

## Die Stabilität partikulärer Drehbewegungen von Satelliten beliebiger Form auf einer Kreisbahn

Von **K. Magnus**

**1. Einleitendes.** Ein Satellit, den wir in dieser Arbeit stets als einen starren Körper mit konstanter Masse betrachten wollen, kann während der Umlaufbewegung um das Anziehungszentrum auch Drehbewegungen um seinen Massenmittelpunkt ausführen. Diese Drehungen bilden eine interessante Verallgemeinerung der klassischen Probleme der Drehung eines starren Körpers um einen sowohl im Körper als auch im Raum festen Bezugspunkt (Fixpunkt). Infolge der Fortschritte der Satellitentechnik kommt einer Untersuchung dieser Drehbewegungen nunmehr auch praktische Bedeutung zu, da die Funktion verschiedener Satellitentypen weitgehend und teilweise sogar entscheidend von der richtigen Orientierung des Satelliten auf seiner Umlaufbahn abhängt.

Obwohl die Drehbewegungen von Satelliten das Interesse der Astronomen schon seit langem erregten, und einige Arbeiten zur Mondtheorie bereits wertvolle, auch für künstliche Satelliten anwendbare Ergebnisse enthielten, führten die andersartigen Problemstellungen der Satellitentechnik dazu, daß sich im Laufe des vergangenen Jahrzehnts zahlreiche Autoren mit der Untersuchung der Drehbewegungen künstlicher Satelliten beschäftigt haben. Hier ist vor allen *Duboschin*<sup>1</sup> zu nennen, der in einer Reihe von grundlegenden Untersuchungen zunächst die allgemeinen Bewegungsgleichungen aufgestellt und dann auch die ersten exakten Partikularlösungen dafür gefunden hat. Er wies nachdrücklich darauf hin, daß eine Untersuchung der Drehbewegungen von frei umlaufenden Satelliten ganz erheblich schwieriger ist, als die Behandlung der klassischen Fälle der Kreiseltheorie. Das liegt einerseits an der Notwendigkeit, das vom Schweregradienten herrührende äußere Moment berücksichtigen zu müssen, andererseits aber in der Tatsache, daß die Drehbewegungen mit der Umlaufbewegung so verkoppelt sind, daß die zugehörigen Gleichungssysteme nur gemeinsam gelöst werden können. Daher erscheint die Aufgabe, Drehbewegungen von Satelliten zu bestimmen, als eine Kombination der klassischen Probleme von *Kepler* (Umlaufbahnen des Zwei-Körper-Problems) und *Euler* (Drehungen eines starren Körpers). Beschränkt man sich auf den in der Satellitentechnik wohl stets vorliegenden Fall, daß die Längenabmessungen  $L$  des Körpers klein gegenüber dem Bahnradius  $R$  sind, dann sind, wie *Duboschin* und andere Autoren<sup>2</sup> gezeigt haben, die Rückwirkungen der Körperorientierung auf die Bahn von zweiter Ordnung bezüglich des Verhältnisses  $L/R$ , so daß sie in einer Näherungstheorie vernachlässigt werden können. Eine derartige Vereinfachung liegt den Untersuchungen der meisten Autoren zugrunde, die auf diesem Gebiet gearbeitet haben; sie soll auch für die vorliegende Arbeit gelten. Weiterhin soll vereinfachend angenommen werden, daß die Massenanziehung zwischen Satellit und Erde die einzige äußere Kraft für den Satelliten darstellt. Widerstandskräfte, Strahlungsdruck und magnetische Einflüsse werden also vernachlässigt. Die Schwerkraft möge aus dem Potential einer Kugel ableitbar sein, so daß die Abplattung der Erde unberücksichtigt bleibt.

Trotz dieser Vereinfachungen ist das Problem noch so kompliziert, daß weitere Einschränkungen notwendig werden. Je nach der Problemstellung beziehen sich diese Einschränkungen

1. auf die Gestalt der Umlaufbahn,
2. auf die Form des Körpers (genauer auf die Gestalt seines Trägheitsellipsoides) und
3. auf den Bewegungszustand des Körpers.

Bei den vorliegenden Untersuchungen soll die Bahn des Massenmittelpunktes des Satelliten grundsätzlich als Kreis angenommen werden. Die Form des Körpers soll beliebig sein, dagegen werden später (Ziff. 2) gewisse Einschränkungen bezüglich der Eigendrehung gemacht werden.

Für einen symmetrischen Satelliten, d. h. für einen Satelliten mit rotationssymmetrischem Trägheitsellipsoid, ist bekannt, daß er um die quer zur Bahnebene liegende Symmetrieachse rotieren

<sup>1</sup> S. z. B. *G. N. Duboschin*, Buletin Instituta Theoretičeskoj Astronomii (russisch) 7 (1960) S. 511.

<sup>2</sup> S. z. B. *K. Magnus*, Z. Flugwiss. 11 (1963) S. 233.

darf. Stabile und instabile Drehungen dieser Art sind in Abhängigkeit von Körperform (Verhältnis von axialem zu äquatorialem Trägheitsmoment) und Drehgeschwindigkeit bestimmt worden<sup>1</sup>. Ziel der vorliegenden Untersuchungen ist eine Verallgemeinerung dieser Ergebnisse für Körper mit beliebigem Trägheitsellipsoid.

**2. Grundgleichungen und partikuläre Lösungen.** Unter den angegebenen Voraussetzungen lauten die Gleichungen für die Drehbewegung eines Satelliten, also die verallgemeinerten Euler-Gleichungen, wie folgt<sup>2</sup>:

$$\left. \begin{aligned} A \dot{p} + (C - B) q r - 3 \Omega^2 (C - B) \gamma_y \gamma_x &= 0, \\ B \dot{q} + (A - C) r p - 3 \Omega^2 (A - C) \gamma_z \gamma_x &= 0, \\ C \dot{r} + (B - A) p q - 3 \Omega^2 (B - A) \gamma_x \gamma_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Darin sind  $A B C$  die Hauptträgheitsmomente des Satelliten,  $p q r$  sind die körperfesten Komponenten der Winkelgeschwindigkeit,  $\gamma_x \gamma_y \gamma_z$  sind die ebenfalls bezüglich der körperfesten  $xyz$ -Achsen genommenen Komponenten eines Einheitsvektors in Richtung der Vertikalen, also die Richtungs-cosinus der Verbindungslinie vom Massenmittelpunkt des Satelliten zum Anziehungszentrum gegenüber den körperfesten Hauptachsen. Durch  $\Omega$  ist die Winkelgeschwindigkeit der Vertikalen während der Umlaufbewegung bezeichnet. Da eine kreisförmige Umlaufbahn vorausgesetzt wird, hat  $\Omega$  einen konstanten Wert, der aus den *Kepler*-Gleichungen berechnet werden kann.

Neben dem körperfesten  $xyz$ -System soll weiterhin ein mit der Bahn verbundenes  $\xi\eta\zeta$ -System nach Abb. 1 verwendet werden. Die  $\xi$ -Achse liege normal zur Bahnebene ( $\eta\zeta$ -Ebene), die  $\eta$ -Achse sei tangential zur Bahnkurve. Dann hat die  $\zeta$ -Achse die Richtung der Vertikalen. Wir werden später (Ziff. 3) die Lagebeziehungen beider Koordinatensysteme gegeneinander noch näher festlegen.

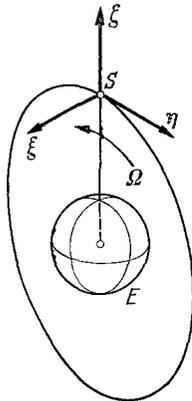


Abb. 1. Das mit der Umlaufbahn verbundene  $\xi\eta\zeta$ -Koordinatensystem.

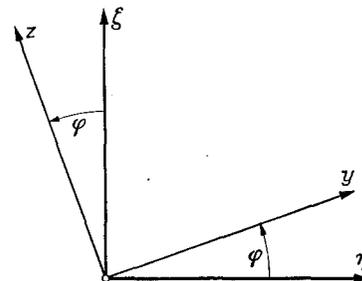


Abb. 2. Verdrehungen der körperfesten  $yz$ -Achsen gegenüber den  $\eta\zeta$ -Achsen.

Einige leicht zu verifizierende Sonderlösungen von (1) sind:

a) Der Satellit mit kugelförmigem Trägheitsellipsoid:

$A = B = C; p = p_0; q = q_0; r = r_0$ . Das ist eine gleichförmige Drehung um eine beliebig orientierte, sowohl im Körper als auch im Raum feste Achse.

b) Der Satellit mit rotationssymmetrischem Trägheitsellipsoid, dessen Symmetrieachse in die  $\xi$ -Achse fällt:  $B = C; \gamma_x = 0; p = p_0; q = r = 0$ . Das ist eine gleichförmige Drehung um die quer zur Bahnebene liegende Symmetrieachse.

c) Der Satellit mit gleichbleibender Orientierung zum Anziehungszentrum: z. B.  $\gamma_x = \gamma_y = 0; \gamma_z = 1; p = \Omega; q = r = 0$ . Hierbei zeigt die  $z$ -Achse zum Anziehungszentrum, und der Satellit macht die Drehung der Vertikalrichtung ( $\zeta$ -Achse) mit. Das körperfeste Hauptachsensystem fällt mit dem  $\xi\eta\zeta$ -System zusammen (*relative Ruhe*).

<sup>1</sup> S. z. B. *W. T. Thomson*, J. Astronaut. Sc. 9 (1962) S. 31.

<sup>2</sup> S. z. B. die in Fußn. 2 von S. 129 zitierte Arbeit.

Der Fall c) läßt sich verallgemeinern, wenn man nach Abb. 2 Verdrehungen beider Koordinatensysteme um die  $x = \xi$ -Achse zuläßt. Dann existiert eine partikuläre Lösung, die durch

$$\left. \begin{aligned} p &= p(t) & q &= r = 0 \\ \gamma_x &= 0; & \gamma_y &= \sin \varphi; & \gamma_z &= \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

gekennzeichnet ist. Da wegen  $p = \dot{\varphi} + \Omega$ ;  $\dot{p} = \ddot{\varphi}$  gilt, hat man  $\varphi$  aus

$$A \ddot{\varphi} + 3 \Omega^2 (B - C) \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

nach (1)<sub>1</sub> zu bestimmen. Mit  $\nu^2 = \frac{3 \Omega^2 (B - C)}{A}$  läßt sich diese Beziehung in die Pendelgleichung

$$(2 \ddot{\varphi}) + \nu^2 \sin (2 \varphi) = 0 \quad (3)$$

überführen. Je nach den Anfangsbedingungen hat (3) zwei Lösungstypen:

$\alpha$ ) *Pendelbewegungen* um die Gleichgewichtslage  $\varphi = 0$ :

$$\sin \varphi = k_1 \operatorname{sn} (\nu t; k_1) \quad (4)$$

mit dem Modul  $k_1 = \frac{\dot{\varphi}_0}{\nu} = \frac{p_0 - \Omega}{\nu} < 1$ .

Dabei ist  $\dot{\varphi}_0$  die relative Drehgeschwindigkeit, mit der sich das  $yz$ -Kreuz im Augenblick des Durchgangs durch die Gleichgewichtslage gegenüber dem  $\eta \xi$ -Kreuz bewegt. Die Amplitude der Pendelungen ist

$$\varphi_{\max} = \arcsin k_1 = \arcsin \frac{\dot{\varphi}_0}{\nu} \leq \frac{\pi}{2};$$

für die Schwingungszeit gilt:

$$T_1 = \frac{4}{\nu} K(k_1) \geq \frac{2 \pi}{\nu} = \frac{2 \pi}{\Omega} \sqrt{\frac{A}{3(B - C)}} \geq 48,7 \text{ Minuten.}$$

Die kürzeste Schwingungszeit wird für kleine Pendelungen eines stabförmigen Körpers ( $C = 0$ ,  $A = B$ ) erhalten. Dabei zeigt die Stabachse in der Gleichgewichtslage zum Anziehungszentrum.

$\beta$ ) *Überschlagende Bewegungen*:

$$\sin \varphi = \operatorname{sn} (\dot{\varphi}_0 t; k_2) \quad (5)$$

mit

$$k_2 = \frac{1}{k_1} = \frac{\nu}{\dot{\varphi}_0} = \frac{\nu}{p_0 - \Omega} < 1.$$

Die Zeit eines vollen Überschlags ist

$$T_2 = \frac{4}{\dot{\varphi}_0} K(k_2) \geq \frac{2 \pi}{\dot{\varphi}_0}.$$

Aus  $p = \dot{\varphi} + \Omega$  folgt unter Berücksichtigung von (5):

$$p = \Omega + \dot{\varphi}_0 \operatorname{dn} (\dot{\varphi}_0 t; k_2). \quad (6)$$

Der Übergang zwischen den beiden Bewegungsformen  $\alpha$ ) und  $\beta$ ) wird durch  $k = 1$  oder  $\dot{\varphi}_0 = \nu$  gekennzeichnet.

**3. Die Stabilität der partikulären Lösungen.** In üblicher Weise soll die Stabilität der betrachteten Lösung durch eine Untersuchung der Nachbarbewegungen ermittelt werden. Zur Kennzeichnung dieser Bewegungen werden die Winkel  $\varphi \psi \delta$  nach Abb. 3 herangezogen, die die Verdrehung des

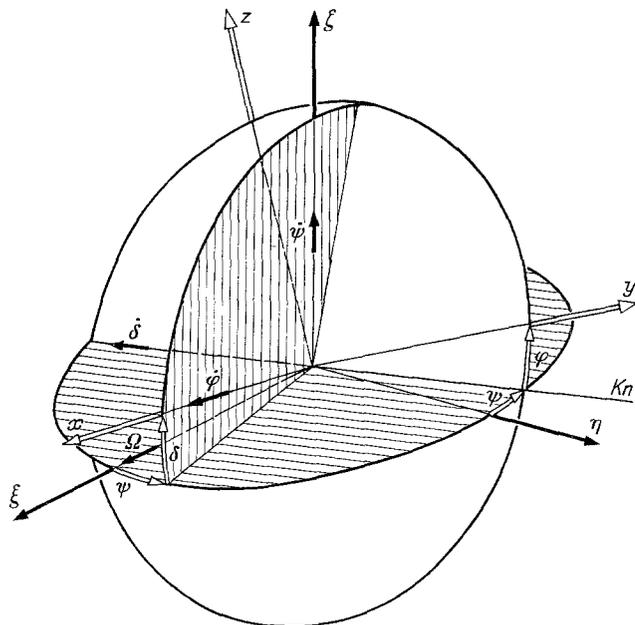


Abb. 3. Kennzeichnung der gegenseitigen Verdrehung von körperfestem und bahnfestem Koordinatensystem.

$xyz$ -Systems gegenüber dem  $\xi\eta\zeta$ -System zu beschreiben gestatten. Dabei sind  $\varphi$  und  $\psi$  Euler-Winkel, während  $\delta$  der Komplementärwinkel des Euler-Winkels  $\vartheta$  ist. Die Absolutdrehung des körperfesten Systems setzt sich aus 4 Anteilen zusammen: der Komponente  $\dot{\varphi}$  in der  $x$ -Richtung, der Komponente  $\dot{\psi}$  in der  $\zeta$ -Richtung, der Komponente  $\dot{\delta}$  in Richtung der Knotenlinie  $Kn$  und der Komponente  $\Omega$  in der  $\xi$ -Richtung, mit der bereits das  $\xi\eta\zeta$ -System dreht. Aus Abb. 3 folgen die kinematischen Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} p &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \sin \delta + \Omega \cos \delta \cos \varphi, \\ q &= \dot{\psi} \cos \delta \sin \varphi - \dot{\delta} \cos \varphi - \Omega (\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \delta \sin \varphi), \\ r &= \dot{\psi} \cos \delta \cos \varphi + \dot{\delta} \sin \varphi + \Omega (\sin \psi \sin \varphi - \cos \psi \sin \delta \cos \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Für die Richtungscosinus der Vertikale ( $\zeta$ -Achse) folgt:

$$\gamma_x = \sin \delta, \quad \gamma_y = \cos \delta \sin \varphi, \quad \gamma_z = \cos \delta \cos \varphi. \quad (8)$$

Im Grenzfall  $\psi = \delta = 0$  gehen (7) und (8) in die Bedingungen (2) der früher betrachteten Sonderlösung über.

a) Gleichungen für die Nachbarlösungen. Setzt man (7) und (8) in (1) ein, so folgt unter Berücksichtigung von  $\psi \ll 1$  und  $\delta \ll 1$  ein System von vereinfachten Gleichungen für die Nachbarbewegungen. Aus der ersten dieser Gleichungen folgt bei Vernachlässigung der von zweiter und höherer Ordnung kleinen Glieder genau wieder die Pendelgleichung (3). Der Winkel  $\varphi(t)$  bleibt also für die Nachbarbewegung unverändert. Die zweite und dritte Gleichung von (1) gehen über in:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\psi} \sin \varphi + \dot{\psi} \dot{\varphi} \cos \varphi - \ddot{\delta} \cos \varphi + \dot{\delta} \dot{\varphi} \sin \varphi - \\ - \dot{\psi} \Omega \cos \varphi + \psi \Omega \dot{\varphi} \sin \varphi - \dot{\delta} \Omega \sin \varphi - \delta \Omega \dot{\varphi} \cos \varphi + \\ + \frac{A-C}{B} [p (\dot{\psi} \cos \varphi + \dot{\delta} \sin \varphi) + p \Omega (\psi \sin \varphi - \delta \cos \varphi) - \delta 3 \Omega^2 \cos \varphi] = 0, \\ \ddot{\psi} \cos \varphi - \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \varphi + \ddot{\delta} \sin \varphi + \dot{\delta} \dot{\varphi} \cos \varphi + \\ + \dot{\psi} \Omega \sin \varphi + \psi \Omega \dot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\delta} \Omega \cos \varphi + \delta \Omega \dot{\varphi} \sin \varphi + \\ + \frac{B-A}{C} [p (\dot{\psi} \sin \varphi - \dot{\delta} \cos \varphi) - p \Omega (\psi \cos \varphi + \delta \sin \varphi) - \delta 3 \Omega^2 \sin \varphi] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Diese Gleichungen lassen sich übersichtlicher schreiben, wenn sie nach Multiplikation mit  $\sin \varphi$  und  $\cos \varphi$  einerseits,  $\cos \varphi$  und  $-\sin \varphi$  andererseits addiert werden. Mit den Abkürzungen

$$\sigma = \frac{1}{2} \left( \frac{A-C}{B} + \frac{B-A}{C} \right); \quad \tau = \frac{1}{2} \left( \frac{A-C}{B} - \frac{B-A}{C} \right) \quad (10)$$

folgt dann aus (9):

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\psi} + \dot{\psi} p \sigma \sin 2\varphi + \psi [p \Omega - \Omega^2 + p \Omega (\tau - \sigma \cos 2\varphi)] + \\ + \dot{\delta} [p - 2 \Omega + p (\tau - \sigma \cos 2\varphi)] - \delta (p \Omega + 3 \Omega^2) \sigma \sin 2\varphi = 0, \\ \ddot{\delta} - \dot{\delta} p \sigma \sin 2\varphi + \delta [p \Omega - \Omega^2 + (p \Omega + 3 \Omega^2) (\tau + \sigma \cos 2\varphi)] - \\ - \dot{\psi} [p - 2 \Omega + p (\tau + \sigma \cos 2\varphi)] - \psi p \Omega \sigma \sin 2\varphi = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Diese in  $\psi$  und  $\delta$  linearen Differentialgleichungen haben periodische Koeffizienten, da nicht nur  $\sin 2\varphi$  und  $\cos 2\varphi$ , sondern auch  $p$  nach (6) periodische Funktionen der Zeit sind.

b) Sonderfälle. Für die drei in Ziff. 2 genannten Sonderlösungen der Ausgangsgleichungen reduzieren sich die Gleichungen (11) auf ein System mit konstanten Koeffizienten. Im Falle eines Satelliten mit kugelförmigen Trägheitsellipsoid (Fall a) ist die Lösung elementar. Die gleichförmige Drehung des Körpers ist bezüglich der Koordinaten  $\psi$  und  $\delta$  stets stabil. Für den um eine quer zur Bahnebene stehende Symmetrieachse rotierenden Körper (Fall b) sind von Thomson<sup>1</sup> und Kane<sup>2</sup> Stabilitätsbereiche ausgerechnet und diskutiert worden. Die Thomsonschen Gleichungen können aus (11) mit  $B = C$ ;  $p = p_0$ ;  $\sigma = 0$  und  $\tau = A/B - 1$  erhalten werden.

Auch der Fall c) eines Satelliten mit einer während seines Umlaufs gleichbleibenden Orientierung relativ zur Bahn ist bekannt. Er wurde von Beletski<sup>3</sup> und DeBra<sup>4</sup> ausführlich untersucht. Man

<sup>1</sup> S. die in Fußn. 1, S. 130 zitierte Arbeit.

<sup>2</sup> T. E. Kane, J. Astronaut. Sc. 9 (1962) S. 108.

<sup>3</sup> V. V. Beletski, Iskusstvennije Sputniki Semli 1959, Heft 3.

<sup>4</sup> D. B. DeBra, Stanford-University, Diss. SUDAER Nr. 126, 1962.

erhält die zugehörigen Ausgangsgleichungen, indem man in (11) auch den Winkel  $\varphi$  als klein betrachtet und im Sinne einer Theorie kleiner Schwingungen solche Glieder vernachlässigt, die von zweiter und höherer Ordnung klein sind. Ohne hier auf Einzelheiten einzugehen, soll noch bemerkt werden, daß gewisse Unterschiede in den Ergebnissen von *Beletzki* einerseits und *DeBra* andererseits darauf zurückzuführen sind, daß beide Autoren verschiedene Methoden angewendet haben. Während *Beletzki* die Stabilität der Bewegungen nach der *Ljapunovschen* Methode berechnet hat, verwendet *DeBra* die Theorie kleiner Störungen. Die *hinreichenden* Stabilitätskriterien nach *Ljapunov* ergeben aber bei *Beletzki* einen kleineren Stabilitätsbereich, als die *notwendigen* Kriterien, deren sich *DeBra* bediente. Wir werden die Stabilitätsbereiche in einer von den genannten Arbeiten abweichenden Darstellung in Ziffer 4 (Abb. 6) angeben, um den Zusammenhang mit den entsprechenden Ergebnissen für den Fall eines sich überschlagenden Satelliten aufzuzeigen.

c) Näherungen für den allgemeinen Fall. Da das Ausgangssystem (11) periodische Koeffizienten besitzt, liegt es nahe, nach periodischen Lösungen zu suchen, da diese im Sinne der *Floquet*-schen Theorie die Grenze zwischen den stabilen und instabilen Lösungen bilden. Zwei Möglichkeiten bieten sich an: man kann entweder durch einen *Fourier*-Ansatz mit geeignet gewählter Grundperiode oder aber durch eine Reihenentwicklung nach Potenzen eines kleinen Parameters periodische Lösungen von (11) aufsuchen. Beide Wege sind beschritten worden, da sich herausgestellt hat, daß je nach dem Charakter der Stabilitätsgrenze der eine oder der andere Weg einfacher zum Ziele führt.

Zur Durchführung der Näherungsberechnungen werden zunächst die exakten Lösungen (5) und (6) der Grundbewegung in Reihen zerlegt:

$$\sin \varphi = \frac{2 \pi}{k_2 K(k_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varkappa^{2n+1}}{1 - \varkappa^{2n+1}} \sin (2n + 1) \frac{\pi \dot{\varphi}_0 t}{2 K(k_2)}, \tag{12}$$

$$p = \Omega + \frac{\pi \dot{\varphi}_0}{2 K(k_2)} \left[ 1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varkappa^n}{1 + \varkappa^{2n}} \cos \frac{\pi n \dot{\varphi}_0 t}{K(k_2)} \right], \tag{13}$$

mit

$$\varkappa = \exp \left[ -\pi \frac{K(\sqrt{1 - k_2^2})}{K(k_2)} \right].$$

Für gegebene Werte von  $\dot{\varphi}_0$  und  $\nu$  ist  $k_2$  bekannt, für jedes  $k_2$  folgen dann aus vorhandenen Tabellen unmittelbar die Zahlwerte für das vollständige elliptische Integral  $K(k_2)$  und für die Hilfsgröße  $\varkappa$ . Besonders vorteilhaft ist dabei, daß die Reihenentwicklungen

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9 k^4}{64} + \dots \right],$$

$$\varkappa(k) = \left( \frac{k}{4} \right)^2 \left[ 1 + 2 \left( \frac{k}{4} \right)^2 + 15 \left( \frac{k}{4} \right)^4 + \dots \right]$$

für die meist interessierenden Werte von  $k$  sehr rasch konvergieren, so daß man bei hinreichend kleinem  $k$  sogar mit den ersten Näherungen  $K \approx \frac{\pi}{2}$ ;  $\varkappa \approx \left( \frac{k}{4} \right)^2$  und  $\varphi \approx \dot{\varphi}_0 t$ ;  $p \approx \Omega + \dot{\varphi}_0$  auskommen kann. Selbst für den Maximalwert  $k = 1$  hat man nur ein  $\varkappa = 0,064$ , so daß die Faktoren der  $\sin$ - und  $\cos$ -Glieder von (12) und (13) rasch abnehmen.

Da (11) periodische Koeffizienten mit dem Argument  $2\varphi$  enthält, liegt es nahe, periodische Lösungen mit der halben Periode durch einen *Fourier*-Ansatz

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \sum_{n=1}^N (\Psi_{s_n} \sin n \varphi + \Psi_{c_n} \cos n \varphi), \\ \delta &= \sum_{n=1}^N (\Delta_{s_n} \sin n \varphi + \Delta_{c_n} \cos n \varphi) \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

zu suchen. Einsetzen von (14) in (11) führt auf 2 Gleichungen, die sicher dann erfüllt sind, wenn die Faktoren der trigonometrischen Funktionen sämtlich verschwinden. Das führt in bekannter Weise auf eine Folge von algebraischen Gleichungen für die Amplitudenfaktoren  $\Psi$  und  $\Delta$ , die dann auf iterativem Wege weiter untersucht werden können. Bei dem ersten Schritt ergeben sich so die

folgenden beiden Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} \Delta_{s1} \left[ (-\mu^2 + 3\mu - 2) + \tau(\mu + 3) - \frac{\sigma}{2}(\mu^2 + 3) \right] + \Psi_{c1} \left[ (-\mu^2 + 3\mu - 2) - \tau(\mu^2 - \mu) + \frac{\sigma}{2}\mu^2 \right] &= 0, \\ \Delta_{s1} \left[ (-\mu^2 + 3\mu - 2) - \tau(\mu^2 - \mu) + \frac{\sigma}{2}(\mu^2 + 3) \right] + \Psi_{c1} \left[ (-\mu^2 + 3\mu - 2) + \tau\mu - \frac{\sigma}{2}\mu^2 \right] &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{c1} \left[ (-\mu^2 + 3\mu - 2) + \tau(\mu + 3) + \frac{\sigma}{2}(\mu^2 + 3) \right] + \Psi_{s1} \left[ (\mu^2 - 3\mu + 2) + \tau(\mu^2 - \mu) + \frac{\sigma}{2}\mu^2 \right] &= 0, \\ \Delta_{c1} \left[ (\mu^2 - 3\mu + 2) + \tau(\mu^2 - \mu) + \frac{\sigma}{2}(\mu^2 + 3) \right] + \Psi_{s1} \left[ (-\mu^2 + 3\mu - 2) + \tau\mu + \frac{\sigma}{2}\mu^2 \right] &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Darin ist zur Abkürzung  $p/\Omega = \mu$  eingesetzt worden. Sollen die homogenen Gleichungen (15) und (16) nichttriviale Lösungen haben, dann müssen ihre Determinanten verschwinden. Durch diese Forderung kommt man zu einer Beziehung zwischen den Größen  $\sigma$ ,  $\tau$  und  $\mu$ , also auf einen Zusammenhang zwischen den Trägheitsmomenten und dem Bewegungszustand des Satelliten. Man kann die Determinanten in die Form

$$D = (\tau \mp \sigma) [\tau(-\mu^4 + 2\mu^3 + 3\mu) + (2\mu^2 + 3)(-\mu^2 + 3\mu - 2)] \quad (17)$$

bringen, wobei das obere Vorzeichen für (15), das untere für (16) gilt. Beide Determinanten unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen von  $\sigma$ , was nach (10) gleichbedeutend mit einer Vertauschung von  $B$  und  $C$  ist. Die Determinanten (17) verschwinden, wenn  $\tau = \sigma$  bzw.  $\tau = -\sigma$  ist. Unter Berücksichtigung von (10) führt dies auf die Beziehungen

$$A = B \quad \text{bzw.} \quad A = C. \quad (18)$$

Daraus kann man schließen, daß die betrachtete Bewegung instabil ist, wenn  $A$  das mittlere der drei Hauptträgheitsmomente ist. Im Grenzfall eines sehr schnell um seine  $x$ -Achse drehenden Satelliten muß nämlich wieder das bekannte klassische Ergebnis von der Instabilität eines um die mittlere Hauptachse drehenden Körpers erhalten werden.

Die Determinante (17) verschwindet weiterhin, wenn der in eckigen Klammern stehende Ausdruck zu Null wird. Daraus kann ein  $\tau = \tau(\mu)$ , also eine Beziehung zwischen den Trägheitsmomenten und der Drehgeschwindigkeit abgeleitet werden. Die Auswertung zeigt jedoch, daß die so erhaltenen  $\tau$ -Werte nicht interessieren, da sie zum größten Teil aus dem allein zulässigen Bereich  $-1 \leq \tau \leq +1$  herausfallen.

Bei der Auswertung weiterer, aus dem Ansatz (14) folgender Näherungen wird man wegen der mit höherem Näherungsgrad stark ansteigenden Rechenarbeit Rechenautomaten zu Hilfe nehmen müssen. Dagegen ist es leicht möglich, den Verlauf der für symmetrische Körper bekannten Stabilitätsgrenzen im Bereich kleiner Unsymmetrien zu übersehen. Da für den symmetrischen Körper mit  $B = C$  aus (10)  $\sigma = 0$  folgt, liegt es nahe, für nicht zu große Unsymmetrien eine Potenzreihe nach  $\sigma$  anzusetzen. Auch für  $\sigma$  gilt, wie für  $\tau$ , die Beziehung  $|\sigma| \leq 1$ . Mit dem Ansatz:

$$\psi = \sum_{n=0}^N \sigma^n \psi_n, \quad \delta = \sum_{n=0}^N \sigma^n \delta_n, \quad \tau = \sum_{n=0}^N \sigma^n \tau_n \quad (19)$$

erhält man nach Einsetzen in (11) zwei Gleichungen, die nach Potenzen von  $\sigma$  geordnet werden können. Setzt man die Faktoren der verschiedenen Potenzen von  $\sigma$  für sich gleich Null, dann wird man in bekannter Weise auf iterativ lösbare Gleichungssysteme für die  $\psi_n$ ,  $\delta_n$  und  $\tau_n$  geführt. Die Stabilitätsbedingungen für die Teillösungen und die Forderung nach Periodizität, die zu Beziehungen zwischen  $\tau$ ,  $\sigma$  und  $\mu$  führen, geben dann Aufschluß über das Verhalten der Lösungen. Auf die Einzelheiten des Berechnungsverfahrens<sup>1</sup> wollen wir hier nicht eingehen, sondern nur die Ergebnisse des noch leicht überschaubaren ersten Iterationsschrittes angeben. Dieser Schritt gibt bereits eine recht gute Annäherung. Die Gleichungen für die Grundlösung sind:

$$\begin{cases} \ddot{\psi}_0 + \psi_0(\mu - 1 + \mu\tau) + \dot{\delta}_0(\mu - 2 + \mu\tau) = 0, \\ \ddot{\delta}_0 + \delta_0(\mu - 1 + \mu\tau + 3\tau) - \dot{\psi}_0(\mu - 2 + \mu\tau) = 0. \end{cases} \quad (20)$$

<sup>1</sup> S. z.B. A. Weigand, Deutsche Luftfahrtforschung, Forschungsbericht Nr. 1495, Berlin 1941.

Bei in erster Näherung als konstant angenommenem  $\mu$  wird die Grundlösung stabil, wenn die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + \mu - 1 + \mu \tau & \lambda(\mu - 2 + \mu \tau) \\ -\lambda(\mu - 2 + \mu \tau) & \lambda^2 + \mu - 1 + \mu \tau + 3\tau \end{vmatrix} = 0 \quad (21)$$

oder

$$\lambda^4 + P\lambda^2 + Q = 0$$

keine positiven Realteile haben. Da die Gleichung nur gerade Potenzen von  $\lambda$  enthält, lauten die notwendigen Bedingungen für Stabilität

$$P > 0; \quad Q > 0; \quad P^2 - 4Q > 0. \quad (22)$$

Wegen  $P = P(\mu, \tau)$  und  $Q = Q(\mu, \tau)$  lassen sich daraus wieder Funktionen  $\tau(\mu)$ , also Beziehungen zwischen den Trägheitsmomenten und der Drehgeschwindigkeit ermitteln. Im Falle  $\sigma = 0$ , also für den symmetrischen Körper, ergeben sich exakt die schon bekannten Werte. Der Verlauf der Stabilitätsgrenze im Bereich unsymmetrischer Körper ist nach diesem ersten Näherungsschritt dadurch gekennzeichnet, daß sich die drei Hauptträgheitsmomente bei vorgegebenem  $\mu$  so zueinander verhalten, daß  $\tau$  nach (10) konstant bleibt. Durch die höheren Näherungen wird der Verlauf dieser Grenzen nur im Bereich größerer Unsymmetrien, d. h. für größere  $\sigma$ -Werte noch etwas korrigiert.

**4. Ergebnisse.** a) Das Formdreieck. Zur Darstellung der Ergebnisse soll eine Methode verwendet werden, wie sie in analoger Weise in der Plastizitätstheorie zur Erläuterung von Fließbedingungen angegeben wurde. An die Stelle der Hauptspannungen treten in unserem Fall die Hauptträgheitsmomente. Denken wir uns diese nach Abb. 4 auf den Achsen eines kartesischen Koordinatensystems abgetragen, dann wird das Trägheitsellipsoid eines gegebenen Körpers durch einen Punkt  $P$  im ersten Oktanten eindeutig repräsentiert. Da das Stabilitätsverhalten nicht von der absoluten Größe der Trägheitsmomente, sondern von ihren Verhältnissen abhängt, genügt es, ähnliche Trägheitsellipsoide durch ein und denselben Punkt zu kennzeichnen. Wir wählen dazu den Durchstoßpunkt  $D$  der Verbindungsgeraden  $OP$  durch die Ebene

$$A + B + C = 1. \quad (23)$$

Der Punkt  $D$  repräsentiert alle untereinander ähnlichen Trägheitsellipsoide; ihre  $P$ -Punkte liegen auf dem Strahl  $OP$  durch den Ursprung  $O$ .

Für reale starre Körper gilt bekanntlich die allgemeine Beziehung, daß die Summe zweier Hauptträgheitsmomente stets größer oder höchstens gleich dem dritten Hauptträgheitsmoment ist (Dreiecks-Ungleichung). Die Grenzen des Bereiches für die Trägheitsmomente realer Körper sind also durch

$$A + B = C; \quad B + C = A; \quad C + A = B \quad (24)$$

gegeben. Setzt man diese Beziehungen in (23) ein, so findet man, daß sie Geraden in der durch (23) gegebenen Ebene darstellen. Es gilt

$$\left. \begin{array}{l} \text{für } A + B = C : \quad C = 1/2 : \text{ Gerade } \overline{12}, \\ \text{für } B + C = A : \quad A = 1/2 : \text{ Gerade } \overline{13}, \\ \text{für } C + A = B : \quad B = 1/2 : \text{ Gerade } \overline{23}. \end{array} \right\} \quad (25)$$

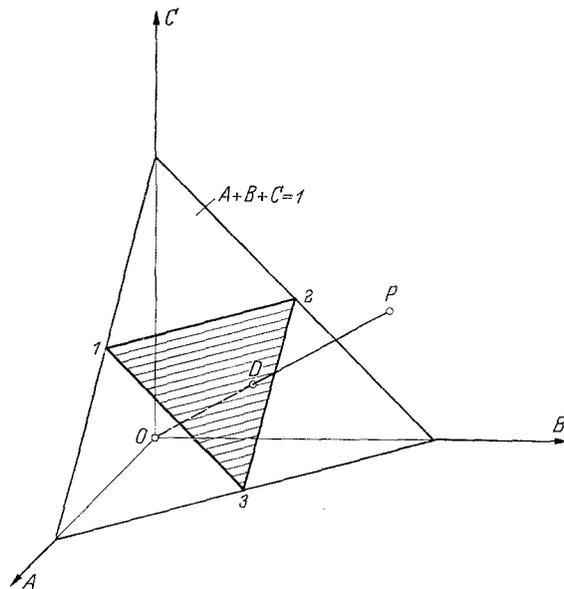


Abb. 4. Zur Bestimmung des Formdreiecks.

Danach können die Bildpunkte  $D$  realer Körper nur im Innern des Dreiecks 123 von Abb. 4 liegen. Da jedem Punkt dieses Dreiecks eindeutig eine bestimmte Form des Trägheitsellipsoides zugeordnet ist, soll das Dreieck als Formdreieck bezeichnet werden.<sup>1</sup>

Aus Abb. 5 kann die Zuordnung bestimmter Körperformen (genauer: Formen des Trägheitsellipsoides) zu den Punkten des Formdreiecks abgelesen werden. Es gelten die folgenden Entsprechungen:

- $\alpha$ ) der Mittelpunkt des Dreiecks entspricht einem kugelförmigen Trägheitsellipsoid ( $A = B = C$ ),
- $\beta$ ) die Mittellinien entsprechen rotationssymmetrischen Trägheitsellipsoiden ( $A = B$ ,  $B = C$ ,  $C = A$ ),
- $\gamma$ ) die Eckpunkte entsprechen stabförmigen Körpern. Für ihre Hauptträgheitsmomente gilt  $A = B$ ,  $C = 0$  oder  $B = C$ ,  $A = 0$  oder  $C = A$ ,  $B = 0$ .
- $\delta$ ) Punkten auf den Seiten des Formdreiecks entsprechen Scheiben, d. h. Körper mit ebener Massenverteilung. Für sie gelten die Beziehungen (24).
- $\varepsilon$ ) Jedem der 6 durch die Mittellinien abgeteilten Teildreiecke entspricht eine der 6 möglichen Größenbeziehungen zwischen den drei Hauptträgheitsmomenten.

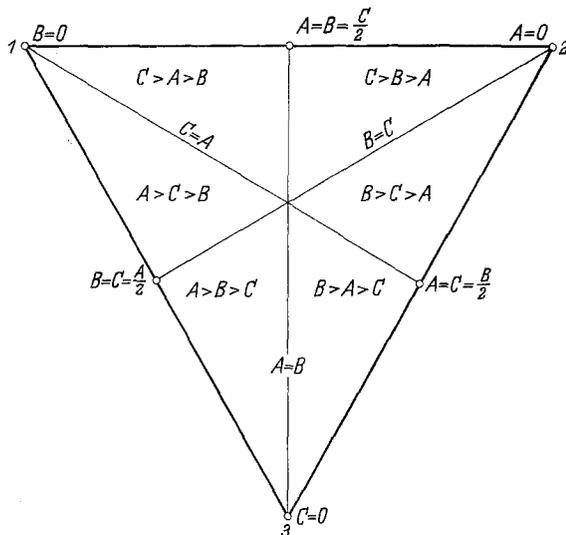


Abb. 5. Das Formdreieck.

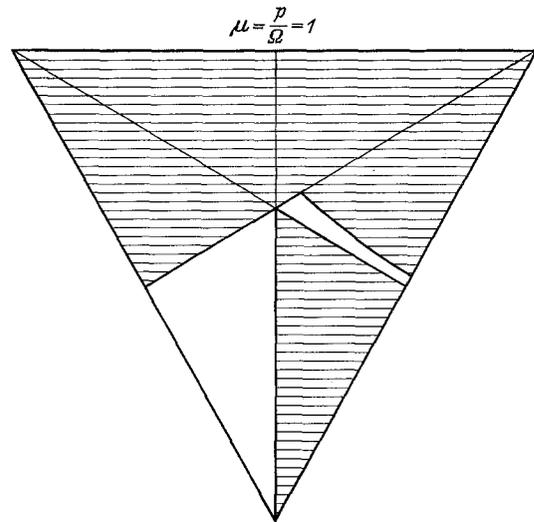


Abb. 6. Stabilitätsbereiche eines Satelliten im Zustand der relativen Ruhe.

b) Die Stabilität von Satelliten im Zustand der relativen Ruhe. Die in Ziff. 3b erwähnten Ergebnisse von *Beletzki* und *DeBra* sind in Abb. 6 im Formdreieck dargestellt worden. Wird die Orientierung des Satelliten so gewählt, daß die Hauptachsen  $xyz$  entsprechend mit den Achsen  $\xi \eta \zeta$  nach Abb. 1 zusammenfallen, dann lassen sich aus Abb. 6 die folgenden Ergebnisse ablesen:

$\alpha$ ) Für  $B < C$  (linke obere Hälfte des Dreiecks) ist keine Stabilität vorhanden. Von den beiden in die Bahnebene fallenden Hauptachsen muß also die mit dem kleineren Trägheitsmoment zum Anziehungszentrum weisen, wenn Stabilität angestrebt wird.

$\beta$ ) Für stabile Konfigurationen darf  $A$  nicht mittleres Hauptträgheitsmoment sein.

$\gamma$ ) Die Orientierung des Satelliten ist sicher stabil, wenn  $A > B > C$  gilt. Die Eckpunkte des dazugehörigen Teildreiecks entsprechen: einem Körper mit kugelförmigem Trägheitsellipsoid, einem Stab, dessen Achse zum Anziehungszentrum zeigt und einer symmetrischen Scheibe, deren Symme-

<sup>1</sup> Herrn Dozent Dr. *H. Lippmann*, Hannover, verdanke ich den Hinweis auf eine interessante Analogie: die hier gegebene Darstellung entspricht einem von *A. F. Möbius* gegebenen Beispiel projektiver Koordinaten. In seinem „Baryzentrischen Kalkül“ (Leipzig 1827) führt *Möbius* als Koordinaten eines Punktes  $P$  in einer Ebene diejenigen fiktiven Gewichte ein, die in den Ecken eines beliebigen, in der betrachteten Ebene liegenden Dreiecks angebracht werden müssen, wenn  $P$  zum Schwerpunkt gemacht werden soll. Verwendet man nun anstelle der Gewichte die Hauptträgheitsmomente eines starren Körpers und nimmt als Dreieck das große gleichseitige Dreieck von Abb. 4 mit den Eckpunkten auf den Koordinatenachsen, dann erhält man genau die hier beschriebene Darstellung.

trieachse normal zur Bahnebene steht. Auch der Bildpunkt des natürlichen Erdsatelliten, des Mondes, liegt in diesem Teildreieck, nahe der Mitte des Formdreiecks.

δ) Im Teildreieck  $B > C > A$  kann Stabilität vorhanden sein, sofern die Abweichungen von einem bezüglich der  $y$ -Achse symmetrischen ( $A = C$ ), abgeplatteten ( $B > C$ ) Körper nicht zu groß sind. Im ganzen Teildreieck  $B > C > A$  liegt statische Instabilität vor, da das vom Schweregradienten herrührende Moment derartige Satelliten aus ihrer Lage herauszudrehen sucht. In dem schmalen stabilen Streifen reicht jedoch das schwache, von der Teilnahme an der Umlaufbewegung herrührende Kreiselmoment zu einer Kompensation des Schweremomentes aus.

c) Die Stabilität des sich überschlagenden Satelliten. Hier muß zwischen einem bezüglich der Umlaufbewegung gegensinnigen ( $\mu < 1$ ) und gleichsinnigen ( $\mu > 1$ ) Überschlagen unterschieden werden. Die unter Anwendung der in Ziff. 3c beschriebenen Methoden erhaltenen Ergebnisse sind in den Abb. 7 und 8 dargestellt worden.

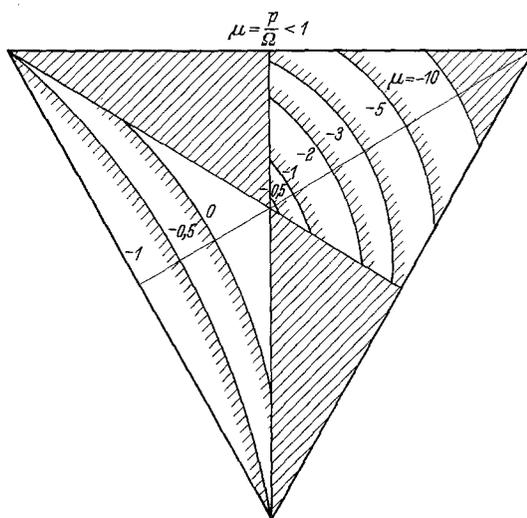


Abb. 7. Stabilitätsbereiche für Satelliten, die sich gegensinnig zur Bahndrehung überschlagen.

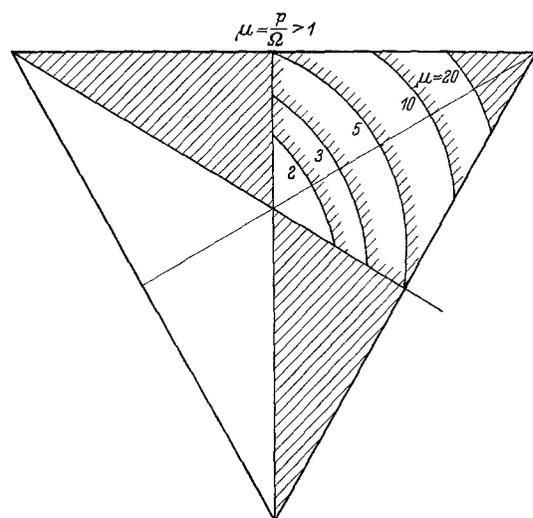


Abb. 8. Stabilitätsbereiche für Satelliten, die sich gleichsinnig zur Bahndrehung überschlagen.

Bemerkenswert ist, daß jetzt alle Stabilitätsbereiche symmetrisch zu der von der rechten oberen Ecke ausgehenden Mittellinie des Formdreiecks sind. Dies bedeutet, daß  $B$  und  $C$  vertauscht werden dürfen, ohne daß sich das Stabilitätsverhalten ändert. Da die Hauptsachen  $y$  und  $z$  während der Überschlagbewegung in der Bahnebene rotieren, ist dieses Verhalten physikalisch plausibel.

Besonderes Interesse verdient der Fall  $\mu = 0$ , bei dem der Satellit eine fast translatorische Umlaufbewegung vollführt. Für astronomische Laboratorien kann das wichtig sein, wenn man eigenstabile, d. h. ohne eine aktive Lagenregelung arbeitende Stationen verwenden möchte. Die Theorie zeigt hier, daß nur für einen recht kleinen Bereich von Körpern, deren Trägheitsellipsoid fast kugelförmig ist und deren größtes Hauptträgheitsmoment  $A$  ist, stabile Orientierungen zu erwarten sind (s. Abb. 7,  $\mu = 0$ ).

Für stärker gegensinnige Eigendrehungen erweitert sich der Stabilitätsbereich nach links unten und rechts oben, wobei jedoch in jedem Falle die Bereiche  $C > A > B$  und  $B > A > C$  (d. h.  $A$  ist mittleres Hauptträgheitsmoment) ausgespart bleiben. Für  $\mu \geq -1$  sind die beiden, durch  $A > C > B$  und  $A > B > C$  gekennzeichneten Teildreiecke Stabilitätsbereiche. Unabhängig von den Werten von  $B$  und  $C$  ist dann Stabilität vorhanden, sofern nur  $A$  das größte Hauptträgheitsmoment ist. Der Körper ist dann bezüglich der  $x$ -Achse abgeplattet. Für Körper, die bezüglich der  $x$ -Achse schlank sind (d. h.  $A$  ist kleinstes Hauptträgheitsmoment) wird der Stabilitätsbereich um so größer, je stärker die Eigendrehung ist. Durch hinreichend schnelle Eigendrehung lassen sich sogar dünne stabförmige Körper, deren Stabachse normal zur Bahnebene liegt, stabilisieren.

Entsprechende Ergebnisse werden auch für gleichsinnig überschlagende Satelliten ( $\mu > 1$ ) erhalten (s. Abb. 8). Stabilität wird hier für abgeplattete Körper ( $A > C > B$  und  $A > B > C$ ) bereits früher erreicht, als bei gegensinnig überschlagenden Satelliten.

d) Der Übergang von pendelnden zum sich überschlagenden Satelliten. Bei einem Vergleich der Abb. 6 mit den Abb. 7 und 8 drängt sich die Frage auf, wie der Übergang von dem unsymmetrischen Stabilitätsbereich der Abb. 6 zu den symmetrischen Bereichen der Abb. 7 und 8 vor sich geht. Dazu kann festgestellt werden, daß nicht nur der ideale Fall der relativen Ruhe, sondern auch Pendelbewegungen entsprechend der partikulären Lösung (4) zu einem unsymmetrischen Stabilitätsdiagramm führen. Solange die Anfangsdrehung  $\dot{\varphi}_0$  hinreichend klein ist und das vom Schweregradienten herrührende Moment ausreicht, den Satelliten am Überschlagen zu verhindern, stellt sich eine Nachbarbewegung zum Zustand der relativen Ruhe ein. Man könnte hier von einem Synchronisierungsbereich sprechen. Wenn jedoch die Anfangsdrehung  $\dot{\varphi}_0$  einen der beiden Grenzwerte überschreitet, die zum Überschlagen führen, dann werden die Stabilitätsbereiche symmetrisch. Der Übergang von symmetrischen zu unsymmetrischen Stabilitätsdiagrammen erfolgt also bei Überschreiten der Grenzwerte unstetig.

Nach (4) und (5) ist die Grenze zwischen Pendeln und Überschlagen durch

$$\frac{\dot{\varphi}_0}{\nu} = \frac{\dot{\varphi}_0}{\Omega} \sqrt{\frac{A}{3(B-C)}} = 1 \quad (26)$$

gegeben. Daraus können die Grenzwerte für  $\mu_0$  errechnet werden:

$$\mu_0 = \frac{p_0}{\Omega} = 1 + \frac{\dot{\varphi}_0}{\Omega} = 1 + \sqrt{\frac{3(B-C)}{A}} \quad (27)$$

Das Ergebnis einer Auswertung dieser Beziehung ist in Abb. 9 im Formdreieck dargestellt worden.

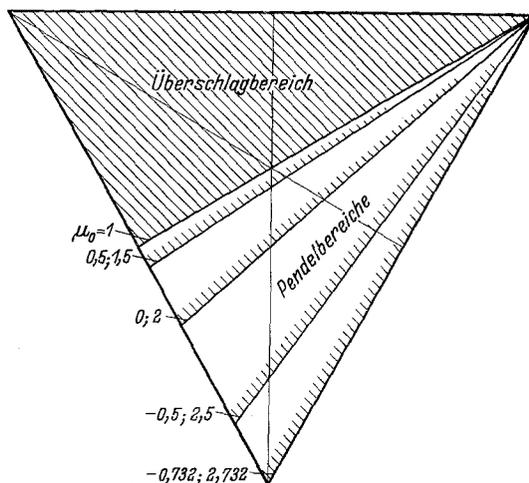


Abb. 9. Abgrenzung der Pendel- von den Überschlagbereichen im Formdreieck für verschiedene Anfangswerte  $\mu_0$  der bezogenen Drehgeschwindigkeit.

Mit wachsender bezogener Anfangsdrehung  $\mu_0$  wächst auch der Bereich des Überschlagens. Für

$$\mu_{01} > 2,732 \text{ bei gleichsinniger Drehung und}$$

$$\mu_{02} < -0,732 \text{ bei gegensinniger Drehung}$$

überschlagen sich alle Satelliten, wie auch ihre Gestalt sein mag. Auch für  $B < C$  findet stets ein Überschlagen statt, da der Satellit dann seine Bewegung mit  $\varphi = 0$  aus einer statisch instabilen Gleichgewichtslage beginnt.

(Eingegangen am 25. August 1964.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. Kurt Magnus, Institut für Mechanik, 7 Stuttgart-I, Keplerstr. 17.