ist. Der resultierende Vektor der Schwerkraft kann nämlich je nach Form und Raumlage des Satelliten Wirkungslinien besitzen, die sich nicht in einem Punkte schneiden.

Das hier formulierte Teilproblem der Satellitenbewegung ist bereits von verschiedenen Autoren aufgegriffen und untersucht worden. So hat Roberson [1] die auf einen Satelliten wirkenden Schweremomente bezüglich des Massenmittelpunktes in sehr allgemeiner Weise berechnet. Er hat weiterhin [2] Gleichungen für die Drehbewegungen eines Satelliten – sogar mit bewegten Massen im Innern – aufgestellt, jedoch keine Lösungen angegeben. In einer Serie von Veröffentlichungen hat Duboschin [3, 4] allgemeine Gleichungen für das  $n$ -Körper-Problem ausgerechnet, aus denen dann für ein spezielleres Zwei-Körper-Problem drei Sonderlösungen abgeleitet wurden. Von diesen Sonderlösungen wird im Abschnitt 3 noch ausführlicher zu sprechen sein. Für ein vereinfachtes Zwei-Massen-Modell des Satelliten (Hantelmodell) hat Davis [5] mögliche Schwingungen um die stabile Lage untersucht, bei der die Verbindungslinie der beiden Massen näherungsweise zum Anziehungszentrum weist. Darüber hinausgehend haben Stocker und Vachino [6] die möglichen Bewegungen des Hantelmodells auch auf elliptischen Umlaufbahnen untersucht.

In der vorliegenden Arbeit sollen die notwendigen Grundgleichungen in einer von den genannten Autoren abweichenden Form angegeben und für den Fall kleiner Satellitenabmessungen umgeformt werden. Die unmittelbare Verwendung der Kraft- und Momentengleichungen macht eine sehr durchsichtige Vektorformulierung möglich. Auch bezüglich der kinematischen Gleichungen soll hier insofern ein anderer Weg eingeschlagen werden, als die Verwendung der Eulerschen Winkel vermieden wird. Die Deutung der Ergebnisse wird dadurch vielleicht etwas anschaulicher. Vorwiegend sollen die von Duboschin gefundenen Sonderlösungen auf anderem Wege abgeleitet und näher diskutiert werden. Dabei lassen sich zugleich einige von Davis für das Hantelmodell gefundene Ergebnisse für Stabsatelliten erweitern.

## 2. Die allgemeinen Grundgleichungen

Im folgenden werden die in Bild 1 angegebenen Ortsvektoren  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_E$ ,  $\mathbf{r}_S$ ,  $\mathbf{r}'$  verwendet. Sie geben die Abstände

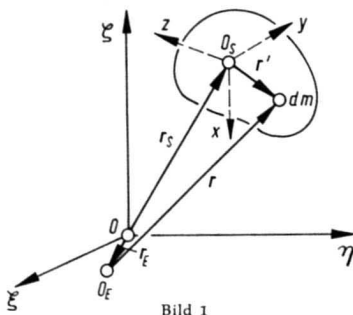


Bild 1

zwischen dem gemeinsamen Massenmittelpunkt O von Erde und Satellit, den Massenmittelpunkten von Erde  $O_E$  und Satellit  $O_S$  und einem Massenteilchen  $dm$  des Satelliten an. Später werden Komponenten dieser Vektoren in zwei Koordinatensystemen benötigt, im Inertialsystem  $\xi, \eta, \zeta$  mit dem Fixpunkt O als Ursprung sowie im körperfesten System  $x, y, z$  mit dem Ursprung im Massenmittelpunkt  $O_S$  des Satelliten. Ist  $m_E$  die Masse der Erde,  $m_S$  die Masse des Satelliten und  $m = m_E + m_S$  die Gesamtmasse, dann gilt

$$m_E \mathbf{r}_E + m_S \mathbf{r}_S = 0,$$

$$(1) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_S - \mathbf{r}_E + \mathbf{r}' = \frac{m}{m_E} \mathbf{r}_S + \mathbf{r}' = \mathbf{r}_a + \mathbf{r}',$$

mit

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_S - \mathbf{r}_E = \frac{m}{m_E} \mathbf{r}_S$$

als dem Abstand der beiden Punkte  $O_E$  und  $O_S$ .

Auf ein Massenteilchen  $dm$  des Satelliten wirken Gravitationskräfte und innere Kräfte  $d\mathbf{K}_i$ , so daß das dritte Newtonsche Grundgesetz in der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{r}_S + \mathbf{r}') dm = \\ = (\ddot{\mathbf{r}}_S + \ddot{\mathbf{r}}') dm = d\mathbf{K} = -\gamma \frac{m_E dm}{r} \mathbf{r} + d\mathbf{K}_i. \end{cases}$$

Dabei ist  $\gamma$  die Gravitationskonstante, die wegen der Beziehung

$$(3) \quad \gamma m_E = g_0 R^2$$

auch durch erdgebundene Größen ausgedrückt werden kann;  $g_0$  ist der Betrag der Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche,  $R$  ist der Erdradius. Integriert man (2) über den Satelliten, so bleibt wegen der Beziehungen

$$\int_S d\mathbf{K}_i = 0, \quad \int_S \ddot{\mathbf{r}}' dm = 0$$

die Gleichung

$$(4) \quad \ddot{\mathbf{r}}_S + \frac{\gamma m_E}{m_S} \int \frac{\mathbf{r} dm}{r^3} = 0.$$

Ein zweite Gleichung läßt sich aus dem Gleichgewicht der Momente ableiten. Ist  $\mathbf{D}_0$  der Vektor des Dralls des Satelliten und  $\mathbf{M}_0$  der Vektor des auf den Satelliten wirkenden Momentes, beide Größen bezüglich des Fixpunktes O genommen, so gilt der Drallsatz:

$$(5) \quad \mathbf{D}_0 = \mathbf{M}_0$$

mit

$$\mathbf{D}_0 = \int [(\mathbf{r}_S + \mathbf{r}') \times \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_S + \mathbf{r}')] dm,$$

$$\mathbf{M}_0 = \int (\mathbf{r}_S + \mathbf{r}') \times d\mathbf{K}.$$

Wegen

$$\int \mathbf{r}' dm = 0, \quad \int \dot{\mathbf{r}}' dm = 0$$

sowie mit dem Drall

$$\mathbf{D}_S = \int (\mathbf{r}' \times \dot{\mathbf{r}}') dm$$

bezüglich des Punktes  $O_S$  hat man

$$\mathbf{D}_0 = m_S (\mathbf{r}_S \times \dot{\mathbf{r}}_S) + \mathbf{D}_S.$$

Andererseits gilt wegen

$$\int (\mathbf{r}_S + \mathbf{r}') \times d\mathbf{K}_i = 0$$

für das Moment

$$\mathbf{M}_0 = -\gamma m_E \int \frac{(\mathbf{r}_S + \mathbf{r}') \times \mathbf{r}}{r^3} dm.$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (4) kann damit (5) in die Form

$$(6) \quad \dot{\mathbf{D}}_S = -\gamma m_E \int \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}}{r^3} dm$$

gebracht werden. Dies ist der Drallsatz für den bewegten Massenmittelpunkt  $O_S$  des Satelliten als Bezugspunkt.

Die Gleichung (6) soll noch auf ein körperfestes Koordinatensystem transformiert werden. Ist  $\omega$  der Vektor der Drehung des Satelliten gegenüber dem Inertialsystem, dann gilt:

$$(7) \quad \frac{d\mathbf{D}_S}{dt} = \frac{d'\mathbf{D}_S}{dt} - \mathbf{D}_S \times \omega = -\gamma m_E \int \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}}{r^3} dm.$$

Der Strich am Differentiationszeichen gibt dabei die zeitliche Ableitung im drehenden System an. Berücksichtigt man noch, daß für den körperfesten Vektor  $\mathbf{r}'$  die Beziehung  $\dot{\mathbf{r}}' = \omega \times \mathbf{r}'$  gilt, dann kann der Drall des Satelliten durch

$$(8) \quad \mathbf{D}_S = \int [\mathbf{r}' \times (\omega \times \mathbf{r}')] dm$$

ausgedrückt werden.

Die Vektorgleichungen (4) und (7) sind Bestimmungsgleichungen für die Vektoren  $\mathbf{r}_S$  und  $\omega$ . Durch Lösen der Gleichungen können die Lage des Satellitenpunktes  $O_S$  im Raum und der Bewegungszustand des Satelliten bestimmt werden. Will man außerdem noch die räumliche Orientierung berechnen, so müssen die entsprechenden kinematischen Beziehungen herangezogen werden. Sind  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  die Einheitsvektoren in Richtung der Achsen des körperfesten Bezugssystems, so gilt:

$$(9) \quad \mathbf{r}' = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z,$$

$$(10) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_x = \omega \times \mathbf{e}_x, \quad \dot{\mathbf{e}}_y = \omega \times \mathbf{e}_y, \quad \dot{\mathbf{e}}_z = \omega \times \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = 1, \quad \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = 0 \quad \text{für } i \neq j \\ (i, j = x, y, z). \end{cases}$$

Diese Beziehungen reichen aus, um die neun Richtungs-cosinus der körperfesten Achsen und damit die Lage des Satelliten im Raum zu bestimmen.

An Stelle der neun noch voneinander abhängigen Richtungs-cosinus ist es oft zweckmäßiger, mit einem System von drei unabhängigen Winkeln zu arbeiten. Die bekannten Eulerschen Winkel  $\varphi, \psi, \vartheta$  sind jedoch im vorliegenden Fall nicht zu empfehlen, da sie für  $\vartheta = 0$  ihre Eindeutigkeit verlieren. Will man Bewegungen in der Umgebung dieser singulären Lage untersuchen, dann kann besser ein System  $\varphi, \psi, \vartheta$  mit  $\delta = \pi/2 - \vartheta$  nach Bild 2 verwendet werden. Solange  $|\delta| < \pi/2$  bleibt, ist die Eindeutigkeit der Winkel gesichert.

Die Transformationsmatrix zwischen körperfestem  $x, y, z$ - und raumfestem  $\xi, \eta, \zeta$ -System ist:

$$(11) \quad \begin{cases} \begin{array}{c|c|c|c} & \xi & \eta & \zeta \\ \hline x & \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \sin \delta & \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \sin \delta & \sin \varphi \cos \delta \\ \hline y & -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \sin \delta & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \sin \delta & \cos \varphi \cos \delta \\ \hline z & \sin \psi \cos \delta & -\cos \psi \cos \delta & \sin \delta \end{array} \end{cases}$$

Die körperfesten Drehungskomponenten lassen sich durch die Winkeländerungen wie folgt ausdrücken:

$$(12) \quad \begin{cases} \omega_x = \dot{\psi} \sin \varphi \cos \delta - \dot{\delta} \cos \varphi, \\ \omega_y = \dot{\psi} \cos \varphi \cos \delta + \dot{\delta} \sin \varphi, \\ \omega_z = \dot{\psi} \sin \delta + \dot{\varphi}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (4), (7) und (10) bilden ein System 12. Ordnung. Es kann zwar durch Verwendung von Impuls- und Energie-Integralen reduziert werden, ist aber dennoch nicht geschlossen lösbar. Die besonderen Schwierigkeiten für die Lösung sind vor allem in der Tatsache begründet, daß die vorkommenden Integrale nicht nur von der Massenverteilung des Satelliten, sondern auch von seiner räumlichen Orientierung abhängen. Dadurch kommt eine Verkopplung zwischen Bahn- und Drehbewegungen zustande, so daß eine gesonderte Berechnung dieser beiden Bewegungsformen nicht mehr allgemein möglich ist.

### 3. Sonderlösungen für einen Stabsatelliten

Für das spezielle Zwei-Körper-Problem einer kugelförmigen Erde und eines stabförmigen Satelliten wurden drei sogenannte reguläre Bewegungsformen von Duboshin angegeben. Der Massenmittelpunkt des Satelliten bewegt sich in allen drei Fällen mit konstanter Geschwindigkeit auf einer ebenen Kreisbahn um die Erde. Die möglichen räumlichen Orientierungen des Stabes sind dabei wie folgt:

- I. Die Stabachse steht senkrecht auf der Bahnebene.
- II. Die Stabachse ist tangential zur Bahnkurve.
- III. Die Stabachse geht stets durch den Erdmittelpunkt.

Diese Bewegungsformen können als partikuläre Lösungen aus den Gleichungen (4) und (7) herausgelesen werden. Hierzu soll das körperfeste Koordinatensystem so gewählt werden, daß die Stablängsachse zur  $z$ -Achse wird. Damit wird  $\mathbf{r}' = \mathbf{e}_z z$ . Ein Massenelement des Stabes ist  $dm = \mu dz$ , und es wird über  $z$  von  $-L$  bis  $L$  integriert, wenn die Gesamtlänge des Stabes  $2L$  ist.

Fall I: Es gilt:

$$(13) \quad \begin{cases} r_a = \text{const}, \quad \mathbf{r}_a \mathbf{r}' = 0, \\ r^2 = r_a^2 + r'^2 = r_a^2 + z^2, \\ \int \frac{\mathbf{r} dm}{r^3} = \mu \mathbf{r}_a \int_{-L}^L \frac{dz}{(r_a^2 + z^2)^{3/2}} + \\ \quad + \mu \mathbf{e}_z \int_{-L}^L \frac{z dz}{(r_a^2 + z^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

Das zweite dieser Integrale verschwindet, da der Integrand ungerade ist und der Integrationsbereich symmetrisch zum Nullpunkt liegt. Also wird

$$(14) \quad \int \frac{\mathbf{r} dm}{r^3} = \mu \mathbf{r}_a \left[ \frac{z}{r_a^2 \sqrt{r_a^2 + z^2}} \right]_{-L}^L = \frac{m_S \mathbf{r}_a}{r_a^2 \sqrt{r_a^2 + L^2}}$$

mit  $2 L \mu = m_S$ . Das Integral

$$(15) \quad \left\{ \int \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}}{r^3} dm = \int \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}_a}{r^3} dm = \right. \\ \left. = \mathbf{e}_t \mu r_a \int_{-L}^{+L} \frac{z dz}{[r_a^2 + z^2]^{3/2}} \right.$$

verschwindet, da der Integrand wiederum ungerade ist. Somit nehmen die Grundgleichungen (4) bzw. (7) im Fall I die folgende Gestalt an:

$$(16) \quad \ddot{\mathbf{r}}_S + \frac{\gamma m}{r_a^2 \sqrt{r_a^2 + L^2}} \mathbf{r}_S = \ddot{\mathbf{r}}_S + \Omega_I^2 \mathbf{r}_S = 0,$$

$$(17) \quad \frac{d'}{dt} \mathbf{D}_S - \mathbf{D}_S \times \boldsymbol{\omega} = 0.$$

Mit  $r_a = \text{const}$  und damit auch  $\Omega_I = \text{const}$  gibt (16) als Lösung einen Vektor  $\mathbf{r}_S$  von konstanter Länge, der gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega_I$  in der durch die Anfangsgeschwindigkeit und den Erdmittelpunkt festgelegten Ebene umläuft. Die Umlaufzeit ist

$$T_I = \frac{2\pi}{\Omega_I} = 2\pi \sqrt{\frac{r_a^2 \sqrt{r_a^2 + L^2}}{\gamma m}}$$

oder unter Berücksichtigung von (3) und mit  $r_a = R + H$ , wobei  $H$  die Höhe des Satelliten über der Erdoberfläche ist,

$$(18) \quad T_I = T_0 \sqrt{\frac{m_E}{m} \left(1 + \frac{H}{R}\right)^3 \sqrt{1 + \left(\frac{L}{R+H}\right)^2}}.$$

Darin ist

$$(19) \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g_0}}$$

die bekannte *Schulersche* Periode von 84,3 Minuten, die zugleich die kleinste theoretisch mögliche Umlaufzeit für einen Erdsatelliten darstellt.

Gl. (17) ist im vorliegenden Fall stets erfüllt, da  $\mathbf{D}_S = 0$  ist. Mit den Hauptträgheitsmomenten  $A, B, C$  hat man nämlich

$$\mathbf{D}_S = (A\omega_x, B\omega_y, C\omega_z).$$

Darin gilt für den Stab  $A = B, C = 0$ ; andererseits ist  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_z \omega_z$ , da Drehungskomponenten in den anderen Achsen die räumliche Orientierung des Stabes verändern würden. Man erkennt daher, daß im Falle I der Stab mit beliebiger, aber konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega_z$  um seine Längsachse drehen darf.

Fall II: Da auch hier die Stabachse senkrecht zur Vertikalen, d. h. zur Richtung des Vektors  $\mathbf{r}_a$  steht, gelten die Beziehungen (13) weiterhin. Somit hat man für die Integrale (14) und (15) sowie für die Grundgleichungen (16) und (17) dieselben Ergebnisse wie im Fall I. Es ist also  $\Omega_{II} = \Omega_I$  und damit  $T_{II} = T_I$ .

Auch im Falle II darf der Stab mit beliebiger, jedoch konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega_z$  um seine Längsachse rotieren. Dieses Ergebnis folgt unmittelbar aus (17).

Mit

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$$

und

$$\mathbf{D}_S = (A\omega_x, A\omega_y, 0)$$

hat man die drei skalaren Gleichungen

$$\dot{\omega}_x - \omega_y \omega_z = 0,$$

$$\dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z = 0,$$

$$\dot{\omega}_z = 0.$$

Sie haben die mögliche Lösung

$$\omega_z = \text{const},$$

$$\omega_x = \Omega_{II} \cos \omega_z t,$$

$$\omega_y = \Omega_{II} \sin \omega_z t,$$

die mit den geometrischen Bedingungen des Falles II verträglich ist.

Fall III: Die körperfeste  $z$ -Achse fällt hier stets mit der Richtung des Vektors  $\mathbf{r}_a$  zusammen. Daher ist

$$\mathbf{r}' = \mathbf{e}_z r' = \mathbf{e}_z z,$$

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{e}_z r_a,$$

$$r = r_a + r' = r_a + z.$$

Wegen  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_a + \mathbf{r}' = \mathbf{e}_z (r_a + z)$  wird  $\mathbf{r}' \times \mathbf{r} = 0$ , so daß das in (7) vorkommende Integral wiederum verschwindet. Für das Integral von Gl. (4) folgt

$$\int \frac{\mathbf{r} dm}{r^3} = \mu \mathbf{e}_z \int_{-L}^L \frac{dz}{(r_a + z)^2} = \mathbf{e}_z \frac{m_S}{r_a^2 - L^2}.$$

Somit hat man im vorliegenden Fall die Grundgleichungen

$$(20) \quad \ddot{\mathbf{r}}_S + \frac{\gamma m_E}{r_S (r_a^2 - L^2)} \mathbf{r}_S = \ddot{\mathbf{r}}_S + \Omega_{III}^2 \mathbf{r}_S = 0,$$

$$(21) \quad \frac{d'}{dt} \mathbf{D}_S - \mathbf{D}_S \times \boldsymbol{\omega} = 0.$$

Lösung der ersten dieser Gleichungen ist ein gleichförmiger Umlauf des Satelliten auf einer Kreisbahn mit der Umlaufzeit

$$(22) \quad T_{III} = \frac{2\pi}{\Omega_{III}} = T_0 \sqrt{\frac{m_E}{m} \left(1 + \frac{H}{R}\right)^3 \left[1 - \left(\frac{L}{R+H}\right)^2\right]}.$$

Bezüglich der Drehbewegungen des Satelliten gelten in diesem Fall genau die gleichen Überlegungen, wie sie im Fall II angestellt wurden. Der Stab darf daher auch im Fall III mit beliebiger konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega_z$  um seine Längsachse drehen.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß sich in den drei Sonderfällen kreisförmige Bahnen für den Massenmittelpunkt des Satelliten ergeben. Die Umlaufzeiten sind gegenüber der *Schulerschen* Periode verändert durch

a) den Höheneinflussfaktor

$$\sqrt{\left(1 + \frac{H}{R}\right)^3},$$

b) den Masseneinflussfaktor

$$\sqrt{\frac{m_E}{m}},$$

c) den Lageneinflussfaktor

$$\sqrt[4]{1 + \left(\frac{L}{R+H}\right)^2} \quad \text{für die Fälle I und II,}$$

$$\sqrt[4]{1 - \left(\frac{L}{R+H}\right)^2} \quad \text{für Fall III.}$$

Der Höheneinflussfaktor ist nicht vernachlässigbar und wird bei allen Bahnberechnungen berücksichtigt. Der



Massenfaktor kann vernachlässigt werden, da er auch bei Satelliten von der Masse einer Tonne nur um etwa  $10^{-22}$  von der Einheit abweicht. Der Lagenfaktor erreicht bei einer Länge des Satelliten von 10 m Werte, die um etwa  $10^{-6}$  von der Einheit abweichen. Für spezielle Untersuchungen könnte dieser Einfluß durchaus Bedeutung erlangen. Im Fall III ist der Stabsatellit schneller, in den Fällen I und II langsamer als ein Massenpunkt auf der gleichen Umlaufbahn.

Schließlich sei noch bemerkt, daß jede beliebige Lage, bei der die Stabachse horizontal, also senkrecht zum Vektor  $\mathbf{r}_a$  bleibt, dieselben Bewegungsgleichungen (16) und (17) ergibt wie in den Sonderfällen I und II. Jedoch hat Gl. (17) – abgesehen von den betrachteten beiden Sonderfällen – keine Lösungen, die die anfänglich gegebene Konfiguration beizubehalten gestattete. Das ist leicht einzusehen: Wegen  $C = 0$  liegt der Drallvektor  $\mathbf{D}_S$  stets senkrecht zur Stabachse, außerdem ist er senkrecht zum Vektor  $\mathbf{r}_a$ .  $\mathbf{D}_S$  müßte also entsprechend dem Umlauf des Satelliten seine Richtung ändern. Dazu wäre jedoch ein Moment notwendig, das in (17) nicht vorhanden ist.

#### 4. Näherungen für den Fall kleiner Parameter $L/R$

Künstliche Satelliten haben Abmessungen  $L$ , die als klein gegenüber dem Erdradius  $R$  angesehen werden können. Es liegt daher nahe, die beiden Integranden in (4) und (7)

$$\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \text{und} \quad \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}}{r^3}$$

in Potenzreihen nach dem kleinen Parameter  $\varepsilon = L/R$  zu entwickeln. Bei Vernachlässigung höherer Potenzen von  $\varepsilon$  kommt man so zu Näherungen für die allgemeinen Grundgleichungen (4) und (7). Sie sollen hier in einer allgemeinen, nicht für den Stabsatelliten spezialisierten Form angegeben werden.

Für den Vektor  $\mathbf{r}$  gilt:

$$(23) \quad \begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}_a + \mathbf{r}' \quad \text{mit} \quad r' \ll r_a, \\ r^2 = r_a^2 + r'^2 + 2(\mathbf{r}_a \mathbf{r}'), \\ \frac{1}{r^3} = r_a^{-3} - 3(\mathbf{r}_a \mathbf{r}') r_a^{-5} - \frac{3}{2} r'^2 r_a^{-5} + \\ \quad + \frac{15}{2} (\mathbf{r}_a \mathbf{r}')^2 r_a^{-7} + \dots \end{cases}$$

Damit folgt:

$$(24) \quad \begin{cases} \int \frac{\mathbf{r} dm}{r^3} = \frac{m_S \mathbf{r}_a}{r_a^3} - \frac{3}{2} \mathbf{r}_a r_a^{-5} \int r'^2 dm + \\ \quad + \frac{15}{2} \mathbf{r}_a r_a^{-7} \int (\mathbf{r}_a \mathbf{r}')^2 dm - \\ \quad - 3 r_a^{-5} \int \mathbf{r}' (\mathbf{r}_a \mathbf{r}') dm + \dots \end{cases}$$

Die Komponenten im körperfesten  $x, y, z$ -System seien

$$\mathbf{r}' = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z, \\ \mathbf{r}_a = r_a (\mathbf{e}_x \gamma_x + \mathbf{e}_y \gamma_y + \mathbf{e}_z \gamma_z),$$

wobei  $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$  die Richtungs cosinus des Vektors  $\mathbf{r}_a$  – also der Vertikalen – gegenüber den körperfesten Achsrichtungen sind. Es soll fernerhin angenommen werden, daß das körperfeste System ein Hauptachsensystem mit dem Massenmittelpunkt als Ursprung ist. Dann verschwinden die Deviationsmomente:

$$(25) \quad \int xy dm = \int yz dm = \int zx dm = 0.$$

Die Hauptträgheitsmomente sollen in üblicher Weise durch

$$A = \int (y^2 + z^2) dm,$$

$$B = \int (z^2 + x^2) dm,$$

$$C = \int (x^2 + y^2) dm$$

bezeichnet werden. Gebraucht wird ferner das polare Trägheitsmoment

$$P = \int (x^2 + y^2 + z^2) dm = \frac{1}{2} (A + B + C).$$

Damit folgt:

$$(26) \quad \begin{cases} \int \mathbf{r}'^2 dm = P, \\ \int (\mathbf{r}_a \mathbf{r}')^2 dm = r_a^2 [P - (\gamma_x^2 A + \gamma_y^2 B + \gamma_z^2 C)], \\ \int \mathbf{r}' (\mathbf{r}_a \mathbf{r}') dm = \\ \quad = P \mathbf{r}_a - r_a (\mathbf{e}_x \gamma_x A + \mathbf{e}_y \gamma_y B + \mathbf{e}_z \gamma_z C). \end{cases}$$

Aus (4) bekommt man nun unter Berücksichtigung von (24) und (26) sowie der Beziehung

$$\mathbf{r}_S = \frac{m_E}{m} \mathbf{r}_a$$

die folgende Grundgleichung für  $\mathbf{r}_S$ :

$$(27) \quad \begin{cases} \ddot{\mathbf{r}}_S + \frac{\gamma m_E^3}{m^2} \frac{\mathbf{r}_S}{r_S^3} + \\ \quad + \frac{3 \gamma m_E^5}{m_S m^4} \left[ P - \frac{5}{2} (\gamma_x^2 A + \gamma_y^2 B + \gamma_z^2 C) \right] \frac{\mathbf{r}_S}{r_S^5} + \\ \quad + \frac{3 \gamma m_E^5}{m_S m^4} \frac{1}{r_S^4} (\mathbf{e}_x \gamma_x A + \mathbf{e}_y \gamma_y B + \mathbf{e}_z \gamma_z C) + \dots = 0. \end{cases}$$

Die gegenüber der Keplerbewegung hinzukommenden Glieder können erstens die Umlaufzeiten, zweitens die Bahnformen verändern. Es sind nichtebene Bahnen möglich, da das letzte Glied in (27) eine im allgemeinen nicht-zentrale Kraft repräsentiert. Nur im Fall eines Satelliten mit kugelförmigem Trägheitsellipsoid  $A = B = C$  wird die bekannte Keplerbewegung erhalten, da sich dann die beiden Zusatzglieder herausheben. Man erkennt leicht, daß die beiden die Trägheitsmomente enthaltenden Zusatzglieder etwa um den Faktor  $\varepsilon^2$  kleiner sind als das zweite Glied. Die genannten Effekte sind daher von zweiter Ordnung klein und können häufig vernachlässigt werden. In einer Theorie langfristiger Bahnstörungen wird man sie jedoch berücksichtigen müssen.

In entsprechender Weise läßt sich nun auch die für die Drehbewegungen geltende Grundgleichung (7) umformen. Unter Berücksichtigung von  $\int \mathbf{r}' dm = 0$  und bei Vernachlässigung der dritten und höheren Potenzen von  $r'$  bekommt man so nach Einsetzen von (23)

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}}{r^3} dm &= \int \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}_a}{r^3} dm = \\ &= -\frac{3}{r_a^5} \int (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}_a) (\mathbf{r}' \mathbf{r}_a) dm + \dots = \\ &= -\frac{3}{r_a^3} [\mathbf{e}_x \gamma_x \gamma_z (C - B) + \\ &\quad + \mathbf{e}_y \gamma_z \gamma_x (A - C) + \mathbf{e}_z \gamma_x \gamma_y (B - A)] + \dots \end{aligned}$$

Damit geht die Grundgleichung (7) für die Drehbewegungen über in

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d' \mathbf{D}_S}{dt} - \mathbf{D}_S \times \boldsymbol{\omega} &= \frac{3 \gamma m_E^4}{m^3 r_S^3} [\mathbf{e}_x \gamma_y \gamma_z (C - B) + \\ &+ \mathbf{e}_y \gamma_z \gamma_x (A - C) + \mathbf{e}_z \gamma_x \gamma_y (B - A)] + \dots \end{aligned} \right.$$

Auch hier kann eine Abschätzung der Größenordnungen der einzelnen Glieder Aufschluß über den möglichen Einfluß des Zusatzgliedes auf der rechten Seite geben: Das Coriolisglied auf der linken Seite hat die Größenordnung  $m_S L^2 \omega^2$ . Berücksichtigt man nun die Beziehung (3), so findet man für das Glied der rechten Seite eine Größenordnung

$$m_S L^2 \frac{g_0}{R}.$$

Nun ist  $\sqrt{g_0/R}$  gerade die Schulerfrequenz  $\Omega$  – also näherungsweise die Winkelgeschwindigkeit des Fahrstrahls  $\mathbf{r}_a$  während des Bahnlaufes. Die beiden betrachteten Glieder verhalten sich also näherungsweise wie  $\omega^2$  zu  $\Omega^2$ . Daraus ist zu erkennen, daß kurzzeitige Nutationsbewegungen des Satelliten, deren Perioden einen Betrag bis zu etwa einer Minute haben, mit der verkürzten Gleichung (28) unter Vernachlässigung der rechten Seite berechnet werden können. Für die bei manchen Satelliten wichtigen langfristigen Taumelbewegungen kann das Zusatzglied auf der rechten Seite jedoch nicht vernachlässigt werden. Das kann besonderen Einfluß für astronomische Laboratorien oder ähnliche Satelliten haben, bei denen die Einhaltung einer bestimmten Raumlage für die Funktion des Gerätes entscheidend ist.

Das Zusatzglied auf der rechten Seite von (28) verschwindet, wenn entweder  $A = B = C$  ist, also der Satellit ein kugelförmiges Trägheitsellipsoid besitzt, oder wenn eine der Hauptachsen des Satelliten vertikal ist. In diesem Fall verschwinden zwei der Richtungscosinus. Hat der Satellit ein symmetrisches Trägheitsellipsoid, dann kann jede beliebige Achse, die senkrecht zur Symmetrieachse steht, als Hauptachse angesehen werden.

Mit der Abkürzung

$$(29) \quad K = \frac{3 \gamma m_E^4}{m^3 r_S^3}$$

erhält man bei Aufspaltung der Vektorgleichung (28) in Komponenten das folgende System:

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} A \dot{\omega}_x - (B - C) \omega_y \omega_z &= K \gamma_y \gamma_z (C - B), \\ B \dot{\omega}_y - (C - A) \omega_z \omega_x &= K \gamma_z \gamma_x (A - C), \\ C \dot{\omega}_z - (A - B) \omega_x \omega_y &= K \gamma_x \gamma_y (B - A). \end{aligned} \right.$$

### 5. Kleine Störungen der regulären Bewegungen eines Stabsatelliten

Im folgenden sollen nicht nur hinsichtlich der Massenverteilung, sondern auch hinsichtlich der Bewegungen Einschränkungen insofern vorgenommen werden, als die Abweichungen von den im Abschnitt 3 behandelten regulären Bewegungen klein bleiben sollen.

Außerdem soll die von zweiter Ordnung kleine Rückwirkung der Drehbewegungen des Satelliten auf seine Bahn hier vernachlässigt werden. Es wird also angenommen, daß die Bahn eine ebene Kreisbahn ist, die mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen wird. Dann genügt es, die Gleichungen für die Drehbewegungen (28) bzw. (30) zu untersuchen. Für einen Stabsatelliten ( $A = B, C = 0$ ) folgt aus der dritten der Gleichungen (30) sofort  $\omega_z = \text{const.}$  Die ersten beiden Gleichungen reduzieren sich auf

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{\omega}_x - \omega_y \omega_z &= -K \gamma_y \gamma_z, \\ \dot{\omega}_y + \omega_z \omega_x &= K \gamma_z \gamma_x. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichungen sollen nun in Differentialgleichungen für die Lagenwinkel umgewandelt werden. Dabei ist das raumfeste Koordinatensystem  $\xi, \eta, \zeta$  geschickt zu wählen, so daß die Winkel  $\varphi, \psi, \delta$  eine bequeme Kennzeichnung der Raumlage des Satelliten gestatten. Der Winkel  $\varphi$  soll stets die Drehung um die Stablängsachse angeben. Es zeigt sich, daß dieser Winkel in allen drei Sonderfällen ohne Einfluß ist und eliminiert werden kann. Die anderen beiden Winkel  $\psi$  und  $\delta$  sind entweder selbst klein, oder aber sie hängen in einfacher Weise mit den als klein angenommenen Abweichungen von den regulären Lagen zusammen.

Fall I: Das raumfeste Koordinatensystem wird so gewählt, daß die Bahn in der  $\xi, \zeta$ -Ebene liegt und der Vektor  $\boldsymbol{\Omega}$  der Drehung des Fahrstrahls  $\mathbf{r}_S$  in die negative  $\eta$ -Richtung fällt (siehe Bild 2). Wird nun die Zeitzählung

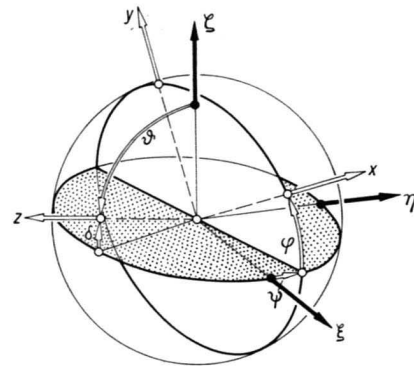


Bild 2

so vorgenommen, daß  $\mathbf{r}_S$  für  $t = 0$  in  $\xi$ -Richtung fällt, dann hat der Einheitsvektor  $\mathbf{e}_v$  in Richtung der Vertikalen im raumfesten System die Komponenten

$$\mathbf{e}_v = (\cos \Omega t, 0, \sin \Omega t).$$

Berücksichtigt man, daß bei kleinen Abweichungen von der regulären Lage die Winkel  $\psi$  und  $\delta$  klein bleiben, dann findet man bei Vernachlässigung quadratisch kleiner Glieder unter Verwendung der Transformationsmatrix (11) für die körperfesten Komponenten von  $\mathbf{e}_v$  die Werte

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_x &= \cos \Omega t \cos \varphi + \sin \Omega t \sin \varphi = \cos(\Omega t - \varphi), \\ \gamma_y &= \sin \Omega t \cos \varphi - \cos \Omega t \sin \varphi = \sin(\Omega t - \varphi), \\ \gamma_z &= \psi \cos \Omega t + \delta \sin \Omega t. \end{aligned} \right.$$

Andererseits ergeben die kinematischen Eulergleichungen (12) die Werte

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin \varphi - \dot{\delta} \cos \varphi, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \cos \varphi + \dot{\delta} \sin \varphi, \\ \omega_z &= \dot{\varphi}. \end{aligned} \right.$$

Mit Einsetzen von (32) und (33) in (31) folgt

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} \ddot{\psi} \sin \varphi - \ddot{\delta} \cos \varphi &= \\ &= K \sin(\Omega t - \varphi) (\psi \cos \Omega t + \delta \sin \Omega t), \\ \ddot{\psi} \cos \varphi + \ddot{\delta} \sin \varphi &= \\ &= K \cos(\Omega t - \varphi) (\psi \cos \Omega t + \delta \sin \Omega t). \end{aligned} \right.$$

Daraus läßt sich  $\varphi$  leicht eliminieren, so daß die folgenden Gleichungen erhalten werden:

$$(35) \quad \begin{cases} \ddot{\psi} = K(\psi \cos^2 \Omega t + \delta \sin \Omega t \cos \Omega t), \\ \ddot{\delta} = K(\psi \sin \Omega t \cos \Omega t + \delta \sin^2 \Omega t). \end{cases}$$

Durch Einführen anderer Winkel lassen sich auch diese Gleichungen noch vereinfachen.  $\psi$  und  $\delta$  beschreiben die Bewegungen des Stabsatelliten bezüglich des raumfesten Systems  $\xi, \eta, \zeta$ . Es ist im vorliegenden Fall zweckmäßiger, ein mit dem Fahrstrahl  $r_a$  drehendes Koordinatensystem zu wählen, dessen Achsen in der Bahnebene die Vertikale  $V$  sowie die tangential zur Bahn liegende Horizontale  $H_t$  sind (Bild 3). Betrachtet man die Projek-

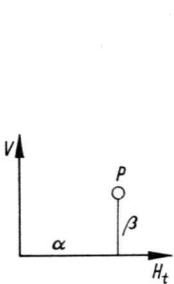


Bild 3

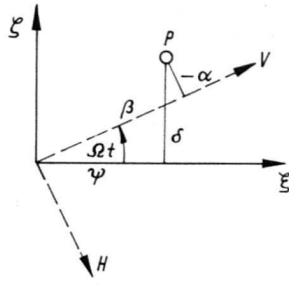


Bild 4

tion  $P$  eines exzentrischen Punktes der Stabachse auf diese Ebene, so kann die Winkelabweichung des Stabes von der regulären Lage durch die horizontale Abweichung  $\alpha$  und die vertikale Abweichung  $\beta$  des projizierten Punktes beschrieben werden. Bei der hier gewählten Zeitählung gilt dann (siehe Bild 4):

$$\begin{aligned} \psi &= \alpha \sin \Omega t + \beta \cos \Omega t, \\ \delta &= -\alpha \cos \Omega t + \beta \sin \Omega t. \end{aligned}$$

Damit geht (35) über in

$$(36) \quad \begin{cases} \ddot{\alpha} - \Omega^2 \alpha - 2 \Omega \dot{\beta} = 0, \\ \ddot{\beta} - (K + \Omega^2) \beta + 2 \Omega \dot{\alpha} = 0. \end{cases}$$

Die Lösung dieses Systems kann in bekannter Weise angegeben werden. Man erhält die charakteristische Gleichung

$$\lambda^4 - \lambda^2(2\Omega^2 - K) + \Omega^2(K + \Omega^2) = 0$$

mit den Lösungen

$$\lambda^2 = \frac{K}{2} - \Omega^2 \pm \frac{K}{2} \sqrt{1 - \frac{8\Omega^2}{K}}.$$

Nun ist nach (16)

$$\Omega^2 = \Omega_1^2 = \frac{\gamma m}{r_a^2 \sqrt{r_a^2 + L^2}} \approx \frac{\gamma m}{r_a^3} = \frac{\gamma m_E^3}{r_s^3 m^2}.$$

Durch Vergleich mit (29) stellt man fest, daß

$$(37) \quad K \approx 3 \Omega^2$$

gilt. Setzt man diesen Wert ein, so erhält man die vier charakteristischen Wurzeln

$$\lambda_n = \Omega (\pm 1,118 \pm i 0,866) \quad (n = 1, 2, 3, 4).$$

Die Bewegung besteht daher aus überlagerten Schwingungen mit einer Schwingungszeit

$$T_s = \frac{2\pi}{0,866 \Omega}.$$

Für erdnahe Satelliten ergibt das  $T_s = 97,3$  Minuten. Diese Schwingungen kommen jedoch nicht recht zur Auswirkung, da sie eine Dämpfungs- bzw. Aufkling-

Zeitkonstante von

$$T_z = \frac{1}{1,118 \Omega}$$

haben, die für erdnahe Satelliten  $T_z = 12,0$  Minuten ergibt. Infolge der stark aufklingenden Schwingungen kann eine vorhandene Anfangsauslenkung während eines einzigen Bahnlaufes um den Faktor

$$e^{\frac{84,3}{12}} \approx 1100$$

vergrößert werden. Die Raumlage des Satelliten ist also im Fall I stark instabil.

Fall II: Jetzt wird das Koordinatensystem so gelegt, daß die Bahn in die  $\xi, \eta$ -Ebene fällt (siehe Bild 2). Für die ungestörte Raumlage des Stabes müßte dann  $\psi = \Omega t$  und  $\delta = 0$  sein. Da Abweichungen von diesen Werten klein bleiben sollen, können jetzt die Größen

$$\alpha = \delta \quad \text{und} \quad \beta = \Omega t - \psi$$

als klein betrachtet werden. Diese Winkel geben wiederum die Lage eines Stabpunktes an, diesmal auf eine aus Vertikale und der horizontalen  $\xi$ -Achse gebildete Ebene projiziert (siehe Bild 5).

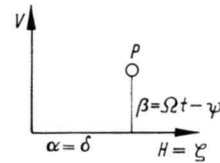


Bild 5

Wenn  $r_s$  für  $t = 0$  in die negative  $\xi$ -Achse fällt, dann sind die raumfesten Komponenten von  $e_r$

$$e_r = (-\cos \Omega t, -\sin \Omega t, 0).$$

Da  $\alpha$  und  $\beta$  klein bleiben sollen, findet man bei Vernachlässigung von Größen zweiter Ordnung als Komponenten im körperfesten System

$$(38) \quad e_v \approx (-\cos \varphi, \sin \varphi, \beta).$$

Mit  $\dot{\psi} = \Omega - \dot{\beta}$  bekommt man aus (12) die Drehungskomponenten

$$(39) \quad \begin{cases} \omega_x = \Omega \sin \varphi - \dot{\alpha} \cos \varphi - \dot{\beta} \sin \varphi, \\ \omega_y = \Omega \cos \varphi + \dot{\alpha} \sin \varphi - \dot{\beta} \cos \varphi, \\ \omega_z = \Omega \alpha + \dot{\varphi}. \end{cases}$$

Nach Einsetzen von (38) und (39) in (31) folgt

$$\begin{aligned} -\ddot{\alpha} \cos \varphi - \ddot{\beta} \sin \varphi - \alpha \Omega^2 \cos \varphi &= -\beta K \sin \varphi, \\ \ddot{\alpha} \sin \varphi - \ddot{\beta} \cos \varphi + \alpha \Omega^2 \sin \varphi &= -\beta K \cos \varphi, \end{aligned}$$

woraus nach Elimination von  $\varphi$  die beiden einfachen Beziehungen

$$(40) \quad \begin{cases} \ddot{\alpha} + \Omega^2 \alpha = 0, \\ \ddot{\beta} - K \beta = 0 \end{cases}$$

resultieren. Mit den Anfangsbedingungen  $\alpha_0, \dot{\alpha}_0, \beta_0, \dot{\beta}_0$  bekommt man die Lösungen

$$(41) \quad \begin{cases} \alpha = \alpha_0 \cos \Omega t + \frac{\dot{\alpha}_0}{\Omega} \sin \Omega t, \\ \beta = \beta_0 \cosh \sqrt{K} t + \frac{\dot{\beta}_0}{\sqrt{K}} \sinh \sqrt{K} t. \end{cases}$$

In der Horizontalrichtung sind demnach ungedämpfte Schwingungen mit der Frequenz des Bahnlaufes mög-

lich. Diese Schwingungen sind jedoch instabil, da die geringste Störung in der Vertikalrichtung (Winkel  $\beta$ ) zu einem aperiodischen Fortschwenken des Stabes führt. Die Zeitkonstante dieser Bewegung ist

$$T_z = \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

Das ergibt mit  $K \approx 3\Omega^2$  für bodennahe Satelliten den Wert  $T_z = 7,8$  min. Ein anfänglicher Fehler in der Vertikalrichtung kann dabei während eines einzigen Bahn-umlaufes um den Faktor

$$e^{\frac{84,3}{7,8}} \approx 50\,000$$

vergrößert werden.

Fall III: Die Bahnebene sei jetzt die  $\eta, \zeta$ -Ebene, und der Stab habe für  $t = 0$  die Richtung der  $\eta$ -Achse. Dann sind die raumfesten Komponenten von  $\mathbf{e}_v$

$$\mathbf{e}_v = (0, \cos \Omega t, \sin \Omega t).$$

Wie man aus Bild 2 erkennen kann, gilt in der ungestörten Lage  $\psi = 0$  und  $\delta = -\Omega t$ . Für die gestörte Bewegung soll  $\delta = \beta - \Omega t$  gesetzt werden, wobei  $\beta$  und  $\psi$  als klein betrachtet werden können. Damit ergeben sich unter Vernachlässigung von Gliedern zweiter und höherer Ordnung:

die körperfesten Komponenten von  $\mathbf{e}_v$

$$\begin{aligned} \gamma_x &= \psi \cos \varphi \cos \Omega t + \beta \sin \varphi, \\ \gamma_y &= -\psi \sin \varphi \cos \Omega t + \beta \cos \varphi, \\ \gamma_z &= -1 \end{aligned}$$

und die Drehkomponenten

$$\begin{aligned} \omega_x &= \Omega \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \cos \Omega t - \dot{\beta} \cos \varphi, \\ \omega_y &= -\Omega \sin \varphi + \dot{\psi} \cos \varphi \cos \Omega t + \dot{\beta} \sin \varphi, \\ \omega_z &= -\dot{\psi} \sin \Omega t + \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Einsetzen in das System (31) ergibt

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} \sin \varphi \cos \Omega t - \ddot{\beta} \cos \varphi &= K(\beta \cos \varphi - \psi \sin \varphi \cos \Omega t), \\ \ddot{\psi} \cos \varphi \cos \Omega t + \ddot{\beta} \sin \varphi &= -K(\beta \sin \varphi + \psi \cos \varphi \cos \Omega t). \end{aligned}$$

Nach Elimination von  $\varphi$  folgt daraus

$$(42) \quad \begin{cases} \ddot{\psi} \cos \Omega t - \ddot{\psi} 2\Omega \sin \Omega t + \psi K \cos \Omega t = 0, \\ \ddot{\beta} + K\beta = 0. \end{cases}$$

Berücksichtigt man nun, daß  $\psi$  eine seitliche Abweichung des Stabes, gemessen in der raumfesten  $\xi, \eta$ -Ebene, ist, dann liegt es nahe, statt dessen mit dem Winkel

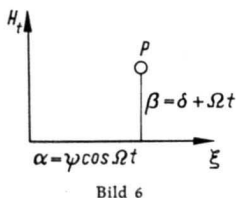


Bild 6

$\alpha = \psi \cos \Omega t$  zu rechnen. Die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  kennzeichnen dann die Abweichung der Projektion eines Stabpunktes auf die Horizontalebene, deren beide Achsen die horizontale Bahntangente  $H_t$  und die  $\xi$ -Achse sind (Bild 6).

Nach Einführen des Winkels  $\alpha$  geht (42) über in

$$(43) \quad \begin{cases} \ddot{\alpha} + (K + \Omega^2)\alpha = 0, \\ \ddot{\beta} + K\beta = 0. \end{cases}$$

Die zu beliebigen Anfangsbedingungen gehörenden Lösungen dieser beiden Gleichungen sind

$$(44) \quad \begin{cases} \alpha = \alpha_0 \cos \sqrt{K + \Omega^2} t + \frac{\dot{\alpha}_0}{\sqrt{K + \Omega^2}} \sin \sqrt{K + \Omega^2} t, \\ \beta = \beta_0 \cos \sqrt{K} t + \frac{\dot{\beta}_0}{K} \sin \sqrt{K} t. \end{cases}$$

Der Satellit kann ungedämpfte Schwingungen in beiden Richtungen ausführen; wegen  $K \approx 3\Omega^2$  verhalten sich die Frequenzen dieser Schwingungen etwa wie  $2 : \sqrt{3}$ . Für erdnahe Bahnen ist die Schwingungszeit für Schwingungen des Stabes

in der Bahnebene:

$$T_\beta = 48,7 \text{ min},$$

senkrecht zur Bahnebene:

$$T_\alpha = 42,2 \text{ min}.$$

Projiziert man einen Stabpunkt auf die Horizontalebene, so würde er eine *Lissajous*-figur beschreiben, die sich nicht schließt. Die Abweichungen von der regulären Lage bleiben jedoch klein, wenn die Anfangsstörungen klein sind; im Fall III ist also die Gleichgewichtslage des Satelliten stabil.

Besonders bemerkenswert an den Ergebnissen dieses Abschnittes ist die Tatsache, daß die genannten Schwingungszeiten und Zeitkonstanten nur unwesentlich von den Abmessungen des Satelliten selbst abhängen. Auch bei sehr kleinen Satelliten darf man daher das Schwerfeld nicht als homogen ansehen, wenn man sich für die langsamen Drehbewegungen interessiert.

## 6. Zusammenfassung

Wegen der endlichen Abmessungen von Satelliten geht die in einem radialsymmetrischen Schwerfeld wirkende resultierende Gravitationskraft im allgemeinen nicht durch den Massenmittelpunkt. Dadurch entsteht erstens ein Moment bezüglich des Massenmittelpunktes und zweitens eine nicht zentrale Kraftkomponente. Dies bewirkt eine Verkopplung der Gleichungen des Satelliten für Bahn- und Drehbewegungen. Beide Bewegungen können im allgemeinen nicht mehr getrennt voneinander behandelt werden. Unter den in der Einleitung aufgezählten einschränkenden Voraussetzungen werden die Bewegungsgleichungen abgeleitet. Zusammen mit den notwendigen kinematischen Gleichungen ergeben sie ein System 12. Ordnung.

Aus den exakten Gleichungen wurden für drei bereits von *Duboschin* angegebene Sonderfälle der Bewegung eines Stabsatelliten die Umlaufzeiten ausgerechnet und diskutiert. Es zeigt sich, daß außer den schon aus der Massenpunktmechanik bekannten Korrekturen für Massenverhältnis und Höhe der Umlaufbahn über der Erdoberfläche bei endlich ausgedehnten Satelliten noch eine Form- und Lagenkorrektur hinzukommt. So läuft ein Stabsatellit, dessen Längsachse stets zum Erdmittelpunkt zeigt, etwas schneller um, als ein tangential zur Bahn liegender Stab, wenn die Massenmittelpunkte in beiden Fällen die gleiche Kreisbahn um die Erde beschreiben.

Eine Reihenentwicklung nach Potenzen des Verhältnisses Satellitenlänge zu Erdradius zeigt, daß die Rückwirkungen der Drehbewegungen auf die Bahn von zweiter



Ordnung klein sind. Sie können dazu führen, daß die Umlaufbahn, abweichend von der bekannten Keplerbewegung, nicht mehr eben ist. Bei den Drehbewegungen sind die Schweremomente vor allem dann zu berücksichtigen, wenn langsame Taumelbewegungen mit Perioden in der Größenordnung des Bahnumlaufs interessieren.

Die Untersuchung gestörter Bewegungen eines Stabsatelliten zeigt, daß ein mit seiner Längsachse zum Erdmittelpunkt zeigender Stabsatellit bei Störungen in der Bahnebene mit einer etwa um den Faktor  $\sqrt{3}$ , bei Störungen senkrecht zur Bahnebene mit einer etwa um den Faktor 2 größeren Frequenz als der Frequenz des Bahnumlaufs ungedämpft schwingen kann. Die anderen beiden kinetisch möglichen Lagen, bei denen die Stabachse entweder senkrecht zur Bahnebene oder aber tangential zur Bahn ist, sind instabil. Vorhandene Anfangsstörungen können sich während eines einzigen Bahnumlaufes bis zum etwa 50 000fachen ihres Anfangswertes aufschaukeln.

## 7. Schrifttum

- [1] R. E. Roberson: Gravitational torque on a satellite vehicle. J. Franklin Inst. **265** (1958), S. 13–22.
- [2] R. E. Roberson: A unified analytical description of satellite motions. Astronautica Acta **5** (1959), S. 347–349.
- [3] G. N. Duboschin: Über die Differentialgleichungen der Bahn- und Drehbewegungen von starren Körpern, die einer gegenseitigen Anziehung unterliegen (russisch). Astr. J. **35** (1958), H. 2.
- [4] G. N. Duboschin: Über einen Sonderfall der Bahn- und Drehbewegungen zweier Körper (russisch). Astr. J. **36** (1959), S. 153–163.
- [5] W. R. Davis: Determination of a unique attitude for an earth satellite. Proc. Amer. Astron. Soc. (Jan. 1958), S. 10.1–10.15.
- [6] A. J. Stocker and R. F. Vachino: The two-dimensional librations of a dumbbell-shaped satellite in a uniform gravitational field. Proc. Amer. Astron. Soc. (Aug. 1958), S. 37.1–37.20.

(Eingegangen am 23. 1. 1963)

Günter Spengler und Albert Lepie, München

DK 621.455  
541.126.2  
546.175–323  
621.43.019.8

## Über Raketentreibstoffe mit hypergolen Eigenschaften

### II. Zündverzögerungen von flüssigen Treibstoffkombinationen mit Salpetersäure als Oxydator

*Übersicht:* Nach einer theoretischen Betrachtung des hypergolen Zündvorganges werden einige Ergebnisse von Zündverzögerungsmessungen mit Salpetersäure als Oxydator mitgeteilt. Zunächst werden die Einflüsse einiger apparativer Parameter auf den hypergolen Zündverzögerung untersucht. Danach werden die Zündverzögerungen zahlreicher, aus zwei Komponenten bestehender Brennstoffsysteme in Abhängigkeit von ihrem Mischungsverhältnis sowie der katalytischen Einflüsse von  $\text{Fe}^{+++}$ -Ionen beschrieben. Die Zündverzögerungsmessungen wurden in einer Zweistrahlapparatur durchgeführt.

*Summary:* After a theoretical discussion of hypergol ignition, some of the results are given as they are obtained from measuring ignition delay, using nitric acid as the oxidizing agent. First, some of the effects arising from instrumentation are investigated with regard to hypergol ignition delay. Then, the ignition delay of several fuels with two components is described as it depends on the ratio of the mixture. The catalytic effect of  $\text{Fe}^{+++}$ -ions is also explained. The measurements of ignition delays have been carried out by means of a twin-jet apparatus.

*Résumé:* Après considération du processus d'allumage hypergolique, quelques résultats des mesures du délai d'allumage, avec de l'acide nitrique comme oxydant, sont donnés. D'abord, quelques influences des instruments sur le délai d'allumage hypergolique sont étudiées. Ensuite les délais d'allumage de plusieurs systèmes de carburant à deux composants sont décrits en fonction de leur taux de mélange. L'effet catalytique d'ions  $\text{Fe}^{+++}$  est également expliqué. Les mesures du délai d'allumage étaient exécutées à l'aide d'un appareil à deux jets.

#### 1. Einleitung

Bei Raketentreibstoffen mit hypergolen Eigenschaften ist der Zündverzögerung von entscheidender Bedeutung. Die Zündverzögerungszeiten sind sowohl eine Funktion der chemischen Konstitution der Reaktionspartner als auch der Reaktionsbedingungen. Nachdem es gelungen ist, eine geeignete Meßapparatur zur Bestimmung der Zündverzögerungen zu bauen [1], die mit geringsten Substanzmengen reproduzierbare und praxisnahe Werte liefert, konnte eine Zahl von Treibstoffpaarungen auf ihr Zündverhalten geprüft werden. Im folgenden wird über Flüssigflüssig-Kombinationen berichtet werden, wobei als Oxydator immer Salpetersäure eingesetzt wurde, während die Treibstoffkomponente variiert wurde.

#### 2. Theoretische Betrachtung des hypergolen Zündvorganges

Die hypergole Zündung kann mit heftigem Knall oder auch mit ruhiger Entflammung eintreten; dazwischen gibt es alle Übergangsstufen. Der Zündvorgang könnte etwa wie folgt veranschaulicht werden:

Beim Zusammentreffen der flüssigen Reaktionspartner zum Zeitpunkt  $t = 0$  beginnt die Reaktion. Die dabei entstehenden gasförmigen intermediären Produkte nehmen einen Teil der Reaktionsenergie auf, ein anderer Teil wird durch reine Verdampfungsvorgänge verbraucht. Die plötzlich entstehenden Gasmengen erzeugen eine Druckwelle, die sich etwa kugelförmig ausbreitet. Die expandierenden gasförmigen Produkte sind zunächst