6. Lehrgang für Raumfahrttechnik, München, 9. - 13. Oktober 1967

Drehbewegungen und Lagestabilisierung starrer Satelliten im zentralen Schwerefeld

K. Magnus x)

---

x) Prof. Dr. rer.nat., Institut B für Mechanik
Technische Hochschule München

1. Einleitendes

Die Drehbewegungen von Satelliten auf ihren Umlaufbahnen um die Erde werden durch Gesetzmäßigkeiten beherrscht, die als eine Verallgemeinerung der bekannten Kreiselgesetze aufgefaßt werden können. Bei den ersten künstlichen Satelliten hat man sich noch nicht für die Drehbewegungen interessiert, weil hier die Bahnbewegungen im Vordergrund standen. Mit den Fortschritten der Satellitentechnik, insbesondere aber mit den steigenden Anforderungen, die an die Genauigkeit der räumlichen Orientierung eines Satelliten auf seiner Bahn gestellt werden müssen, hat die Drehbewegung mehr und mehr an Bedeutung gewonnen. Ein Teil der für diese Drehbewegungen geltenden Gesetzmäßigkeiten soll hier betrachtet werden. Dabei wird eine Beschränkung derart vorgenommen werden, daß nur die durch das Gradientenfeld der Erde herrührenden Momente als äußere Momente berücksichtigt werden sollen. Eine solche Einschränkung ist zwar für viele der praktisch verwendeten Satelliten nicht ohne grobe Vereinfachung zulässig, jedoch lassen sich die sehr wichtigen Schwerkrafteffekte am besten an diesem vereinfachten Modell erklären.

Wir wollen die Untersuchungen dadurch abgrenzen, daß nur das Schwerefeld der Erde, ohne Störung durch Sonne und Mond, berücksichtigt wird. Die Erde wird als aus homogenen Kugelschalen aufgebaut betrachtet, so daß die Abplattung vernachlässigt werden kann. Der Satellit selbst soll als starrer Körper vorausgesetzt werden.

Ziel der Betrachtung soll es sein, diejenigen Kombinationen von räumlicher Orientierung, Körperform und Bewegungszustand des Satelliten zu bestimmen, für die Gleichgewicht während des Fluges auf der Umlaufbahn vorhanden ist und für die ein stabiles Verhalten gewährleistet werden kann. Aus den hierfür geltenden Zusammenhängen lassen sich dann wichtige Rückschlüsse auf mögliche Stabilisierungsverfahren gewinnen.

Es sei zunächst an einige allgemeine Ergebnisse aus der Theorie der Drehbewegungen starrer Körper erinnert.

Jedem starren Körper kann ein Trägheitsellipsoid zugeordnet werden, dessen Gestalt für die Drehträgheit des Körpers, also auch für seine Drehbewegungen maßgebend ist.

Die für die Hauptachsen des Trägheitsellipsoides geltenden Trägheitsmomente sind die Hauptträgheitsmomente, die im folgenden mit A, B, C bezeichnet werden sollen. Bei symmetrischen Körpern sind zwei dieser Größen gleich groß, bei unsymmetrischen sind sie verschieden. Die Symmetrie oder Unsymmetrie wird hier nicht auf den Körper, sondern ausschließlich auf sein Trägheitsellipsoid bezogen.

Ein starrer Körper kann permanente Drehungen um seine Hauptachsen ausführen. Diese Bewegungen sind jedoch nur dann stabil, wenn sie entweder um die Achse des größten oder des kleinsten Hauptträgheitsmomentes erfolgen. Drehungen um die Achse des mittleren Hauptträgheitsmomentes sind instabil.

Für die Hauptträgheitsmomente eines starren Körpers gelten die Bedingungen

$$A + B \geqq C, \quad B + C \geqq A, \quad C + A \geqq B. \qquad (1)$$

Das Gleichheitszeichen gilt dabei nur für ein- oder zweidimensionale Massenverteilungen, also für Stäbe oder Scheiben. Für reale Körper gilt stets das Ungleichheitszeichen.

Wenn die Hauptträgheitsmomente A B C den Achsen x y z zugeordnet werden, dann bedeutet $A = 0$, $B = C$ einen in der x-Richtung liegenden Stab (kurz "x-Stab"); $B = 0$, $C = A$ kennzeichnet einen y-Stab; $C = 0$, $A = B$ einen z-Stab. Durch $A + B = C$ wird eine in der xy-Ebene liegende Scheibe charakterisiert (kurz "xy-Scheibe"). Entsprechend geben $B + C = A$ oder $C + A = B$ die yz- oder xz-Scheiben an.

Die Gestalt eines Körpers - genauer die Form seines Trägheitsellipsoides - kann sehr übersichtlich mit Hilfe des "Formdreiecks" dargestellt werden. Jede mögliche Form eines Trägheitsellipsoides wird dabei durch einen Punkt in diesem Dreieck eindeutig gekennzeichnet. Man gelangt zu dieser Darstellung wie folgt:

Die Werte der 3 Hauptträgheitsmomente sollen als Koordinaten eines Punktes P (Bild 1) in einem kartesischen Koordinatensystem aufgefaßt werden. Der Punkt P kennzeichnet Größe und Form des Trägheitsellipsoides. Da aber nur die Form, nicht die absolute Größe eines Körpers von Interesse ist, genügt es, die dreidimensionale Mannigfaltigkeit möglicher P-Punkte auf eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit von Punkten Q in einer Ebene zu reduzieren. Hierzu verwenden wir z.B. die durch die Punkte (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) gelegte Ebene E; sie hat die Gleichung $A + B + C = 1$ und ist in Bild 1 gestrichelt gezeichnet worden. Man kann sich leicht überlegen, daß wegen der Beziehungen (1) die, realen Körpern zugeordneten Punkte Q nur innerhalb des Dreiecks mit den Eckpunkten a b c liegen können. Dieses Dreieck verwenden wir als Formdreieck.

Die Zuordnung der Punkte Q zu den möglichen Formen der Trägheitsellipsoide ist aus Bild 2 zu ersehen. Man erkennt die folgenden Eigenschaften:

Eckpunkte entsprechen Stäben.

Seiten entsprechen Scheiben.

Mittellinien des Formdreiecks bilden den geometrischen Ort für alle symmetrischen Trägheitsellipsoide.

Mittelpunkte der Seiten entsprechen symmetrischen Scheiben.

Der Mittelpunkt des Dreiecks ($A = B = C$) charakterisiert einen Körper mit kugelförmigem Trägheitsellipsoid.

Zu jedem durch die Mittellinie abgegrenzten Teildreieck des Formdreiecks gehört eine bestimmte Größenreihenfolge der Hauptträgheitsmomente. Zum Beispiel gilt für Punkte Q im Innern des schraffierten Teildreiecks die Beziehung $A > B > C$.

Die Seiten des Formdreiecks können mit einer linearen, jeweils von -1 bis +1 laufenden Skala für die Verhältnisse

$$\frac{A-B}{C}, \quad \frac{B-C}{A}, \quad \frac{C-A}{B}$$

versehen werden. Diese Skalen ermöglichen ein schnelles Auffinden des Bildpunktes Q für ein gegebenes Trägheitsellipsoid.

Als einfaches Beispiel für die Anwendung des Formdreiecks soll das anfangs genannte Ergebnis für die Stabilität von Drehungen um Hauptachsen dargestellt werden. Der Körper möge z.B. um die x-Achse drehen. Dann sind seine Drehungen instabil in beiden Fällen $B > A > C$ und $C > A > B$. Alle anderen Größenkombinationen ergeben stabile Bewegungen. Im Formdreieck hat man damit ein Stabilitätsdiagramm nach Bild 3. Für den rechten oberen Teil des Stabilitätsbereiches ist A das kleinste der Hauptträgheitsmomente. Der Körper ist dann bezüglich der x-Achse gestreckt (Grenzfall: x-Stab). Für den linken unteren Teil ist A das größte der Hauptträgheitsmomente. Der Körper ist dann bezüglich der x-Achse abgeplattet (Grenzfall: yz-Scheiben).

Die Ränder der instabilen Bereiche kann man selbst noch als instabil bezeichnen, da geringfügige Massenverschiebungen den Bildpunkt des Körpers in das Innere der instabilen Dreiecke rücken können. Daraus folgt, daß auch die Drehbewegungen eines Körpers mit kugelförmigen Trägheitsellipsoid ($A = B = C$) sowie von Körpern mit $A = B$ oder $A = C$ als instabil betrachtet werden können.

2. Das Moment des Schweregradienten

Satelliten unterscheiden sich vom klassischen Kreisel dadurch, daß sie grundsätzlich nicht "kräftefrei" sind. Selbst wenn man alle anderen Störmomente unberücksichtigt läßt, bleibt in jedem Falle noch ein restliches Drehmoment übrig, das durch den Gradienten des Schwerefeldes hervorgerufen wird. Zum Verständnis dieses sehr wichtigen Momentes betrachte man Bild 4: