

BEITRÄGE ZUR UNTERSUCHUNG DER DREHBEWEGUNGEN
STARRER SATELLITEN AUF KREISFÖRMIGEN UMLAUFBAHNEN

1. EINFÜHRENDES

Mit der fortschreitenden Verfeinerung der Satellitentechnik gewinnt neben der Form und der Lage der Umlaufbahn auch die räumliche Orientierung des Satelliten auf dieser Bahn an Bedeutung. Zahlreiche Veröffentlichungen der letzten Jahre sind daher den Untersuchungen der Drehbewegungen von Satelliten gewidmet worden. Obwohl einige Teilprobleme gelöst werden konnten, sind wir jedoch zur Zeit noch weit davon entfernt, die für die Drehbewegungen von Satelliten wichtigen Gesetzmäßigkeiten voll zu übersehen. Wenn sich auch der Satellitenpraktiker mit einer ad-hoc-Lösung für den Einzelfall zufrieden geben kann, so erscheint doch eine grundsätzliche Untersuchung dieses Problemkreises wünschenswert. Es interessieren in diesem Zusammenhang zum Beispiel die stabilen Raumorientierungen, die ein Satellit ohne aktive Lagenregelung einzuhalten imstande ist. Über einige damit zusammenhängende Ergebnisse soll hier berichtet werden.

Es soll ein Zwei-Körper-Problem mit der Massenanziehung entsprechend dem Newtonschen Gesetz als der einzigen wirkenden Kraft unter den folgenden Voraussetzungen und Vereinfachungen behandelt werden: Die Erde wird als aus homogenen Kugelschalen aufgebaut betrachtet, ihre Abplattung wird also vernachlässigt; der Satellit sei ein starrer Körper, dessen Abmessungen klein gegenüber dem Erdradius sind; die Umlaufbahn wird als kreisförmig vorausgesetzt. Wie verschiedene Autoren (siehe z. B. [1, 2, 3]) gezeigt haben, ist die Kreisbahn auch für beliebige Lagen des Satelliten im Rahmen einer Theorie erster Ordnung eine mögliche Lösung der Bewegungsgleichungen.

Soweit bekannt, konnten exakte Lösungen der miteinander verkoppelt auftretenden Gleichungen für die Bahn- und die Drehbewegungen bisher nur von G. N. Duboschin [1] angegeben werden. Seine Lösungen, die in der Arbeit [2] näher diskutiert sind, beziehen sich auf einen Satelliten von stabförmiger Gestalt. Erweiterungen dieser Lösungen für Satelliten von allgemeiner Gestalt, freilich als Näherungen für den Fall kleiner Abmessungen der Satelliten, sind vor allem V. V. Beletskij [3] und D. B. DeBra [4] zu verdanken. Sonderfälle von drallstabilisierten Satelliten wurden von W. T. Thomson [5] und in der Arbeit [6] diskutiert. Für ein vereinfachtes Zwei-Massen-Modell (Hantel-Satellit) konnte W. B. Klempere [7] eine spezielle Lösung finden.

Im vorliegenden Bericht soll das Problem unter den genannten Voraussetzungen so allgemein aufgegriffen werden, daß die erwähnten bisherigen Lösungen als Spezialfälle enthalten sind. Dabei ergeben sich außer einer Erweiterung der Klempere'schen Lösung einige Erkenntnisse, die für die praktische Anwendung der Satelliten von Interesse sein können.

2. DIE AUSGANGSGLEICHUNGEN

Wie in [2] gezeigt wurde, können die Bewegungsgleichungen eines starren Satelliten im radialsymmetrischen Schwerfeld in die Vektorform gebracht werden:

$$(1) \quad \ddot{\mathbf{r}}_a + \frac{\gamma m}{m_S} \int \frac{\mathbf{r} dm}{r^3} = 0,$$

$$(2) \quad \frac{d' \mathbf{D}_S}{dt} - \mathbf{D}_S \times \omega = - \gamma m_E \int \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}}{r^3} dm.$$

Hierin bedeuten:

- $\mathbf{r}_a, \mathbf{r}, \mathbf{r}'$ die aus Bild 1 ersichtlichen Abstandsvektoren zwischen dem Massenmittelpunkt O_E der Erde, dem Massenmittelpunkt O_S des Satelliten und einem beliebigen Punkt P des Satelliten,
- \mathbf{D}_S den Drall des Satelliten bezogen auf O_S ,
- ω den Vektor der Winkelgeschwindigkeit des Satelliten,
- γ die Gravitationskonstante,
- m_E die Masse der Erde,
- m_S die Satellitenmasse,
- m die Gesamtmasse ($= m_E + m_S$),
- d'/dt die zeitliche Ableitung, bezogen auf ein satellitenfestes Koordinatensystem.

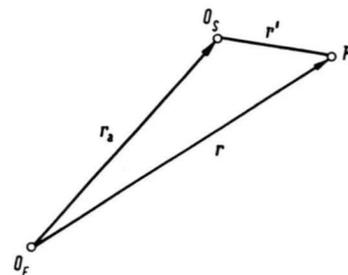


Bild 1. Abstandsvektoren zwischen dem Anziehungszentrum O_E und Punkten des Satelliten.

Gleichung (1) gibt das Gleichgewicht der Kräfte, Gleichung (2) das der Momente wieder. Die Integrale sind in beiden Fällen über den ganzen Satelliten zu erstrecken.

Die Schwierigkeiten für die Lösung der Gleichungen (1) und (2) sind vor allem in der Tatsache zu sehen, daß die beiden Integrale nicht nur von der Massenverteilung des Satelliten, sondern auch von seiner räumlichen Orientierung abhängen. Dadurch kommt eine Verkopplung zwischen beiden Gleichungen zustande, die einerseits zu einer nicht streng den Kepler-Gesetzen gehorchenden Bahn für den Massenmittelpunkt des Satelliten und andererseits zu einer Rückwirkung der Bahn auf die Drehbewegungen des Satelliten führt. Nur für spezielle Formen (Stab) und

spezielle Lagen (Stabachse vertikal, tangential zur Bahn, senkrecht zur Bahnebene) konnten deshalb exakte Lösungen der Gleichungen gefunden werden [1]. Alle weiterreichenden Versuche zur Lösung des Gleichungssystems gehen von Reihenentwicklungen der beiden Integrale aus, bei denen nach Potenzen des Verhältnisses von Satellitenlänge und Erdradius entwickelt wird. Dabei zeigt sich, daß die Rückwirkung der Satellitenlage auf die Bahn von zweiter Ordnung klein ist, also für viele Fälle vernachlässigt werden kann. Bei der Gleichung für die Drehbewegungen (2) kann die Integration gliedweise durchgeführt werden. Unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung und bei Verwendung eines körperfesten Hauptachsensystems x, y, z als Bezugssystem geht dann (2) in die Skalarform über

$$(3) \quad \begin{cases} A \dot{\omega}_x + (C - B) \omega_y \omega_z = (C - B) G \gamma_y \gamma_z, \\ B \dot{\omega}_y + (A - C) \omega_z \omega_x = (A - C) G \gamma_z \gamma_x, \\ C \dot{\omega}_z + (B - A) \omega_x \omega_y = (B - A) G \gamma_x \gamma_y. \end{cases}$$

A, B, C sind darin die Hauptträgheitsmomente des Satelliten bezüglich seines Massenmittelpunktes, $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ sind die Richtungscosinus der Vertikalen im körperfesten x, y, z -System, also die Komponenten des vertikalen Einheitsvektors \mathbf{r}_a/r_a in x, y, z . G ist eine noch vom Bahnradius r_a abhängende Konstante:

$$(4) \quad G = \frac{3 \gamma m_E}{r_a^3} \approx 3 \Omega^2,$$

die — wiederum unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung — gleich dem Dreifachen des Quadrats der Bahnumauffrequenz Ω ist, siehe z. B. [2], Gl. (37).

Durch Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung ist die Aufgabe auf ein reines Kreislerproblem reduziert worden: Es kommt darauf an, die Eulerschen Bewegungsgleichungen (3) eines starren Körpers für das spezielle, auf der rechten Seite stehende Schweremoment zu lösen.

Da nicht nur der durch den Drehungsvektor ω gekennzeichnete Bewegungszustand des Satelliten, sondern vor allem seine Orientierung im Raum interessiert, muß das System (3) noch durch die kinematischen Gleichungen ergänzt werden, die den Zusammenhang zwischen den Komponenten von ω einerseits und von $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ andererseits mit den die Raumlage kennzeichnenden Winkeln beschreiben. Wir wählen als Lagenwinkel die Winkel φ, ψ, δ , nach Bild 2. Sie gestatten, die Verdrehungen des satellitenfesten Systems x, y, z gegenüber einem raumfesten Inertialsystem ξ, η, ζ eindeutig zu beschreiben. Von den bekannten Eulerschen Winkeln unterscheiden sich die hier verwendeten Winkel dadurch, daß an Stelle des Eulerschen Winkels ϑ der Komplementwinkel $\delta = 90^\circ - \vartheta$ verwendet wird.

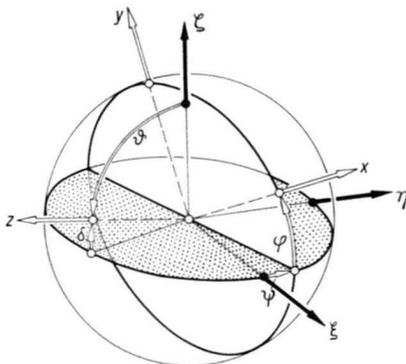


Bild 2. Beziehungen zwischen dem ξ, η, ζ -System und dem im Satelliten festen Koordinatensystem x, y, z .

Mit den gewählten Winkeln gelten die folgenden Beziehungen für die Komponenten der Drehgeschwindigkeit:

$$(5) \quad \begin{cases} \omega_x = \dot{\psi} \sin \varphi \cos \delta - \dot{\delta} \cos \varphi, \\ \omega_y = \dot{\psi} \cos \varphi \cos \delta + \dot{\delta} \sin \varphi, \\ \omega_z = \dot{\psi} \sin \delta + \dot{\varphi}. \end{cases}$$

Für die Richtungscosinus der Vertikalen erhält man unter der Voraussetzung, daß als Bahnebene die ξ, ζ -Ebene gewählt wird und daß die Zeitählung in dem Augenblick beginnt, an dem die ξ -Achse in die Richtung von \mathbf{r}_a fällt (siehe Bild 3), die Ausdrücke

$$(6) \quad \begin{cases} \gamma_x = (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \sin \delta) \cos \Omega t + \sin \varphi \cos \delta \sin \Omega t, \\ \gamma_y = -(\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \sin \delta) \cos \Omega t + \cos \varphi \cos \delta \sin \Omega t, \\ \gamma_z = \sin \psi \cos \delta \cos \Omega t + \sin \delta \sin \Omega t. \end{cases}$$

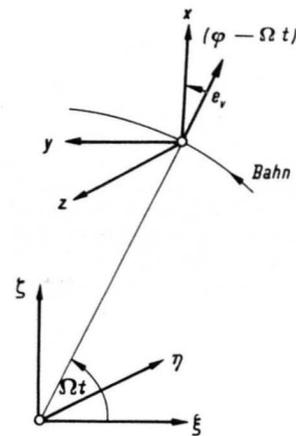


Bild 3. Lagebeziehungen zwischen raumfestem und körperfestem Koordinatensystem.

Es sollen schließlich noch die nur von den Hauptträgheitsmomenten abhängigen Formfaktoren

$$a = \frac{C - B}{A}, \quad b = \frac{A - C}{B}, \quad c = \frac{B - A}{C}$$

eingeführt werden, die wegen der bekannten Beziehungen zwischen den Hauptträgheitsmomenten eines starren Körpers

$$(7) \quad A + B \geq C, \quad B + C \geq A, \quad C + A \geq B$$

nur Werte zwischen -1 und $+1$ annehmen können. Damit geht (3) über in

$$(8) \quad \begin{cases} \dot{\omega}_x + a \omega_y \omega_z = a G \gamma_y \gamma_z, \\ \dot{\omega}_y + b \omega_z \omega_x = b G \gamma_z \gamma_x, \\ \dot{\omega}_z + c \omega_x \omega_y = c G \gamma_x \gamma_y. \end{cases}$$

3. PARTIKULÄRE LÖSUNGEN DER AUSGANGSGLEICHUNGEN

Sechs triviale Lösungen des Gleichungssystems (8) sind leicht zu erkennen; sie entsprechen den sechs möglichen Lagen, bei denen die Hauptachsen des Satelliten in die folgenden drei ausgezeichneten Richtungen fallen: Verbindungslinie vom Anziehungszentrum zum Massenmittelpunkt des Satelliten (Vertikale), Bahntangente und Normale zur Bahnebene. Für diese sechs Lagen verschwinden jeweils zwei Drehungskomponenten und zwei Richtungscosinus.

Die dritte Drehungskomponente ist gleich der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω des Fahrstrahls r_a , der dritte Richtungs-cosinus wird gleich der Einheit.

Wir wollen für die weiteren Untersuchungen von einer nicht trivialen Lösung des Systems (8) ausgehen, die durch die folgenden Werte der Variablen gekennzeichnet ist:

$$(9) \quad \begin{cases} \omega_{x0} = \omega_{y0} = 0, & \omega_{z0} \neq 0, \\ \delta_0 = \psi_0 = 0, & \varphi_0 = \int \omega_{z0} dt, \\ \gamma_{x0} = \cos(\varphi_0 - \Omega t), & \gamma_{y0} = -\sin(\varphi_0 - \Omega t), \gamma_{z0} = 0. \end{cases}$$

Dies entspricht einer Drehbewegung des Satelliten, bei der die z-Achse stets senkrecht zur Bahnebene bleibt. Wie man durch Einsetzen in (8) feststellt, muß der Winkel φ_0 dann der Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi}_0 = -cG \sin(\varphi_0 - \Omega t) \cos(\varphi_0 - \Omega t)$$

genügen, die durch Einführen der Variablen $x = 2(\varphi_0 - \Omega t)$ in

$$(10) \quad \ddot{x} + cG \sin x = 0$$

überführt werden kann. Das ist die Gleichung eines ebenen Schwebpendels. Der Satellit verhält sich also ähnlich einem solchen Pendel, wobei die Hauptachse mit dem kleineren der beiden Hauptträgheitsmomente A und B der Pendellängsachse entspricht. Zum Beispiel wird für $B > A$ der Faktor $c > 0$, so daß die x-Achse um die Vertikale pendeln kann. Bei der Lösung von (10) sind bekanntlich zwei Typen zu unterscheiden (siehe z. B. [8]):

a) Pendelbewegungen um die Gleichgewichtslage $x = 0$ bzw. $\varphi_G = \Omega t$,

b) Rotationsbewegungen (überschlagendes Pendel), bei denen \dot{x} das Vorzeichen nicht wechselt.

Fa11 a): Die Lösung ist hier

$$\sin \frac{x}{2} = k_1 \operatorname{sn}(\sqrt{cG}t; k_1)$$

oder

$$(11) \quad \varphi_0(t) = \Omega t + \arcsin [k_1 \operatorname{sn}(\sqrt{cG}t; k_1)]$$

mit dem Modul

$$k_1 = \frac{\omega_a}{\sqrt{cG}} < 1$$

für die *Jacobische* elliptische Funktion sn . ω_a ist die relative Winkelgeschwindigkeit der Achse mit dem kleineren Hauptträgheitsmoment beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage $\varphi_G = \Omega t$. Pendelbewegungen ergeben sich nur für solche Anfangswerte ω_a , bei denen $k_1 < 1$ bleibt.

Die Lösung (11), die eine Verallgemeinerung des von *Klemperer* [7] angegebenen Falles bildet, zeigt Pendelschwingungen des Satelliten in der Bahnebene an mit der Amplitude:

$$(12) \quad \Phi = [\varphi_0(t) - \Omega t]_{\max} = \arcsin k_1 = \arcsin \frac{\omega_a}{\sqrt{cG}}$$

Die Schwingungszeit ist:

$$(13) \quad T_1 = \frac{4}{\sqrt{cG}} K(k_1).$$

K ist darin das noch vom Modul k_1 und damit von der Pendelamplitude abhängige vollständige elliptische Integral erster Gattung. Aus (11) folgt für die Drehgeschwindigkeit

$$(14) \quad \omega_{z0} = \dot{\varphi}_0 = \Omega + \omega_a \operatorname{cn}(\sqrt{cG}t; k_1).$$

Aus (12) erkennt man, daß die maximale Amplitude — abweichend von den Verhältnissen bei einem ebenen Schwebpendel — nur 90° beträgt. Das ist verständlich, da die horizontale Lage der Achse des kleineren Hauptträgheitsmomentes eine statisch instabile Gleichgewichtslage ist. Das Satellitenpendel durchläuft ja bei einem vollen Umlauf zwei stabile und zwei instabile Gleichgewichtslagen.

Die kleinste mögliche Schwingungszeit folgt aus (13) wegen (4) für kleine Amplituden ($K = \pi/2$) eines Stabsatelliten ($c = 1$) bei erdnahen Bahnen zu $T_1 = 48,7$ Minuten. Für größere Amplituden, erdfernere Bahnen oder andere Satellitenformen wird T_1 entsprechend größer.

Fa11 b): Für den überschlagenden Satelliten gilt die Lösung

$$\sin \frac{x}{2} = \operatorname{sn}(\omega_a t; k_2)$$

oder

$$(15) \quad \varphi_0(t) = \Omega t + \arcsin [\operatorname{sn}(\omega_a t; k_2)]$$

mit dem Modul

$$k_2 = \frac{1}{k_1} = \frac{\sqrt{cG}}{\omega_a} < 1.$$

Die Zeit für einen Überschlag errechnet sich zu

$$(16) \quad T_2 = \frac{4}{\omega_a} K(k_2).$$

Durch Differentiation von (15) erhält man die später benötigte Drehgeschwindigkeitskomponente

$$(17) \quad \omega_{z0} = \dot{\varphi}_0 = \Omega + \omega_a \operatorname{dn}(\omega_a t; k_2).$$

Für einen bezüglich der z-Achse symmetrischen Satelliten ($c = 0$) folgt daraus wegen $k_2 = 0$ einfach $\omega_{z0} = \Omega + \omega_a$. Für Satelliten von allgemeiner Form ist dieser Drehgeschwindigkeit noch eine Schwankung überlagert.

Zwischen den beiden betrachteten Fällen a und b existiert ein nicht weiter interessierender Grenzfall mit der Lösung

$$\varphi_0(t) = \Omega t + \arcsin \left[\tanh \frac{t}{\omega_a} \right].$$

Hierzu gehört die Anfangsbedingung $\omega_a = \sqrt{cG}$. Der Satellit dreht dabei so, daß sich die Achse des kleineren Hauptträgheitsmomentes asymptotisch der instabilen horizontalen Gleichgewichtslage nähert, bei der sie tangential zur Bahn steht.

Die hier angegebenen partikulären Lösungen können nur dann praktisches Interesse beanspruchen, wenn sie auch realisierbar, also stabil sind. Das soll im folgenden näher untersucht werden.

4. REALISIERBARE RAUMLAGEN FÜR STARRE SATELLITEN OHNE LAGENREGELUNG

Für die angegebene partikuläre Lösung soll nun eine Nachbarlösung untersucht werden, die durch kleine Werte der Variablen $\delta, \psi, \tilde{\varphi}$ mit $\varphi = \varphi_0 + \tilde{\varphi}$ gekennzeichnet ist. Im Sinne der Methode kleiner Schwingungen sollen die Ausgangsgleichungen bezüglich dieser Winkel linearisiert werden. Dann gehen die Systeme (5) und (6) über in

$$(18) \quad \begin{cases} \omega_x = \dot{\psi} \sin \varphi - \dot{\delta} \cos \varphi, \\ \omega_y = \dot{\psi} \cos \varphi + \dot{\delta} \sin \varphi, \\ \omega_z = \dot{\varphi}, \end{cases}$$

$$(19) \begin{cases} \gamma_x = \cos(\varphi - \Omega t), \\ \gamma_y = -\sin(\varphi - \Omega t), \\ \gamma_z = \psi \cos \Omega t + \delta \sin \Omega t. \end{cases}$$

Setzt man diese Werte in die dritte der Gleichungen (8) ein, so bleibt in erster Näherung eine von δ und ψ unabhängige Bestimmungsgleichung für die Abweichung $\tilde{\varphi}$ übrig. Ihre Lösung interessiert nicht weiter, da die Summe

$$\varphi = \varphi_0 + \tilde{\varphi}$$

wieder eine partikuläre Lösung vom Typ (11) oder (15) mit etwas geänderten Anfangsbedingungen ergibt.

Die ersten beiden Gleichungen des Systems (8) gehen mit (18) und (19) über in

$$(20) \begin{cases} \dot{\psi} \sin \varphi - \dot{\delta} \cos \varphi + \dot{\varphi} (1+a) (\psi \cos \varphi + \delta \sin \varphi) = \\ = -aG \sin(\varphi - \Omega t) (\psi \cos \Omega t + \delta \sin \Omega t), \\ \dot{\psi} \cos \varphi + \dot{\delta} \sin \varphi - \dot{\varphi} (1-b) (\psi \sin \varphi - \delta \cos \varphi) = \\ = bG \cos(\varphi - \Omega t) (\psi \cos \Omega t + \delta \sin \Omega t). \end{cases}$$

Dieses System kann durch Einführen der neuen Veränderlichen

$$(21) \begin{cases} \alpha = \psi \cos \Omega t + \delta \sin \Omega t, \\ \beta = \psi \sin \Omega t - \delta \cos \Omega t \end{cases}$$

übersichtlicher geschrieben werden. Als Ergebnis einer Elimination der Größen δ und ψ bekommt man

$$(22) \begin{cases} \cos(\varphi - \Omega t) \{ \ddot{\alpha} [\tilde{\varphi} (1+a) - 2\Omega] + \\ + \ddot{\beta} + \beta [\Omega \dot{\tilde{\varphi}} (1+a) - \Omega^2] \} + \\ + \sin(\varphi - \Omega t) \{ \ddot{\alpha} + a [\Omega \dot{\tilde{\varphi}} (1+a) - \Omega^2 + aG] - \\ - \ddot{\beta} [\tilde{\varphi} (1+a) - 2\Omega] \} = 0, \\ \cos(\varphi - \Omega t) \{ \ddot{\alpha} + a [\Omega \dot{\tilde{\varphi}} (1-b) - \Omega^2 - bG] - \\ - \ddot{\beta} [\tilde{\varphi} (1-b) - 2\Omega] \} - \\ - \sin(\varphi - \Omega t) \{ \ddot{\alpha} [\tilde{\varphi} (1-b) - 2\Omega] + \\ + \ddot{\beta} + \beta [\Omega \dot{\tilde{\varphi}} (1-b) - \Omega^2] \} = 0. \end{cases}$$

Hierin sind noch die Werte für $\dot{\varphi}$ einzusetzen, die wegen der Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung durch $\dot{\varphi}_0$ ersetzt und aus (14) bzw. (17) genommen werden können. Wenn die darin vorkommenden elliptischen Funktionen durch die ersten Glieder ihrer Reihenentwicklung nach trigonometrischen Funktionen ersetzt werden, dann folgt im Fall a

$$(23) \quad \dot{\varphi}_0 = \Omega + \omega_a (1-q) \cos \frac{\pi \sqrt{cG} t}{K} + \dots,$$

im Fall b

$$(24) \quad \dot{\varphi}_0 = \Omega + \omega_a (1-4q) + 4q \omega_a \cos \frac{\pi \omega_a t}{K} + \dots$$

Darin ist

$$q = \exp \left[-\pi \frac{K(\sqrt{1-k^2})}{K(k)} \right]$$

ein vom Modul k abhängiger Parameter, der für $k \neq 1$ im allgemeinen recht klein ist (es gilt z. B. $q < 0,1$ für $k < 0,8$). Der Ersatz der exakten Werte (14) und (17) durch die ersten Glieder der Reihen (23) und (24) dürfte daher nur in einem verhältnismäßig kleinen Bereich von Anfangsbedingungen ω_a , die zu $k \approx 1$ führen, unzulässig sein. Auf jeden Fall wird man in den Grenzfällen $\omega_a \ll \Omega$ (Fall a)

und $\omega_a \gg \Omega$ (Fall b), ferner für $c \ll 1$ mit guten Ergebnissen rechnen können, da dann $k \ll 1$ wird. Davon soll später Gebrauch gemacht werden.

4.1. Symmetrische Satelliten mit Drall senkrecht zur Bahnebene

Ein Satellit soll symmetrisch genannt werden, wenn zwei seiner Hauptträgheitsmomente gleich groß sind. Ist $A = B$, dann gilt $a = -b$ und $c = 0$. Damit vereinfacht sich das System (22) beträchtlich und spaltet sich in zwei lineare Differentialgleichungen auf, die noch dazu konstante Koeffizienten besitzen, da für symmetrische Satelliten $\dot{\varphi}$ konstant wird:

$$(25) \begin{cases} \ddot{\alpha} + a [\Omega \dot{\varphi} (1+a) - \Omega^2 + aG] - \\ - \dot{\beta} [\tilde{\varphi} (1+a) - 2\Omega] = 0, \\ \ddot{\alpha} [\tilde{\varphi} (1+a) - 2\Omega] + \ddot{\beta} + \\ + \beta [\Omega \dot{\varphi} (1+a) - \Omega^2] = 0. \end{cases}$$

Führt man in (25) zur Abkürzung

$$(26) \begin{cases} c_{11} = \Omega \dot{\varphi} (1+a) - \Omega^2 + aG, \\ c_{12} = \dot{\varphi} (1+a) - 2\Omega, \\ c_{22} = \Omega \dot{\varphi} (1+a) - \Omega^2 \end{cases}$$

ein, so lautet die charakteristische Gleichung dieses Systems

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + c_{11} & -\lambda c_{12} \\ \lambda c_{12} & \lambda^2 + c_{22} \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(27) \quad \lambda^4 + P\lambda^2 + Q = 0$$

mit den Koeffizienten

$$P = \dot{\varphi}^2 (1+a)^2 - 2\Omega \dot{\varphi} (1+a) + aG + 2\Omega^2,$$

$$Q = \dot{\varphi}^2 \Omega^2 (1+a)^2 + \dot{\varphi} \Omega (1+a) (aG - 2\Omega^2) + \Omega^2 (\Omega^2 - aG).$$

Notwendige Bedingungen für die Stabilität der Lösungen des Systems (25) sind

$$(28) \quad P > 0, \quad Q > 0, \quad P^2 - 4Q > 0.$$

Diese Stabilitätsbedingungen wurden unter Berücksichtigung von (4) ausgewertet und sind in Bild 4 in der Ebene der beiden dimensionslosen Größen $p = C/A = a + 1$ und $v = \dot{\varphi}/\Omega$ dargestellt. Der Wert $p = 0$ entspricht einem Stab in der z-Richtung, $p = 2$ gilt für eine Scheibe in der x, y-Ebene; für $p < 1$ ist das Trägheitsellipsoid des Satelliten verlängert, für $p > 1$ ist es abgeplattet; im Grenzfall $p = 1$ artet das Trägheitsellipsoid zur Kugel aus.

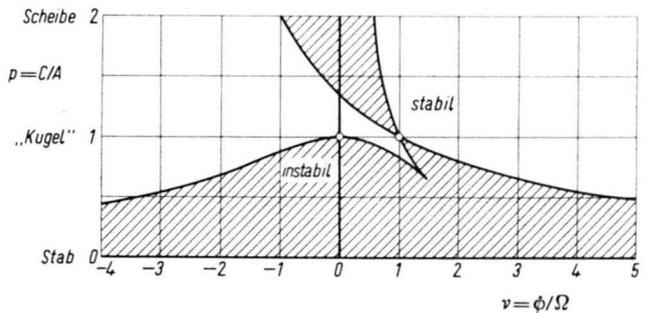


Bild 4. Der Stabilitätsbereich symmetrischer Satelliten mit Drall um die zur Bahnebene senkrechte Symmetrieachse.

Bild 4 zeigt zunächst, daß abgeplattete Satelliten mit $|p| > 1$ stets stabil sind. Auch verlängerte Satelliten können durch entsprechend großen Drall stabilisiert werden. Der Fall $p = 1$ besitzt besonderes Interesse, da bei ihm die Achsen x und y ihre relative Lage zur Erde nicht verändern. Der Satellit weist also dann stets mit derselben Seite zur Erde. Dieser Fall wird im folgenden Abschnitt noch ausführlicher besprochen werden. Mit $p = 0$ führt der Satellit eine reine Translationsbewegung aus. Bemerkenswerterweise sind hierbei sowohl der Stab als auch die Scheibe instabil, eine Tatsache, die der gelegentlich ausgesprochenen Vermutung widerspricht, daß sich Stab und Scheibe stets komplementär verhalten. Nur für einen verhältnismäßig kleinen Bereich abgeplatteter Satelliten ($1 \leq p \leq 4/3$) kann in diesem Fall Stabilität erzielt werden.

4.2. Satelliten mit gleichbleibender Orientierung relativ zur Erde

Um die Stabilität der in Abschnitt 3 angegebenen partikulären Lösung für den Fall a (Pendelbewegungen) beurteilen zu können, betrachten wir kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage. Wir können dann $\varphi = \Omega + \tilde{\varphi}$ mit $\tilde{\varphi} \ll 1$ setzen und erhalten damit unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung aus (22) das Gleichungssystem

$$(29) \quad \begin{cases} \ddot{a} - ab(\Omega^2 + G) + \beta \Omega(1 + b) = 0, \\ \dot{a} \Omega(a - 1) + \beta + \beta a \Omega^2 = 0. \end{cases}$$

Wiederum ergibt sich eine charakteristische Gleichung von der Form (27), diesmal mit den Koeffizienten

$$P = \Omega^2(1 - ab) - bG, \\ Q = -ab\Omega^2(\Omega^2 + G).$$

Die durch (29) beschriebenen Bewegungen sind stabil bezüglich der Variablen a und β , wenn die Bedingungen (28) erfüllt sind. Jedoch müssen diese Bedingungen noch durch die zuvor schon als notwendig erachtete Bedingung $c > 0$ ergänzt werden, weil sonst keine Stabilität bezüglich des Winkels φ vorhanden ist, siehe Gl. (10). Berücksichtigt man nun die Beziehung (4) sowie die Definitionen für die Formfaktoren a, b, c , so lassen sich die Stabilitätsbedingungen in der Form schreiben:

$$(30) \quad \begin{cases} B - A > 0, \\ (A - C)(B - C) > 0, \\ AB + (A - C)(B - C) + 3A(C - A) > 0, \\ [AB + (A - C)(B - C) + 3A(C - A)]^2 - \\ - 16AB(A - C)(B - C) > 0. \end{cases}$$

Zur Veranschaulichung dieser Bedingungen soll eine auf R. Grammel [9] zurückgehende Darstellung gewählt werden, bei der die verschiedenen Körperformen bestimmten Bereichen in einer u, v -Ebene mit

$$(31) \quad u = \frac{A}{C}, \quad v = \frac{B}{C}$$

zugeordnet sind. Bild 5 zeigt ein solches Diagramm. Wegen der Beziehungen (7) zwischen den Hauptträgheitsmomenten interessieren nur u, v -Werte in dem nichtschraffierten Bereich symmetrisch zur Diagonalen $u = v$. Der Punkt $u = v = 1$ kennzeichnet einen Satelliten mit kugelförmigem Trägheitsellipsoid. Die Geraden $v = 1, u = 1, u = v$ gelten für symmetrische Satelliten, deren Symmetrieachsen entsprechend die x, y, z -Achsen sind. Die Bildpunkte für symmetrische Satelliten vom Stab bis zur Scheibe, aber auch für die verschiedenen möglichen unsymmetrischen Formen können unmittelbar aus Bild 5 abgelesen werden.

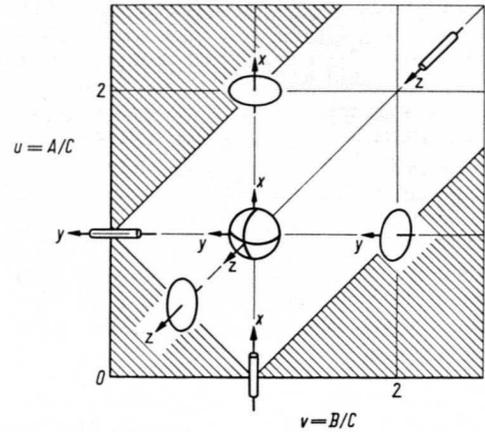


Bild 5. Darstellung verschiedener Körperformen in der Ebene der Verhältnisse von Hauptträgheitsmomenten.

Trägt man nun die durch die Ungleichungen (30) gekennzeichneten Bereiche in das u, v -Diagramm ein, so bleibt als einzig möglicher stabiler Bereich das nichtschraffierte Gebiet von Bild 6 übrig. Es wurde in dieser Form wohl erstmalig von DeBra [4], mit etwas abweichendem Ergebnis jedoch bereits vorher von Beletskij [3] angegeben. Beletskij konnte zeigen, daß für u, v -Werte in dem nichtschraffierten Dreiecksbereich sowohl die notwendigen als auch die hinreichenden Bedingungen für die Stabilität erfüllt sind; über Werte in dem schmalen horizontalen Stabilitätsstreifen konnten keine definitiven Angaben gemacht werden. Es ist das Verdienst von DeBra, gezeigt zu haben, daß auch diesem Bereich stabile Bewegungen des Satelliten entsprechen. Man kann sogar eine plausible Deutung für diesen Bereich angeben: Er entspricht der Stabilität eines tanzenden Spielkreisels, bei dem Kreiselmomente dem Umwerfen durch Schwermomente entgegenwirken. Der zur z -Achse symmetrische, verlängerte Satellit ist statisch instabil, jedoch kann diese Instabilität für nicht zu stark verlängerte Körper noch durch die Kreiselwirkung des an der Bahndrehung teilnehmenden Satelliten kompensiert werden.

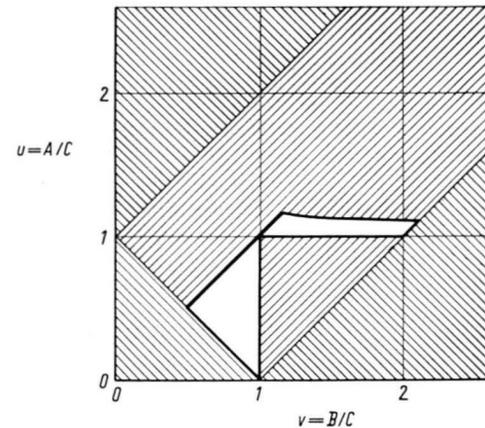


Bild 6. Stabilitätsbereich für Satelliten mit gleichbleibender Orientierung relativ zur Erde.

Aus Bild 6 kann abgelesen werden, daß ein Satellit stets stabil ist, wenn die Achse seines kleinsten Hauptträgheitsmoments zum Erdmittelpunkt zeigt, während gleichzeitig die Achse des größten Hauptträgheitsmoments senkrecht zur Bahnebene steht. Die Achse des mittleren Hauptträg-

heitsmoments liegt dann tangential zur Bahn. Zu der so gekennzeichneten Gruppe stabiler Erdsatelliten gehört zum Beispiel auch der Mond. Sein Bildpunkt im Stabilitätsdiagramm liegt dicht unterhalb des Punktes $u = v = 1$ im stabilen Bereich.

Wenn die Ränder des stabilen Bereichs noch als stabil bezeichnet werden, dann ergeben sich für symmetrische Satelliten aus Bild 6 die folgenden Aussagen:

Zeigt die Symmetrieachse zum Anziehungszentrum, dann sind verlängerte Satelliten stabil, abgeplattete instabil.

Liegt die Symmetrieachse tangential zur Bahn, dann sind verlängerte Satelliten instabil, abgeplattete stabil.

Ist die Symmetrieachse senkrecht zur Bahnebene, dann sind abgeplattete und verlängerte Satelliten bis zu $u = v \leq 1,17$ stabil, verlängerte mit $u = v > 1,17$ hingegen instabil.

Für Satelliten allgemeiner Form gilt ferner:

Satelliten, deren mittlere Hauptträgheitsachse senkrecht zur Bahnebene steht sind instabil.

Das Trägheitsmoment um die zur Bahn tangential Hauptachse muß stets größer sein als das für die zum Anziehungszentrum weisende Hauptachse.

Abgesehen von einem sehr kleinen Bereich des Stabilitätsrandes bei $u = 1, v = 2$ sind Satelliten mit ebener Massenverteilung nur stabil, wenn ihre Massenebene in die Bahnebene fällt und wenn dabei gleichzeitig die Achse mit dem kleinsten Hauptträgheitsmoment zum Anziehungszentrum zeigt.

Auch das Zeitverhalten der Bewegungen, die bei einer Störung des Gleichgewichtszustandes entstehen, läßt sich aus der charakteristischen Gleichung ablesen. Es sollen hier nur zwei Ergebnisse dieser Art für die stabilen und instabilen Bewegungsformen von symmetrischen Satelliten mitgeteilt werden. Da die symmetrischen Satelliten Grenzfälle der allgemeinen Formen darstellen, läßt sich so auch das Verhalten von Satelliten beliebiger Form wenigstens qualitativ abschätzen.

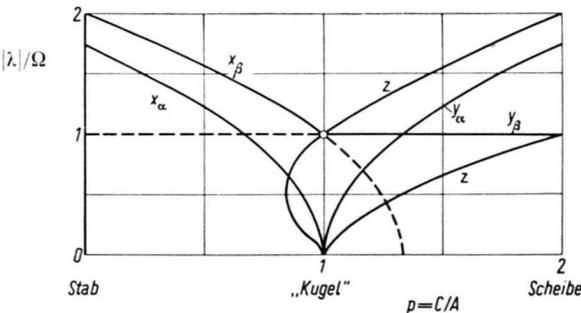


Bild 7. Auf die Umlauffrequenz Ω bezogenen Schwingungsfrequenzen symmetrischer Satelliten für die drei möglichen Orientierungen der Symmetrieachse.

Bild 7 gibt die auf die Umlauffrequenz Ω bezogenen Schwingungsfrequenzen für die drei Hauptlagen (Symmetrieachse in x -, y - bzw. z -Richtung) an. Nur die ausgezogenen Teile der Kurve entsprechen stabilen Bewegungen. Es handelt sich hier um ungedämpfte Schwingungen, die in den Fällen „ x “ und „ y “ in beiden Hauptschwingungsrichtungen unabhängig voneinander erfolgen. Im Fall „ z “ sind sie jedoch miteinander verknüpft.

In Bild 8 sind die auf die Umlaufzeit T_U bezogenen Zeitkonstanten T_Z der instabilen Bewegungsformen aufgetragen. Innerhalb eines durch die Zeitkonstante festgelegten Zeitraumes wird eine vorhandene Anfangsauslenkung um

den Faktor $e = 2,718$ vergrößert. Ein bezogener Wert von $T_Z/T_U = 0,1$ bedeutet daher, daß eine vorhandene Anfangsstörung während eines vollen Bahnumlaufs um den Faktor $e^{10} \approx 22\,000$ vergrößert wird.

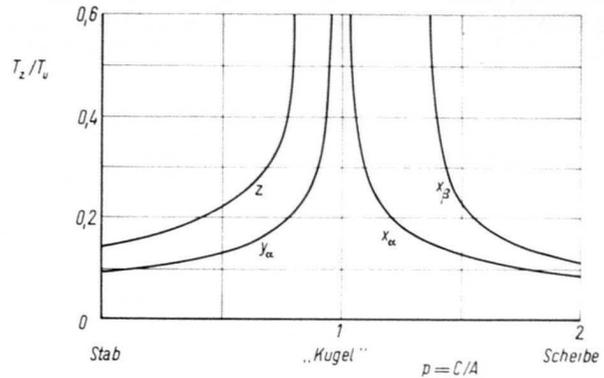


Bild 8. Auf die Umlaufzeit T_U bezogene Zeitkonstanten T_Z für die instabilen Bewegungsformen symmetrischer Satelliten.

4.3. Drallfreie Satelliten beliebiger Form

Es soll nun untersucht werden, unter welchen Bedingungen drallfreie, also näherungsweise translatorische Bewegungen von Satelliten auf Kreisbahnen möglich sind. Hierzu kann der Ansatz $\varphi = \tilde{\varphi} \ll 1$ gewählt werden. Die Gleichungen (22) sind erfüllt, wenn die in geschweiften Klammern stehenden Ausdrücke für sich verschwinden. Durch Nullsetzen bekommt man so ein überbestimmtes System von drei Gleichungen:

$$(32) \quad \begin{cases} \ddot{a} + a(aG - \Omega^2) + \beta \dot{2} \Omega = 0, \\ -\dot{a} 2 \Omega + \ddot{\beta} - \beta \Omega^2 = 0, \\ \ddot{a} - a(bG + \Omega^2) + \beta \dot{2} \Omega = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen dieses Systems sind, streng genommen, nur für $a = -b$, also für symmetrische Satelliten, miteinander verträglich. Dennoch kann man für nicht zu große Unsymmetrien zu einer Abschätzung kommen, indem man einmal die ersten beiden und andererseits die letzten beiden Gleichungen von (32) für sich betrachtet. Die so erhaltenen Gleichungssysteme sind für $a = -b$ identisch, außerdem stimmen sie mit (25) überein, wenn dort $\tilde{\varphi} = 0$ eingesetzt wird. Es genügt, eines dieser Systeme zu untersuchen und dann nachträglich $a = -b$ einzusetzen. In dem früher schon verwendeten u, v -Diagramm bedeutet dies eine Spiegelung an der Hauptdiagonalen. Der Stabilitätsbereich in der u, v -Ebene ist also – wie zu vermuten ist – symmetrisch zur Hauptdiagonalen.

Die Koeffizienten der charakteristischen Gleichungen sind:

$$\begin{aligned} P_1 &= \Omega^2 (2 + 3a), & P_2 &= \Omega^2 (2 - 3b), \\ Q_1 &= \Omega^4 (1 - 3a), & Q_2 &= \Omega^4 (1 + 3b). \end{aligned}$$

Aus den Stabilitätsbedingungen (28) ergeben sich damit unter Berücksichtigung von (4) und nach Einsetzen der Hauptträgheitsmomente die Bedingungen:

$$(33) \quad \begin{cases} A - 3C + 3B > 0, \\ B - 3C + 3A > 0, \\ 2A + 3C - 3B > 0, \\ 2B + 3C - 3A > 0, \\ (C - B)(8A + 3C - 3B) > 0, \\ (C - A)(8B + 3C - 3A) > 0. \end{cases}$$

Der durch diese Bedingungen definierte Bereich der u, v -Ebene ist in Bild 9 eingetragen. Es zeigt sich, daß nur eine eng begrenzte Gruppe schwach bezüglich der z -Achse abgeplatteter Satelliten mit nicht zu großer Unsymmetrie stabil sein kann. Der für symmetrische Satelliten geltende Stabilitätsbereich ($1 \geq u = v \geq 3/4$) entspricht wieder dem aus Bild 4 für den Fall $\nu=0$ folgenden Bereich ($1 \leq p \leq 4/3$).

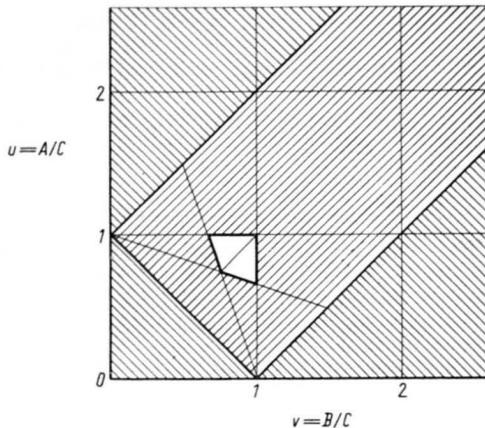


Bild 9. Stabilitätsbereich für drallfreie Satelliten.

Aus Bild 9 kann ferner abgelesen werden, daß drallfreie Satelliten mit einer Symmetrieachse in der Bahnebene nur stabil sein können, wenn sie nicht zu stark verlängert sind ($2/3 \leq u, v \leq 1$).

5. SCHRIFTTUM

- [1] G. N. Duboschin: Über einen Sonderfall der Bahn- und Drehbewegungen zweier Körper (russisch). *Astronomičeskij Journ.* 36 (1959), S. 153—163.
- [2] K. Magnus: Der Stabsatellit in einem radialsymmetrischen Schwerfeld. *Z. Flugwiss.* 11 (1963), S. 233—241.
- [3] V. V. Beletskij: The libration of a satellite (Übersetzung aus dem Russischen). NASA TT F-10 (1960).
- [4] D. B. DeBra: The large attitude motions and stability, due to gravity of a satellite with passive damping in an orbit of arbitrary eccentricity about an oblate body. Stanford University, SDAER No. 126 (1962).
- [5] W. T. Thomson: Spin stabilization of attitude against gravity torque. *J. Astronautical Sci.* 9 (1962), S. 31—33.
- [6] K. Magnus: Rotational motions of satellites in a radial gravity field. Report of the Center for Research in Engineering Science, University of Kansas, Lawrence, June 1963.
- [7] W. B. Klemperer: Satellite librations of large amplitudes. *Amer. Rocket Soc. Journ.* 30 (1960), S. 123—124.
- [8] R. Grammel in *Handbuch der Physik*, Bd. V, Kap. 7—12. J. Springer, Berlin 1927.
- [9] R. Grammel: *Der Kreisel*, Bd. I. Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950, Abb. 102, 103.

Übersicht

Die Bewegungsgleichungen für starre Satelliten in einem radialsymmetrischen Schwerfeld werden für den Fall kleiner Satellitenabmessungen vereinfacht. Eine exakte partikuläre Lösung dieser

Näherungsgleichungen wird als Ausgangspunkt für die Untersuchung von drei Teilproblemen verwendet, bei denen die Stabilität bestimmter Raumorientierungen von Satelliten verschiedener Formen interessiert. Stabilitätsdiagramme werden angegeben für Satelliten mit Drall um eine senkrecht zur Bahnebene stehende Symmetrieachse, für näherungsweise translatorisch umlaufende Satelliten sowie für solche Satelliten, bei denen die Hauptachsen stets eine gleichbleibende Orientierung relativ zur Erde beibehalten. Eine Anzahl allgemeiner Sätze über den Zusammenhang zwischen den Verhältnissen der Hauptträgheitsmomente, dem Drall und der Stabilität wird angegeben. Das Zeitverhalten (Schwingungszeiten und Zeitkonstanten) von symmetrischen Satelliten mit gleichbleibender Orientierung zur Erde wird untersucht und in zwei Diagrammen dargestellt.

Summary

The equations of motion for rigid satellites in a radial gravity field are transformed for the case of small-size satellites. A special solution of these equations is used as a starting point to examine the stability of different spatial orientations of satellites of various shapes. Stability diagrams are given for the following three cases: satellites with spin about an axis of symmetry perpendicular to the plane of the orbit; satellites with an orientation of the three principal axes unvariable with respect to the earth; satellites without spin. Some general results are given concerning the relations between the principal moments of inertia, the spin and the stability of different orientations of the satellite. The transient behaviour (time of vibration and time constants) of symmetrical satellites with an orientation fixed with respect to the earth is explained by two diagrams.

Résumé

Les équations du mouvement pour satellites rigides dans un champ de gravité à symétrie radiale sont transformées pour le cas de satellites à faibles dimensions. Une solution exacte spéciale de ces équations sert de point de départ pour l'investigation de trois problèmes partiels, où l'intérêt réside dans la stabilité de différentes orientations spatiales de satellites à formes diverses. On donne des diagrammes de stabilité pour des satellites en rotation autour d'un axe de symétrie perpendiculaire au plan de la trajectoire, pour des satellites à mouvement approximativement translatatoire et pour des satellites, dont l'orientation des trois axes principaux est invariable par rapport à la terre. On donne quelques résultats généraux sur les rapports entre les moments d'inertie principaux et la stabilité des différentes orientations du satellite. Le comportement au temps (temps d'oscillation et constantes de temps) de satellites symétriques à orientation fixe par rapport à la terre est étudié et représenté par deux diagrammes.

AUS DER DISKUSSION

Prof. Dr.-Ing. E. Mewes (Braunschweig): Müssen nicht die von Ihnen geschilderten Phänomene auch außerhalb des Bereiches der Satelliten auftreten, z. B. bei terrestrischen Verhältnissen, wenn man auf einem glatten Tisch einen rollenden Körper von genauer Kugelumrißform hat, bei dem durch Inhomogenitäten in seinem Inneren verschiedene Hauptträgheitsmomente bestehen?

Prof. Dr. K. Magnus: Selbstverständlich treten die geschilderten Erscheinungen im Prinzip auch in der terrestrischen Mechanik auf. Es ist jedoch außerordentlich schwierig, sie nachweisen zu können, da die hier unvermeidlichen Reibungskräfte stören. Die rollende Kugel ist außerdem ein System mit nicht-holonomen Bindungen, für die besondere Gesetzmäßigkeiten gelten. Letzten Endes gehören aber hierher auch die bekannten Pendel mit besonders langer Schwingungsdauer (84-Minuten-Pendel), bei denen einige Autoren recht merkwürdige Stabilitätserscheinungen errechneten. Ob diese Erscheinungen inzwischen experimentell nachgewiesen werden konnten, weiß ich nicht.