

Berücksichtigung der Drehträgeit) ergaben. Geht man von der Annahme aus, daß das System in gewissen Grenzen willkürlich unterteilt werden kann — dem entspricht im Beispiel eine Unterteilung in w gleichförmige Segmente — so bleiben als Qualitätskriterien der relative Fehler und der Zeitaufwand des Verfahrens. Dieser — dargestellt durch den Vergleichswert t — ist allein abhängig von w und der Ordnung des Ansatzes. Für gleiche Unterteilung w sind die Ergebnisse durch Gefadenstücke verbunden. Ein Teil der Ergebnisse des Ansatzes 4. Ordnung — beim geraden Balken muß $2\alpha \geq 2n = 4$ sein — war bereits bekannt [7].

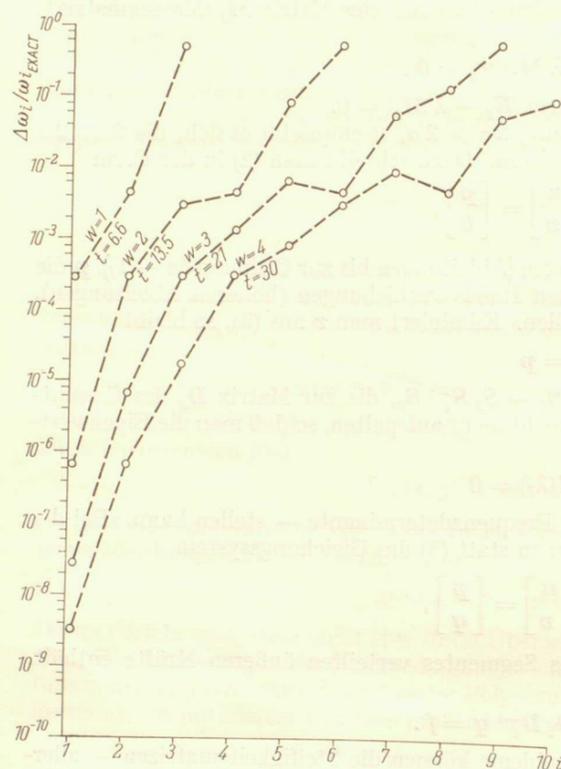


Bild 2. Ansatz 6. Ordnung

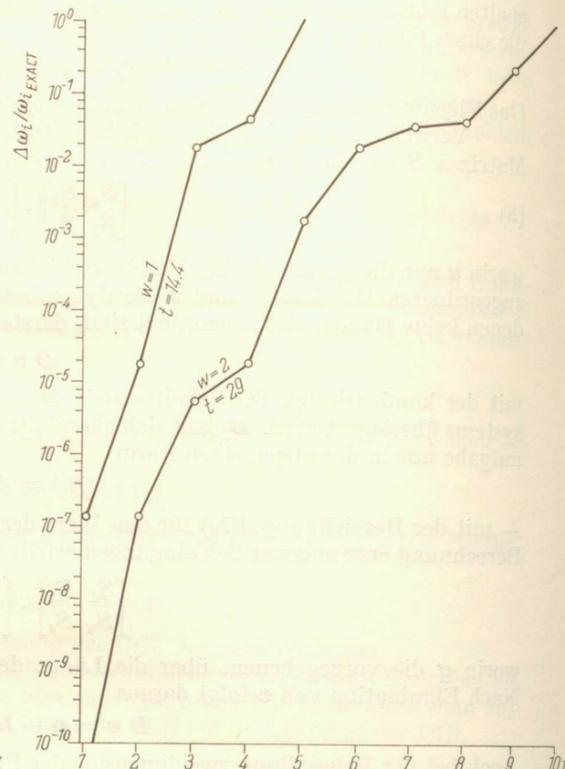


Bild 3. Ansatz 8. Ordnung

Offenbar legt der Vergleich der mit Ansätzen 4., 6. und 8. Ordnung erzielten Ergebnisse eine allgemeine Deutung nahe:

Ein Ansatz niedriger Ordnung eignet sich besser zur Berechnung der hohen, ein Ansatz höherer Ordnung aber besser zur Berechnung der niedrigen Eigenwerte. Im Bereich der niedrigen Eigenwerte läßt sich bei vorgegebener Genauigkeit der Rechenaufwand erheblich vermindern, indem das System gröber unterteilt und die Ordnung des Ansatzes erhöht wird.

Literatur

- 1 J. ARGYRIS, Matrizentheorie der Statik, Ing.-Arch. XXV, S. 174—192 (1957).
- 2 E. PESTEL und F. LECKIE, Matrix Methods in Elastomechanics, New York 1963, McGraw-Hill.
- 3 L. COLLATZ, Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, S. 132—151, Berlin 1951, Springer.
- 4 S. FALK, Das Verfahren von Rayleigh-Ritz mit Hermiteschen Interpolationspolynomen, ZAMM 43, S. 149 bis 166 (1963).
- 5 H. SCHÄFER, Eine einfache Konstruktion von Koordinatenfunktionen für die numerische Lösung zweidimensionaler Randwertprobleme nach Rayleigh-Ritz, Ing.-Arch. XXXV, S. 73—81 (1966).
- 6 E. PESTEL, Dynamic Stiffness Matrix Formulation by means of Hermitian Polynomials, Proceedings Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics 1965, Air Force Institute of Technology, Dayton (Ohio), USA.
- 7 J. ARCHER, Consistent Mass Matrix for Distributed Mass Systems, Proc. ASCE 89, August 1963.

Anschrift: Dipl.-Ing. GÜNTER GÖSCHE, 3 Hannover, Am Kleinen Felde 21

Die Stabilität des Prandtl'schen Kreisels

Von K. MAGNUS

Der PRANDTL'SCHE Kreisel besteht aus einer mit Blei ausgelegten Fahrradfelge, die so in einem Parallelogrammgehänge gelagert ist, daß sie drei Freiheitsgrade der Drehung besitzt. Durch Anbringen von Zusatzgewichten an der Radfelge kann der Kreisel unsymmetrisch gemacht werden, so daß sein Trägheitsellipsoid drei voneinander verschiedene Hauptträgheitsmomente bekommt. Durch weitere Zusatzgewichte an dem als Achse des Rades dienenden Stab können die Trägheitsmomente für die zur Stabachse rechtwinkligen Hauptachsen des Rotors verändert werden.

Die Instabilität der stationären Drehungen eines starren Körpers um die mittlere Hauptträgheitsachse läßt sich nun auf zwei Arten demonstrieren: entweder läßt man den Rotor stets nur um die Stabachse rotieren und verändert die Trägheitsmomente durch stufenweises Anbringen von Gewichten so, daß das Rotorträgheitsmoment vom größten über das mittlere zum kleinsten der Hauptträgheitsmomente wird; oder aber man läßt den Rotor nacheinander um seine drei Hauptachsen drehen, indem man außer der Drehung um die Stabachse noch Drehungen des Rades einschließlich des Gehänges um die vertikale Achse untersucht. Das Rad selbst muß dabei eine solche Stellung einnehmen, daß jeweils eine der beiden Quer-Hauptachsen in die vertikale Drehachse fällt. PFEIFFER [1] gibt an, daß stets — unabhängig von der Größe der gerade angebrachten Zusatzgewichte — die Drehungen um zwei der Rotorhauptachsen stabil, um die dritte jedoch instabil verlaufen. Ein derartiges Verhalten ist jedenfalls in Verallgemeinerung der bekannten Ergebnisse für den kräftefreien unsymmetrischen Kreisel (EULERSCHER Fall) zu erwarten. Die genauere Analyse (s. [2]) zeigt jedoch, daß eine solche Verallgemeinerung nicht zulässig ist. Der Rotor des PRANDTL'SCHEN Kreisels ist im strengen Sinne kein kräftefreier Kreisel mehr, da er den infolge von Drehbewegungen der Gehängemassen entstehenden Reaktionsmomenten ausgesetzt ist.

Unter der Voraussetzung einer astatischen Lagerung des Rotors, bei Abwesenheit dissipativer Kräfte, bei Vernachlässigung von hier nicht interessierenden weiteren Freiheitsgraden des PRANDTL'SCHEN Kreisels (z. B. seitlichen Pendelungen) lassen sich die Bewegungsgleichungen des Systems in bekannter Weise ableiten. Sie bilden drei miteinander gekoppelte nichtlineare Differentialgleichungen 2. Ordnung für die Winkel um die drei Raumachsen: α als Drehwinkel um die vertikale Aufhängeachse, β als Drehwinkel um eine rechtwinklig zur Stabachse liegende Horizontalachse und γ als Drehwinkel um die Rotorachse.

Drei partikuläre Lösungen lassen sich leicht aus den Bewegungsgleichungen ablesen. Es sind dies:

- 1) Drehungen mit $\dot{\alpha} = \text{const}$ um die vertikale Achse, wobei das Rad so orientiert wird, daß die Querachse des Rades mit dem kleineren Hauptträgheitsmoment (A_1) vertikal ist;
- 2) Drehungen mit $\dot{\alpha} = \text{const}$ um die vertikale Achse, wobei das Rad so orientiert wird, daß die Querachse des Rades mit dem größeren Hauptträgheitsmoment (B_1) vertikal ist;
- 3) Drehungen mit $\dot{\gamma} = \text{const}$ um die Radachse (Hauptträgheitsmoment C_1).

Um die Stabilität dieser permanenten Drehungen zu untersuchen, werden Nachbarbewegungen betrachtet. In den Fällen 1) und 2) führt dies auf ein System von Bewegungsgleichungen mit konstanten Koeffizienten; im Fall 3) auf ein System mit periodisch veränderlichen Koeffizienten. In allen drei Fällen lassen sich mit Hilfe bekannter Verfahren Stabilitätsbedingungen ableiten, die — abgesehen von kaum interessierenden Sonderfällen — wie folgt geschrieben werden können:

$$\text{Fall 1: } S_1 = (A_1 - B_1)(A_1 - C_1 + A_2 - C_2) > 0,$$

$$\text{Fall 2: } S_2 = (B_1 - A_1)(B_1 - C_1 + A_2 - C_2) > 0,$$

$$\text{Fall 3: } S_3 = \left[A_1 - C_1 + \frac{1}{2}(A_2 + B_2) \right] \left[B_1 - C_1 + \frac{1}{2}(A_2 + B_2) \right] > 0.$$

Darin sind A_2, B_2, C_2 die effektiven Trägheitsmomente der Aufhängung um die Vertikale, um die zur Radachse rechtwinklige horizontale Achse sowie um die Radachse selbst. Bei verschwindender Masse der Aufhängung gehen alle drei Bedingungen in die bekannte Form für den EULER-Fall über (z. B. im Fall 1: $(A_1 - B_1)(A_1 - C_1) > 0$, d. h. A_1 muß entweder größtes oder kleinstes Hauptträgheitsmoment sein).

Beim PRANDTL-Rad können die Trägheitsmomente A_2 und B_2 durch Anbringen von Zusatzgewichten auf der Radachse verändert werden. Bezeichnet man das zusätzliche Trägheitsmoment mit θ , dann kann man in guter Annäherung

$$A_2 = A_{20} + \theta; \quad B_2 = B_{20} + \theta$$

schreiben. Setzt man diese Werte in die obigen Stabilitätsausdrücke ein, so hat man drei Funktionen $S_i(\theta)$, $i = 1, 2, 3$, deren Nullstellen die Stabilitätsbereiche begrenzen. Es existieren vier Nullstellen $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} S_1 > 0 \text{ für } \theta < \theta_1; & \quad S_1 < 0 \text{ für } \theta > \theta_1, \\ S_2 > 0 \text{ für } \theta > \theta_2; & \quad S_2 < 0 \text{ für } \theta < \theta_2, \\ S_3 > 0 \text{ für } \theta < \theta_3 \text{ und } \theta > \theta_4; & \quad S_3 < 0 \text{ für } \theta_1 < \theta < \theta_3. \end{aligned}$$

Dieser Nullstellenverteilung entsprechend können nun fünf θ -Bereiche mit verschiedenem Stabilitätsverhalten unterschieden werden:

Bereiche	I $0 < \theta < \theta_1$	II $\theta_1 < \theta < \theta_2$	III $\theta_2 < \theta < \theta_3$	IV $\theta_3 < \theta < \theta_4$	V $\theta_4 < \theta$
Drehung 1	stabil	stabil	stabil	stabil	instabil
Drehung 2	instabil	instabil	stabil	stabil	stabil
Drehung 3	stabil	instabil	instabil	stabil	stabil

Die Bereiche I, III und V ergeben das vom EULER-Kreisel her bekannte Stabilitätsverhalten. Überraschend ist das Verhalten in den Bereichen II und IV: im Bereich II sind die Drehungen um zwei der Hauptachsen instabil und nur um eine stabil; im Bereich IV sind die Drehungen um alle drei Hauptachsen stabil — obwohl der Rotor ein dreiaxsiges Trägheitsellipsoid besitzt. Man kann zeigen, daß

$$\theta_4 - \theta_2 = \theta_3 - \theta_1 = B_1 - A_1$$

nur von der Unsymmetrie des Rotors und

$$\theta_4 - \theta_3 = C_2 + \frac{1}{2}(B_{20} - A_{20}) > 0$$

nur von den Massen der Aufhängung bestimmt wird.

Bei der üblichen Ausführung des PRANDTL'schen Kreisels sind die Bereiche II und IV meist sehr schmal. Jedoch müssen sie bei dem technisch interessanteren Kardankreisel, auf den diese Überlegungen sinngemäß übertragen werden können, berücksichtigt werden. Die hier beschriebenen Effekte konnten experimentell ohne Schwierigkeiten bestätigt werden.

Literatur

- 1 E. PFEIFFER, Experimente mit dem Prandtl'schen Kreiselapparat, Z. Math. Physik **60**, S. 337–354 (1912).
- 2 K. MAGNUS, Die Stabilität permanenter Drehungen des astatischen Kardankreisels mit unsymmetrischem Rotor, Acta Mechanica **2**, S. 130–143 (1966).

Anschrift: Prof. Dr. KURT MAGNUS, 7 Stuttgart-0, Hackländerstraße 33

Eine untere Abschätzung des Grundtons einer Membran

Von E. MAKAI*)

Es seien D ein einfach zusammenhängender, von stückweise analytischen Kurven begrenzter Bereich vom Flächeninhalt A und λ der Grundton der auf diesen Bereich aufgespannten Membran. λ wird durch

$$(1) \quad \lambda^2 = \frac{\min \iint_D (\psi_x^2 + \psi_y^2) dx dy}{\iint_D \psi^2 dx dy}$$

*) Mathematisches Forschungsinstitut der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest.

definiert, wo ψ eine auf dem Rande verschwindende, im Inneren des Bereiches analytische Funktion ist. Die Vermutung von LORD RAYLEIGH, nämlich, daß unter allen Membranen der obigen Beschaffenheit und von gegebenem Flächeninhalt A die kreisförmige den tiefsten Grundton besitzt, wurde von FABER und KRAHN [2, 3] fast gleichzeitig bewiesen. Sie führt zur Abschätzungsformel

$$(2) \quad \lambda \geq \frac{j_0 \sqrt{\pi}}{\sqrt{A}},$$

wo $j_0 = 2,40 \dots$ die kleinste positive Wurzel der BESSELSchen Funktion J_0 ist.

In Anlehnung an eine Definition von PÓLYA und SZEGÖ [5, S. 112] nennen wir eine Abschätzung λ' von λ vergleichbar mit λ , wenn der Quotient λ'/λ zwischen endlichen positiven Schranken liegt. In diesem Sinne ist die rechte Seite von (2) nicht mit der linken Seite vergleichbar, da die linke Seite dividiert durch die Rechte beliebig groß sein kann, wie es das Beispiel einer unendlich langen und unendlich schmalen rechteckförmigen Membran zeigt.

Es sei nun ρ der Radius des größten in D eingeschriebenen Kreises. Es ist trivialerweise

$$(3) \quad \lambda \leq \frac{j_0}{\rho}$$

für einen jeden Bereich. Eine entsprechende untere Abschätzung für konvexe Bereiche wurde vor einigen Jahren von J. HERSCH [1] gefunden:

$$(4) \quad \lambda \geq \frac{\pi}{2\rho}.$$

(3) und (4) zeigen, daß die Größe ρ^{-1} mit λ vergleichbar ist, wenn wir uns auf konvexe Bereiche beschränken. Nun läßt sich zeigen, daß diese Aussage wahr bleibt, wenn wir statt konvexer Bereiche nur einfach zusammenhängende Bereiche betrachten: *Der Grundton eines einfach zusammenhängenden Bereiches ist immer größer als $1/(2\rho)$.*

Zum Beweise betrachten wir die Schar C_τ der Niveaulinien der minimierenden Funktion $f(x, y)$ des Variationsproblems (1). τ ist ein Parameter, der folgendermaßen definiert wird. Die Funktion $f(x, y)$ nehme an der Niveaulinie C_τ den Wert $\varphi(\tau)$ an, und τ sei der Flächeninhalt des Gebietes D_τ , in welchem $f(x, y) > \varphi(\tau)$ ausfällt. Es sei noch $L(\tau)$ die Gesamtlänge der Begrenzungskurve (bzw. -kurven) von D_τ . Nun wurde von FABER und KRAHN (l. c.) bewiesen, daß

$$(5) \quad \lambda^2 = \frac{\iint_D (f_x^2 + f_y^2) dx dy}{\iint_D f^2 dx dy} \geq \frac{\int_0^A \varphi'^2(\tau) L^2(\tau) d\tau}{\int_0^A \varphi^2(\tau) d\tau}$$

ist. Eine untere Abschätzung von $L(\tau)$ in der letzten Formel liefert also eine untere Abschätzung von λ^2 1).

Nun läßt sich zeigen, daß die Punktmenge D_τ entweder einfach zusammenhängend ist oder aus mehreren einfach zusammenhängenden Teilen besteht, und für diese Gebiete gilt die Ungleichung $L(\tau) \geq \tau/\rho$. Wenn wir diese Abschätzung von $L(\tau)$ in (5) einführen, haben wir zum Zwecke des Beweises unseres Satzes zu zeigen, daß die Ungleichung

$$(6) \quad 4 \int_0^A \varphi'^2(\tau) \tau^2 d\tau - \int_0^A \varphi^2(\tau) d\tau \geq 0 \quad (\varphi(A) = 0)$$

gültig ist. Es ist aber

$$\int_0^A [4 \varphi'^2(\tau) \tau^2 - \varphi^2(\tau)] d\tau - \int_0^A [2 \varphi'(\tau) \tau + \varphi(\tau)]^2 d\tau = -2 \int_0^A [\tau \varphi^2(\tau)]' d\tau = -2[\tau \varphi^2(\tau)]_0^A = 0,$$

woraus (6) folgt.

Wir bemerken noch, daß die numerische Konstante in unserem Satze kleiner als diejenige im HERSCH'schen Satze ist. Ob man die Konstante $1/2$ durch eine größere ersetzen kann, bleibt dahingestellt. Jedenfalls ist (4) für nichtkonvexe Gebiete nicht richtig, wie man an Hand eines Gegenbeispiels zeigen kann.

Eine ausführliche Mitteilung ist in [4] erschienen.

1) Dieser Weg wurde von FABER und KRAHN eingeschlagen. Die Anwendung der isoperimetrischen Ungleichung $L^2(\tau) \geq 4\pi\tau$ führte zu ihrem Endresultat.