

## Die Beschleunigungsabhängigkeit der Vertikalen-Anzeige von Schwerependel und Lotkreisel

Von K. Magnus

**Übersicht:** Pendel- und Kreisel-Geräte, die unabhängig von Beschleunigungen des Aufhängepunktes die örtliche Lotrichtung anzeigen sollen, müssen nach *Schuler* [1] gewissen Abstimmbedingungen genügen. Es wird gezeigt, daß eine Erfüllung dieser Bedingungen nicht notwendigerweise auf eine Schwingungszeit von 84 Minuten führt. Dabei werden die Einflüsse des Schweregradienten und der Nutationschwingungen berücksichtigt. Für Geräte mit „schnellem Kreisel“ bleibt die 84-Minuten-Abstimmung als Näherung gültig. Sie vermag jedoch nur die länger andauernden Störbeschleunigungen unschädlich zu machen. Eine vollständig beschleunigungsunempfindliche Abstimmung ist auch bei ungedämpftem Kreiselpendel nicht möglich.

**Summary:** Pendulum and gyro devices, which are to indicate the local vertical without disturbances due to the accelerations of their point of suspension, have to meet certain tuning conditions which were first stated by *Schuler* [1]. It is shown that satisfying these conditions does not necessarily yield an oscillation with a period of 84 minutes. In the theory presented in this article, the influence of the torques due to gravity gradients, as well as the influence of nutational motions, are taken into account. In the case of a high-speed rotor, tuning for the period of 84 minutes is only valid as an approximation to avoid deviations caused by long lasting accelerations. It is, however, impossible to prevent acceleration errors completely, even in the case of an undamped system.

**1. Einleitendes.** Zur Bestimmung der Vertikalenrichtung, deren Kenntnis in der Navigation von grundlegender Bedeutung ist, werden Pendel- und Kreisel-Geräte der verschiedensten Konstruktionen verwendet. Bewegungen des Aufhängepunktes, wie sie bei fahrendem oder fliegendem Geräteträger, z. B. auf Schiffen, Flugzeugen oder bei Raketen vorkommen, können zu Fehlanzeigen führen, die entweder von der Bewegungsgeschwindigkeit oder von den Beschleunigungen abhängen. In seiner berühmt gewordenen Veröffentlichung aus dem Jahre 1923 hat *Schuler* [1] gezeigt, daß es nicht nur bei lotanzeigenden, sondern auch bei kursanzeigenden Geräten möglich ist, die Beschleunigungsfehler durch eine geeignete Abstimmung zu vermeiden. Da sich in den vier von ihm durchgerechneten Fällen — dem Fadenpendel, dem Körperpendel, dem Kreiselpendel und dem Einkreiselkompaß — stets Eigenschwingungszeiten der abgestimmten Systeme von 84 Minuten ergaben, hat man diese Erkenntnis als „84-Minuten-Prinzip“ bezeichnet.

Da die 84-Minuten-Abstimmung nun auch für die in der Trägheitsnavigation verwendeten Kreiselplattformen Bedeutung erlangt hat, werden die *Schulerschen* Ergebnisse in Veröffentlichungen der letzten Zeit viel zitiert. Dabei findet man meist fehlerhafte Darstellungen der Grundlagen des *Schulerschen* Prinzips sowie falsche Vorstellungen über dessen Gültigkeitsbereich. Mit der vorliegenden Arbeit soll ein Beitrag zur Klärung der damit zusammenhängenden Fragen geleistet werden; zugleich wird am Beispiel des Kreiselpendels eine genauere Theorie der beschleunigungsunempfindlichen Abstimmung gegeben, aus der die Grenzen dieser Abstimmungsmethode erkannt werden können.

Die bisher zum genannten Thema bekannt gewordenen theoretischen Untersuchungen sollen hier in zwei Richtungen ergänzt werden: einerseits soll der Gradient des Schwerfeldes der Erde berücksichtigt werden, andererseits wird mit den vollständigen Bewegungsgleichungen, nicht — wie meist üblich — mit den vereinfachten „technischen Kreiselgleichungen“, gerechnet. Der Einfluß des Schweregradienten, schon frühzeitig von *Schmid* [2] und *Hoch* [3] erkannt, ist dank der Fortschritte der Satellitentheorie jetzt gut zu übersehen. Vor allem weiß man nun, daß das Schwerfeld der Erde auch in kleinen räumlichen Bereichen nicht als homogen angesehen werden darf, sofern man Systeme mit extrem großen Eigenschwingungszeiten untersuchen will. Die Verwendung der vollständigen Bewegungsgleichungen empfiehlt sich aus zwei Gründen: bisher sind bei den bekannt gewordenen theoretischen Untersuchungen die Fälle des Kreiselpendels und des Körperpendels stets getrennt untersucht worden. Eine gemeinsame Behandlung durch Verwendung der nicht vereinfachten Kreiselgleichungen bringt den Vorteil, daß sich das Verhalten auch noch in solchen Fällen erkennen läßt, in denen die sonst üblichen Vernachlässigungen (z. B. die Annahme „schneller Kreisel“) nicht mehr zulässig sind. Weiterhin läßt sich der Einfluß verschiedener, in einem System

vorhandener Eigenschwingungen erkennen. Bisher sind beispielsweise die durch langperiodische Bewegungen (z. B. bei Schiffsmanövern) entstehenden Beschleunigungsfehler völlig unabhängig von kurzperiodischen Einwirkungen (z. B. bei Schlinger- oder Rüttelbewegungen) untersucht worden. Das ist als ausreichende Näherung sicher zulässig, wenn die Frequenzbereiche dieser Störungen weit auseinander liegen und wenn entsprechendes für die im System vorkommenden Eigenschwingungen gilt. Bei komplizierten Geräten mit mehreren Eigenschwingungsmöglichkeiten ist jedoch Vorsicht geboten.

Von den in diesem Zusammenhang interessierenden Veröffentlichungen zum Kreiselpendel sollen hier die Arbeiten von *Stellmacher* [4], *Ischlinski* [5], *Bogdanovič* [6] und *Fischel* [7] erwähnt werden. Gemeinsam ist ihnen die Verwendung der vereinfachten technischen Kreiselgleichungen, bei denen die Drallanteile der Gehäuse vernachlässigt werden. Ferner werden ausnahmslos die Anteile des Schweregradienten in den Bewegungsgleichungen vernachlässigt. Solange ein hinreichend schnell laufender Kreisel vorausgesetzt wird, bleibt der dadurch entstehende Fehler in tragbaren Grenzen. Grobe Fehler würden jedoch bei einem Grenzübergang zu Systemen mit kleinem Drall und zum Körperpendel entstehen. Die Arbeiten der vier genannten Autoren unterscheiden sich in den Voraussetzungen bezüglich der zugelassenen Bewegungen des Geräteaufhängepunktes auf der Erdoberfläche — und damit zugleich auch in der Betrachtungsweise. Besonders zweckmäßig und verallgemeinerungsfähig ist die von *Stellmacher* angewendete Methode, die hier sinngemäß auf das verallgemeinerte Problem übertragen werden soll.

In der vorliegenden Arbeit soll nun das Verhalten eines Lotkreisels unter den folgenden Voraussetzungen untersucht werden:

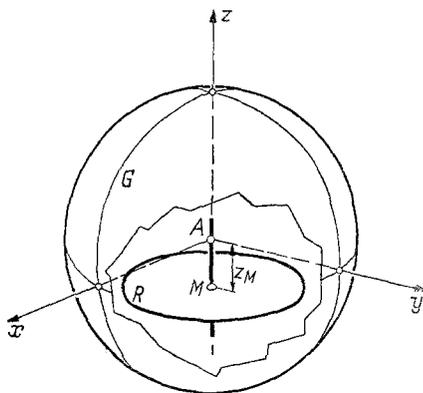


Abb. 1. Skizze eines Lotkreisels, der aus Rotor und Schwimmerkugel besteht.

1. Ein symmetrischer Rotor  $R$  befinde sich in einem ihn umschließenden, ebenfalls symmetrischen Gehäuse  $G$ , z. B. in einer Schwimmerkugel, wie sie in Abb. 1 skizziert ist. Die für Rotor und Gehäuse gemeinsame Symmetrieachse sei  $z$ -Achse eines kartesischen Koordinatensystems. Für sie mögen die Trägheitsmomente  $C_R$  und  $C_G$  gelten mit  $C = C_R + C_G$ . Für die Achsen senkrecht zur Symmetrieachse gilt dann sinngemäß  $A_R = B_R$  und  $A_G = B_G$  mit  $A = A_R + A_G$  und  $B = B_R + B_G$ .

2. Das aus Rotor und Gehäuse bestehende System besitze einen trägerfesten Fixpunkt  $A$  („Aufhängepunkt“), der bei einer Schwimmerkugel mit dem geometrischen Mittelpunkt übereinstimmt.

3. Der gemeinsame Massenmittelpunkt  $M$  von Rotor und Gehäuse liege auf der Symmetrieachse in einem Abstand  $z_M$  „unterhalb“ des Aufhängepunktes:  $\mathbf{r}_M = -\mathbf{e}_z z_M$ , mit dem Abstandsvektor  $\mathbf{r}_M$  und dem Einheitsvektor  $\mathbf{e}_z$  in der  $z$ -Richtung.

4. Reibungs- und Antriebsmomente um die  $z$ -Achse des Rotors sollen im Gleichgewicht sein. Dämpfungsmomente für die Schwimmerkugel werden vernachlässigt.

5. Der Aufhängepunkt  $A$  möge in beliebiger Weise auf der als kugelförmig betrachteten Erdoberfläche bewegt werden. Bei konstantem Erdradius  $R$  folgt dann durch Differentiation des Vektors  $\mathbf{R}$  die Geschwindigkeit von  $A$  aus  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}$ , und die Beschleunigung aus  $\dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{R}}$ .

6. Die Geräteabmessungen seien klein gegenüber dem Erdradius, und die Gerätemasse sei klein gegenüber der Erdmasse. Es kann dann mit den nach diesen kleinen Größen entwickelten, und durch Vernachlässigungen höherer Potenzen erhaltenen Grundgleichungen gearbeitet werden.

Im Verlauf der späteren Rechnung wird außerdem noch vorausgesetzt werden, daß die  $z$ -Achse des Gerätes nur wenig von der zum Erdmittelpunkt weisenden Richtung abweicht, und daß die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  nicht zu groß wird.

**2. Die Ausgangsgleichungen.** Die Bewegungen des Lotkreisels können mit Hilfe des auf den geführten Aufhängepunkt  $A$  bezogenen Drallsatzes berechnet werden. Wie in einer früheren Veröffentlichung [8] gezeigt wurde, kann dieser in der Form

$$\dot{\mathbf{H}}_A = -m(\mathbf{r}_M \times \mathbf{R}) + m\mathbf{g}(\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_M) + \frac{3}{R}\mathbf{g}(\mathbf{e}_z \times \mathbf{O}\mathbf{e}_z) \quad (1)$$

geschrieben werden. Darin bedeuten:  $\mathbf{H}_A$  den Drallvektor bezüglich des Punktes  $A$ ,  $m$  die Masse von Rotor und Gehäuse,  $g$  den als konstant angenommenen Betrag der Erdbeschleunigung auf der

Erdoberfläche,  $e_z$  den Einheitsvektor in Richtung des Vektors  $R$  und  $\Theta$  den Trägheitstensor des aus Rotor und Gehäuse bestehenden Lotkreisels. Punkte über den Größen bedeuten zeitliche Ableitungen im Inertialsystem.

Die drei auf der rechten Seite von (1) stehenden Glieder kennzeichnen Momente, die auf den Lotkreisel infolge der Führungsbeschleunigungen des Aufhängepunktes, infolge des homogenen Anteils des Schwerfeldes und infolge des Schweregradienten einwirken. Diese drei Momente sollen im folgenden durch  $M_B$ ,  $M_H$  und  $M_G$  abgekürzt werden. Wegen der eingangs aufgezählten Voraussetzungen kann man wie folgt umformen (s. auch Abb. 2):

$$\left. \begin{aligned} M_B &= -m (r_M \times \ddot{R}) = m z_M (e_z \times \dot{v}), \\ M_H &= m g (e_z \times r_M) = m g z_M (e_z \times e_z), \\ M_G &= \frac{3g}{R} (e_z \times \Theta e_z) = \frac{3g}{R} (C - A) (e_z \cdot e_z) (e_z \times e_z). \end{aligned} \right\} (2)$$

Das im letzten Ausdruck vorkommende Skalarprodukt kann auch  $e_z \cdot e_z = \cos \vartheta$  geschrieben werden, wobei  $\vartheta$  der Winkel zwischen der gerätefesten  $z$ -Achse (Symmetrieachse) und der Richtung zum Erdmittelpunkt ist. Wegen (2) kann (1) nunmehr in der Form

$$\dot{H}_A = e_z \times \left[ m z_M \dot{v} + m g z_M e_z - \frac{3g}{R} (C - A) (e_z \cdot e_z) e_z \right] \quad (3)$$

geschrieben werden. Durch skalare Multiplikation mit  $e_z$  folgt daraus sofort als erstes Integral die Konstanz der Drallkomponente in der  $z$ -Richtung:

$$\dot{H}_A e_z = \dot{H}_{Az} = 0, \quad H_{Az} = H_0 = \text{konst.} \quad (4)$$

Dabei ist zu beachten, daß diese in die Symmetrieachse fallende Drallkomponente bei schnelllaufendem Kreisel fast ausschließlich durch den Rotor aufgebracht wird.

Die Form (3) des Drallsatzes legt eine Umformung der linken Seite nahe. Diese kann unter Aufspalten des Dralls in Komponenten in Richtung der Symmetrieachse und senkrecht dazu wie folgt vorgenommen werden:

$$H_A = H_0 e_z + A (e_z \times \dot{e}_z). \quad (5)$$

Das im zweiten Glied vorkommende Vektorprodukt ist die in die körperfeste  $xy$ -Ebene fallende Komponente der Absolutdrehung des Gehäuses. Durch Differentiation von (5) folgt nun unter Berücksichtigung der Beziehung  $\dot{e}_z = e_z \times (\dot{e}_z \times e_z)$ :

$$\dot{H}_A = e_z \times [H_0 (\dot{e}_z \times e_z) + A \ddot{e}_z]. \quad (6)$$

Damit läßt sich die Bewegungsgleichung (3) umformen in:

$$e_z \times \left\{ H_0 (\dot{e}_z \times e_z) + A \ddot{e}_z - m z_M \dot{v} - \left[ m g z_M - \frac{3g}{R} (C - A) (e_z \cdot e_z) \right] e_z \right\} = 0. \quad (7)$$

Das ist eine Bestimmungsgleichung für  $e_z$ , in die außer konstanten Größen die von den Bewegungen des Aufhängepunktes abhängigen Zeitfunktionen  $v(t)$  und  $e_z(t)$  eingehen.

Die Gleichung (7) ist erfüllt, wenn der in geschweiften Klammern stehende Ausdruck verschwindet oder einen Vektor in Richtung  $e_z$  ergibt. Setzt man diesen gleich  $-k e_z$  mit einem beliebigen skalaren Faktor  $k$ , dann läßt sich (7) in der Form schreiben:

$$A e_z + H_0 (\dot{e}_z \times e_z) + k e_z = m z_M \dot{v} + \left[ m g z_M - \frac{3g}{R} (C - A) (e_z \cdot e_z) \right] e_z. \quad (8)$$

Diese noch für beliebige Abweichungen des Lotkreisels von der örtlichen Vertikalen gültige Gleichung soll nun für den Fall kleiner Differenzen

$$d = e_z - e_z \quad \text{mit} \quad d \ll 1 \quad (9a)$$

sowie für nicht zu große Geschwindigkeiten

$$v \ll \sqrt{gR} = 7,9 \text{ km/s} \quad (9b)$$

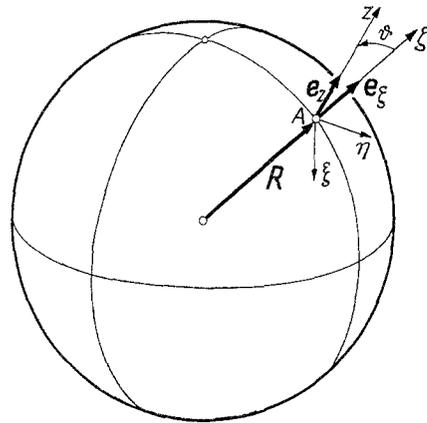


Abb. 2. Die Vektoren  $R$ ,  $e_z$ ,  $e_z$  bei Führung des Aufhängepunktes  $A$  auf der Erdoberfläche.

linearisiert werden. Unter Berücksichtigung von  $e_z e_z \approx 1$  und  $e_z = \mathbf{R}/R$  und bei Vernachlässigung von höheren Potenzen der kleinen Größen folgt dann aus (8) die Näherungsgleichung:

$$A \ddot{\mathbf{d}} + \frac{H_0}{R} (\dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{R}) + k \mathbf{d} = \left( m z_M - \frac{A}{R} \right) \dot{\mathbf{v}} - \frac{H_0}{R^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{R}) + \left[ m g z_M - \frac{3g}{R} (C - A) - k \right] \frac{\mathbf{R}}{R}. \quad (10)$$

**3. Das frei beweglich gelagerte Körperpendel.** Eine Sonderlösung der Grundgleichung (8) bzw. (10) für den Fall  $H_0 = 0$  läßt sich leicht finden. Wählt man nämlich

$$z_M = \frac{A}{m R} \quad (11)$$

und

$$k = m g z_M - \frac{3g}{R} (C - A), \quad (12)$$

dann bleibt von (10) nur die homogene Gleichung

$$A \ddot{\mathbf{d}} + \left[ m g z_M - \frac{3g}{R} (C - A) \right] \mathbf{d} = 0 \quad (13)$$

mit der partikulären Lösung  $\mathbf{d} \equiv 0$ . Dies bedeutet, daß die Symmetrieachse des Gerätes unabhängig von den Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}$  oder den Beschleunigungen  $\dot{\mathbf{v}}$  des Aufhängepunktes stets in die Richtung zum Erdmittelpunkt fällt. Das ist gerade der von *Schuler* bereits angegebene Fall des abgestimmten Körperpendels. Er läßt sich realisieren, wenn die Anfangsbedingungen  $H_0 = 0$ ,  $\mathbf{d} = 0$  und  $\dot{\mathbf{d}} = 0$  für  $t = 0$  erfüllt sind, und wenn außerdem die Abstimmbedingung (11) gilt. Sie besagt, daß die reduzierte Pendellänge des Körperpendels gleich dem Erdradius  $R$  sein muß.

Man erkennt schon hier, daß die genannte Sonderlösung nur bei einem Körperpendel mit drei Freiheitsgraden erreicht werden kann. Wollte man das Pendel beispielsweise kardanisch lagern, so wäre  $H_0$  abhängig von den Bewegungen der Kardanachsen, also von eventuellen Drehbewegungen des Geräteträgers. Die Bedingung  $H_0 = 0$  ließe sich dann nicht allgemein erfüllen, sofern man von dem ausgearteten Fall eines stabförmigen Pendels mit  $C = 0$  absieht.

Es muß ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß ein nach (11) abgestimmtes Körperpendel in die Richtung des Vektors der Erdanziehung, nicht aber in die Richtung des örtlichen Lotes weist. Wegen des Anteils der durch Eigenbewegungen  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}$  entstehenden Zentrifugalbeschleunigungen weicht das Lot etwas von der Richtung zum Erdmittelpunkt ab. Bei einem abgestimmten Körperpendel wird das von den Zentrifugalbeschleunigungen herrührende Moment gerade durch ein Moment  $M^* = A \dot{\omega}^*$  kompensiert, wobei  $\dot{\omega}^*$  die zum Mitdrehen der Pendel-Symmetrieachse erforderliche Drehbeschleunigung ist.

Wird das Gleichgewicht des zum Erdmittelpunkt zeigenden Lotpendels gestört, dann entstehen Schwingungen, deren Schwingungszeit aus (13) unter Berücksichtigung von (11) folgt:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g} \frac{A}{4A - 3C}} = T_S \sqrt{\frac{A}{4A - 3C}}. \quad (14)$$

Diese Schwingungszeit ist nicht — wie immer wieder behauptet wird — gleich der *Schulerperiode*  $T_S = 84,4$  Minuten. Sie hängt vielmehr von den Hauptträgheitsmomenten und damit von der Gestalt des Pendels ab. Man erhält:

$$\text{für den Stab } (C = 0): \quad T = 42,2 \text{ min} = \frac{1}{2} T_S$$

$$\text{für ein Pendel mit kugelförmigem Trägheitsellipsoid } (C = A): \quad T = 84,4 \text{ min} = T_S$$

$$\text{für ein Pendel mit abgeplattetem Trägheitsellipsoid mit } C = 4A/3: \quad T \rightarrow \infty$$

Für  $C > 4A/3$ , also für Pendel mit stark abgeplattetem Trägheitsellipsoid, sind keine stabilen Schwingungen möglich.

Man erkennt aus diesem, im Schrifttum häufig zitierten und fast ausnahmslos falsch dargestellten Sonderfall des Körperpendels, daß der oft behauptete zwangsläufige Zusammenhang zwischen der 84-Minuten-Schwingungszeit und der beschleunigungsunempfindlichen Abstimmung des Pendels nicht existiert.

**4. Das Verhalten des Lotkreisels.** Die Bewegungsgleichung (10) soll nun allgemein für  $H_0 \neq 0$  gelöst werden. Dazu wird zunächst der willkürliche Faktor  $k$  nach (12) gewählt, so daß der letzte

Term der rechten Seite von (10) verschwindet. Es bleibt dann

$$A \ddot{\mathbf{d}} + \frac{H_0}{R} (\dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{R}) + \left[ m g z_M - \frac{3g}{R} (C - A) \right] \mathbf{d} = \mathbf{f}(t), \quad (15)$$

mit der von Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung abhängigen Zeitfunktion

$$\mathbf{f}(t) = \left( m z_M - \frac{A}{R} \right) \dot{\mathbf{v}} - \frac{H_0}{R^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{R}). \quad (16)$$

Die Vektorgleichung (15) soll nun in eine lösbar Form gebracht werden. Dazu beachten wir, daß die Vektoren  $\mathbf{d}$  und  $\mathbf{v}$  stets in der Horizontalebene, also senkrecht zu  $\mathbf{R}$  liegen. Wir können die Horizontalebene als komplexe Ebene, und die Endpunkte von  $\mathbf{d}$  und  $\mathbf{v}$  als Zahlen in dieser Ebene auffassen. Die vektorielle Multiplikation mit dem Einheitsvektor  $\mathbf{e}_z = \mathbf{R}/R$  ist dann gleichbedeutend mit einer Drehung des multiplizierten Vektors um  $90^\circ$  entgegen dem Uhrzeigersinn. Man kann also schreiben:

$$\frac{H_0}{R} (\dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{R}) = H_0 \left( \dot{\mathbf{d}} \times \frac{\mathbf{R}}{R} \right) = -i H_0 \dot{\mathbf{d}}, \quad \frac{H_0}{R^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{R}) = \frac{H_0}{R} \left( \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{R}}{R} \right) = -i \frac{H_0}{R} \mathbf{v}.$$

Damit gehen (15) und (16) über in:

$$A \ddot{\mathbf{d}} - i H_0 \dot{\mathbf{d}} + k \mathbf{d} = \left( m z_M - \frac{A}{R} \right) \dot{\mathbf{v}} + i \frac{H_0}{R} \mathbf{v} = \mathbf{f}(t), \quad (17)$$

wobei wiederum  $k$  nach (12) als Abkürzung verwendet wurde. Die Lösung dieser Gleichung kann für beliebige Funktionen  $\mathbf{f}(t)$  angegeben werden. Die homogene Gleichung führt auf eine charakteristische Gleichung

$$A \lambda^2 - i H_0 \lambda + k = 0$$

mit den Lösungen  $\lambda_1 = i \omega_1$  und  $\lambda_2 = i \omega_2$ . Die reellen Kreisfrequenzen

$$\left. \begin{matrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{matrix} \right\} = \frac{H_0}{2A} \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4Ak}{H_0^2}} \right] \quad (18)$$

entsprechen den beiden möglichen Bewegungsformen des Kreiselpendels, der Nutation ( $\omega_1$ ) und der Präzession ( $\omega_2$ ). Für den oft interessierenden Fall schnelllaufender Kreisel wird  $4Ak/H_0^2 \ll 1$ ; dann erhält man aus (18) die Näherungswerte:

$$\omega_1 \approx \frac{H_0}{A}, \quad \omega_2 \approx -\frac{k}{H_0}. \quad (19)$$

Die beiden partikulären Lösungen

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_{10} e^{i \omega_1 t}, \quad \mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_{20} e^{i \omega_2 t} \quad (20)$$

bilden ein Fundamentalsystem, aus dem die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (17) wie folgt bestimmt werden kann:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_{10} e^{i \omega_1 t} \left[ 1 + \int_0^t \frac{\mathbf{d}_2 \mathbf{f}(t) dt}{A (\mathbf{d}_2 \dot{\mathbf{d}}_1 - \mathbf{d}_1 \dot{\mathbf{d}}_2)} \right] + \mathbf{d}_{20} e^{i \omega_2 t} \left[ 1 + \int_0^t \frac{\mathbf{d}_1 \mathbf{f}(t) dt}{A (\mathbf{d}_1 \dot{\mathbf{d}}_2 - \mathbf{d}_2 \dot{\mathbf{d}}_1)} \right]. \quad (21)$$

Mit (20) folgt daraus:

$$\mathbf{d} = e^{i \omega_1 t} \left[ \mathbf{d}_{10} + \frac{i}{A (\omega_2 - \omega_1)} \int_0^t \mathbf{f}(t) e^{-i \omega_1 t} dt \right] + e^{i \omega_2 t} \left[ \mathbf{d}_{20} + \frac{i}{A (\omega_1 - \omega_2)} \int_0^t \mathbf{f}(t) e^{-i \omega_2 t} dt \right]. \quad (22)$$

Die hierin vorkommenden Integrale werden nun — nach dem Vorbild von *Stellmacher* [4] — durch partielle Integration so umgeformt, daß der von  $\mathbf{v}$  abhängende Anteil von  $\mathbf{f}(t)$  unter dem verbleibenden Integral als Ableitung  $\dot{\mathbf{v}}$  erscheint:

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbf{v} e^{-i \omega t} dt &= \left[ i \frac{\mathbf{v}}{\omega} e^{-i \omega t} \right]_0^t - \frac{i}{\omega} \int_0^t \dot{\mathbf{v}} e^{-i \omega t} dt \\ &= \frac{i}{\omega} [\mathbf{v} e^{-i \omega t} - \mathbf{v}_0] - \frac{i}{\omega} \int_0^t \dot{\mathbf{v}} e^{-i \omega t} dt. \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

$$\mathbf{d}_{10}^* = \mathbf{d}_{10} + i \frac{H_0 v_0}{A R \omega_1 (\omega_2 - \omega_1)}, \quad \mathbf{d}_{20}^* = \mathbf{d}_{20} + i \frac{H_0 v_0}{A R \omega_2 (\omega_1 - \omega_2)} \quad (23)$$

läßt sich die allgemeine Lösung (22) dann wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} = & [\mathbf{d}_{10}^* e^{i \omega_1 t} + \mathbf{d}_{20}^* e^{i \omega_2 t}] - i \frac{H_0 \mathbf{v}}{A R \omega_1 \omega_2} + \frac{i e^{i \omega_1 t}}{A (\omega_2 - \omega_1)} \left[ m z_M - \frac{A}{R} + \frac{H_0}{R \omega_1} \right] \int_0^t \dot{\mathbf{v}} e^{-i \omega_1 t} dt + \\ & + \frac{i e^{i \omega_2 t}}{A (\omega_1 - \omega_2)} \left[ m z_M - \frac{A}{R} + \frac{H_0}{R \omega_2} \right] \int_0^t \dot{\mathbf{v}} e^{-i \omega_2 t} dt. \end{aligned} \quad (24)$$

Die darin vorkommenden Glieder geben den Einfluß der Eigenschwingungen (Nutation und Präzession), der Führungsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}$  sowie der Beschleunigung  $\dot{\mathbf{v}}$  an. Die Eigenschwingungen verschwinden, wenn sich der Lotkreisel für  $t = 0$  gerade in der seiner Anfangsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_0$  entsprechenden Lage befindet. Dann nämlich sind die Ausdrücke  $\mathbf{d}_{10}^*$  und  $\mathbf{d}_{20}^*$  nach (23) gerade gleich Null.

Der Geschwindigkeitsanteil in (24) zeigt an, daß der Lotkreisel nicht die wirkliche Richtung zum Erdmittelpunkt anzeigt, sondern quer zur Bewegungsrichtung ausweicht. Die Größe der Abweichung ist dem Betrag der absoluten Geschwindigkeit proportional; sie setzt sich aus dem Anteil der Erddrehung und dem der Eigenbewegung auf der Erdoberfläche zusammen. Dementsprechend enthält dieses Glied den bekannten „Erddrehfehler“ zusammen mit dem „Fahrtfehler“. Eine Trennung dieser beiden Anteile kann unter Berücksichtigung von geographischer Breite und Kurswinkel durch rein geometrische Überlegungen erfolgen.

Die beiden letzten Glieder von (24) geben die beschleunigungsabhängigen Deviationen wieder. Sie verschwinden bei beliebigen Funktionen  $\mathbf{v}(t)$ , wenn die beiden in eckigen Klammern stehenden Vorfaktoren verschwinden:

$$m z_M - \frac{A}{R} + \frac{H_0}{R \omega_\nu} = 0, \quad (\nu = 1, 2). \quad (25)$$

Nur für  $H_0 = 0$ , also nur für den schon unter Ziffer 3 behandelten Sonderfall, lassen sich die beiden Forderungen gemeinsam erfüllen; denn nach (18) ist für  $H_0 \neq 0$  stets  $\omega_1 \neq \omega_2$ . Daraus folgt, daß eine allgemein gültige, beschleunigungsunempfindliche Abstimmung nicht möglich ist.

Die Kreisfrequenzen  $\omega$  sind, wie man aus (18) und (12) sehen kann, Funktionen des Abstandes  $z_M$  des Massenmittelpunktes vom Aufhängepunkt. Folglich sind (25) Bestimmungsgleichungen für  $z_M$ . Unter Berücksichtigung der für schnelle Kreisel geltenden Näherungswerte (19) findet man aus (25) mit  $\nu = 1$  die Forderung  $z_M = 0$ . Daß durch derartige astatistische Aufhängung die höherfrequenten Rüttelschwingungen unschädlich gemacht werden, ist plausibel. Für  $\nu = 2$  erhält man aus (25) eine quadratische Gleichung für  $z_M$ :

$$z_M^2 m^2 g R^2 - z_M m g R (3 C - 2 A) - [H_0^2 R - 3 g A (C - A)] = 0,$$

aus der sich die für schnelle Kreisel gültige Näherungslösung

$$z_M \approx \frac{H_0}{m \sqrt{R g}} \quad (26)$$

ableiten läßt. Durch einen Vergleich mit der entsprechenden Abstimmbedingung (11) für das Körperpendel findet man

$$\frac{z_{M(26)}}{z_{M(11)}} \approx \frac{H_0}{A} \sqrt{\frac{R}{g}} \approx \frac{84 \text{ Minuten}}{\text{Nutationszeit}} \gg 1.$$

Aus diesem Grunde überwiegt bei einem Kreiselpendel mit schnellem Kreisel im Ausdruck für  $k$  nach (12) der erste Anteil, so daß  $k \approx m g z_M$  angenommen werden kann. Damit aber erhält man für die Präzessionszeit unter Berücksichtigung von (19) und (26) den Wert

$$T_P = \frac{2\pi}{\omega_2} \approx 2\pi \frac{H_0}{m g z_M} \approx 2\pi \frac{H_0}{m g} \frac{m \sqrt{R g}}{H_0} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 84 \text{ Minuten.}$$

Unter der Voraussetzung schneller Kreisel bleibt also für den Lotkreisel die 84-Minuten-Abstimmung als Näherung erhalten. Jedoch darf man dabei nicht vergessen, daß dann nur der letzte Term in der Lösung (24) zum Verschwinden gebracht wird. Er entspricht Deviationen, wie sie durch langfristig

andauernde Störbeschleunigungen z. B. bei Schiffsmanövern auftreten können. Dieser Fall ist in den klassischen Arbeiten zur *Schuler*-Abstimmung ausschließlich betrachtet worden.

Der Vorteil der allgemeineren Rechnung, wie sie hier für den Lotkreisel angegeben wurde, liegt vor allem in der Möglichkeit, die verschiedenartigen Beschleunigungseinflüsse gemeinsam zu erfassen. Aus den Integralausdrücken, die in der allgemeinen Lösung (24) auftreten, lassen sich auch Schlinger-, Rüttel- und Vibrationseinflüsse bestimmen. Das dürfte besonders vorteilhaft sein, wenn man an Stelle eines einfachen Lotkreisels Mehrkreiselssysteme oder Trägheitsplattformen untersucht. In derartigen Verbänden sind oft Eigenschwingungen möglich, die ihren Frequenzen nach zwischen den schnellen Nutationen und den langsamen Präzessionen liegen. Derartige Eigenschwingungen können zusätzliche Deviationen hervorrufen, wenn sie durch Störbeschleunigungen bestimmter Frequenzbereiche angefacht werden.

#### Literatur

- [1] *M. Schuler*, Phys. Z. 24 (1923) S. 344.
- [2] *E. Schmid*, Luftfahrtforschung 17 (1940) S. 32.
- [3] *H. Hoch*, Z. Angew. Math. Mech. 24 (1944) S. 240.
- [4] *K. L. Stellmacher*, Z. Angew. Math. Mech. 19 (1939) S. 154.
- [5] *A. J. Ischlinski*, Prikladnaja Math. Mech. 21 (1957) S. 3.
- [6] *M. M. Bogdanovič*, Priborostroenije (1963) No. 5, S. 69.
- [7] *E. Fischel*, Luftfahrttechnik-Raumfahrttechnik 10 (1964) S. 101.
- [8] *K. Magnus*, Applied Mechanics. Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics, Munich 1964. Edited by *H. Görtler*. Berlin-Heidelberg-New York 1966, S. 88.

(Eingegangen am 8. Oktober 1965)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *Kurt Magnus*, 7 Stuttgart-O, Hackländerstraße 33.