

## Untersuchungen über zeitabhängig selbsterregte, symmetrische Kreisel\*

Von K. Magnus

**Übersicht:** Es wird eine allgemeine Lösung für den Bewegungszustand eines durch beliebige Momente selbsterregten symmetrischen Kreisels angegeben. Für drei spezielle Formen der Momente werden die Untersuchungen weiter ausgeführt. Bei konstanten Erregermomenten können Polkegel und mögliche permanente Drehungen angegeben werden. Für Erregung durch Momentenstöße oder durch umlaufende Momentenvektoren lassen sich explizite Lösungen ausrechnen, die unmittelbar auf Lageregelungen und Nutationsdämpfung von Raumfahrzeugen angewendet werden können.

**Summary:** A general solution is given for the rotational motion of a self-excited rigid body, the ellipsoid of inertia of which is an ellipsoid of revolution. The exciting torques may be arbitrary time-depending functions. For three special cases more detailed results are given. Permanent rotations and the cone of rotation ("body-cone") can be calculated for time independent torques. Explicit analytic solutions may be found in the case of excitation by series of torque-shocks or by torque-vectors turning with respect to the body. These results can be applied to the problems of attitude-control and nutation-damping of space vehicles.

**I. Einleitung.** Im Zusammenhang mit Untersuchungen über Drehbewegungen und Lagerregelungen von Raumfahrzeugen hat man sich im Laufe der letzten Zeit vielfach mit Problemen des selbsterregten Kreisels beschäftigt. Man bezeichnet nach *Grammel* einen Kreisel als selbsterregt, wenn seine Bewegungen durch Momente erzeugt oder unterhalten werden, deren Komponenten im körperfesten Bezugssystem bekannt sind. Die körperfesten Komponenten können konstant oder auch zeitabhängig sein, wobei im letzteren Fall noch zwischen achsenfesten und achsenbeweglichen Momenten unterschieden werden muß.

Wir wollen hier beliebig zeitabhängige Momente betrachten, so daß also Momentenvektoren zugelassen werden, die sowohl der Richtung als auch dem Betrage nach veränderlich sind. Beides ist technisch sinnvoll, da man bei Lageregelungen von Satelliten und Raumschiffen schwenkbare Düsen verwendet, deren Reaktionskräfte in gewissen Grenzen regelbar sind. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die durch Rückstoßantriebe bedingte Massenänderung des Gesamtkörpers — wie üblich — vernachlässigt wird. Das dürfte für Raumschiffe zulässig sein, wäre aber problematisch für Untersuchungen von Taumelbewegungen aufsteigender Raketen.

Um Mißverständnissen vorzubeugen muß erwähnt werden, daß der hier verwendete und bereits weitgehend eingebürgerte Begriff der Selbsterregung von dem entsprechenden Begriff abweicht, der in der Theorie nichtlinearer Schwingungen gebräuchlich ist.

Erste Untersuchungen über selbsterregte Kreisel sind *Bödewadt* [1] zu verdanken, der für einen symmetrischen Kreisel mit konstantem Erregermoment exakte Lösungen für den Bewegungszustand, also für die Drehgeschwindigkeiten angegeben hat. In Sonderfällen konnte er auch die Lagewinkel des Körpers explizit angeben. In einer Serie von Veröffentlichungen hat danach *Grammel* [2, 3, 4, 5] sowohl symmetrische als auch unsymmetrische Kreisel mit konstanter, zeitveränderlicher oder auch drehzahlabhängiger Selbsterregung untersucht. Es ist ihm dabei gelungen, die Frage der Stabilität permanenter Drehungen von selbsterregten Kreiseln zu klären. Außerdem konnte er überraschenderweise zeigen, daß ein gewünschter Endzustand nicht immer wirklich erreicht werden kann. Eine ausführliche Zusammenstellung der bisher auf dem Gebiet der selbsterregten Kreisel erzielten Ergebnisse ist in der Monografie von *Leimanis* [6, Kap. II] zu finden.

Trotz der bereits zahlreichen Arbeiten ist das Verhalten selbsterregter Kreisel noch keineswegs so weit untersucht, daß man es als im wesentlichen bekannt ansehen kann. Noch fehlen Lösungen für einige auch technisch interessante Teilprobleme, vor allem bei beliebig zeitabhängiger Selbsterregung, die für aktive Lageregelungen angewendet wird. Vor allem sind bisher nur wenige Fälle explizit soweit durchgerechnet worden, daß das physikalische Verhalten des Kreisels daraus erkannt werden kann. Hier bleibt, vor allem im Ausrechnen des Lageverhaltens aus einer für den Bewegungszustand erhaltenen Lösung, noch viel zu tun. Einige Problemstellungen, die sich hier ergeben, sollen im vorliegenden Beitrag aufgezeigt werden. Dabei werden neben einer für praktische Anwendungen vielleicht recht nützlichen Rechenmethode auch einige explizite Lösungen für Sonderfälle angegeben.

\* Herrn Professor Dr. *Henry Görtler* zum 60. Geburtstag gewidmet.

**2. Reduktion und Lösung der Bewegungsgleichungen.** Wir setzen einen starren Körper mit den Hauptträgheitsmomenten  $A = B$  und  $C$  voraus, dessen Trägheitsellipsoid bezüglich des als Fixpunkt angenommenen Massenmittelpunktes rotationssymmetrisch ist („symmetrischer Kreisel“). Wenn das Hauptachsensystem des Körpers als Bezugssystem verwendet wird, dann nehmen die Euler-Gleichungen die Form

$$\left. \begin{aligned} A \dot{\omega}_1 - (A - C) \omega_2 \omega_3 &= M_1(t), \\ A \dot{\omega}_2 + (A - C) \omega_3 \omega_1 &= M_2(t), \\ C \dot{\omega}_3 &= M_3(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

an. Darin ist  $\omega_i = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  der Drehvektor und  $M_i(t) = (M_1, M_2, M_3)$  der Vektor der selbst-erregenden Momente. Wegen der vorausgesetzten Symmetrie nimmt die dritte dieser Gleichungen eine besonders einfache Gestalt an, so daß  $\omega_3(t)$  unabhängig von den anderen Drehungskomponenten ausgerechnet werden kann. Diese Tatsache läßt sich ausnützen, um die ersten beiden Gleichungen zu linearisieren. Hierzu verwenden wir die bereits von *Grammel* angegebene Transformation

$$d\alpha = \omega_3 dt = \frac{1}{C} \left[ \int M_3(t) dt \right] dt \quad (2)$$

mit der Rechengröße  $\alpha$ , die zwar als Winkel gedeutet werden kann, aber keine, die Lage des Kreisels kennzeichnende holonome Koordinate ist. Mit (2) folgt:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \omega_3 \frac{d\omega}{d\alpha} = \omega_3 \omega', \quad (3)$$

wobei die Ableitung nach  $\alpha$  durch einen Strich angegeben wird. Wir führen nun noch zur Abkürzung

$$\frac{A - C}{A} = a \quad (4)$$

ein, wobei wegen der bekannten Ungleichungen zwischen den Hauptträgheitsmomenten ( $0 \leq C \leq 2A$ ) die Grenzen  $-1 \leq a \leq +1$  gelten. Dabei kann von vornherein der Fall des sogenannten Kugelkreisels ( $a = 0$ ) ausgeschlossen werden, da sich für ihn das Gleichungssystem (1) entkoppelt und elementar gelöst werden kann. Unter Berücksichtigung von (3) erhält man für die ersten beiden Gleichungen von (1):

$$\omega'_1 - a \omega_2 = \frac{M_1}{A \omega_3} = m_1, \quad \omega'_2 + a \omega_1 = \frac{M_2}{A \omega_3} = m_2. \quad (5)$$

Sie können mit  $\omega_1 + i \omega_2 = \omega$  und  $m_1 + i m_2 = m$  komplex zusammengefaßt werden:

$$\omega' + i a \omega = m. \quad (6)$$

Darin kann  $m$  als Funktion der Variablen  $\alpha$  aufgefaßt werden. Zur allgemeinen Lösung denken wir

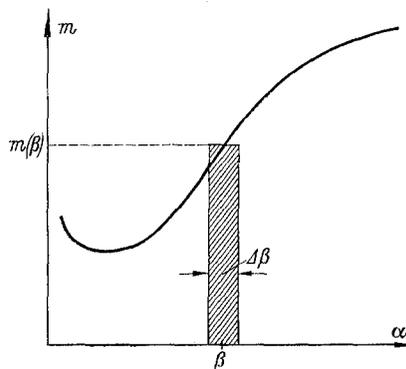


Abb. 1. Die Erregerfunktion  $m(\alpha)$  als Folge von stoßartigen Einzelimpulsen.

uns nun die zeitabhängige Erregung  $m(\alpha)$  in eine Folge von Stößen zerlegt. Erfolgt ein Stoß für  $\alpha = \beta$  während eines „Zeitintervalls“  $\Delta\beta$ , innerhalb dessen  $m(\alpha)$  als konstant gleich  $m(\beta)$  angesehen werden kann (s. Abb. 1), dann ergibt dies nach (6) eine Veränderung von  $\omega$  in der Größe  $\Delta\omega = m(\beta) \Delta\beta$ . Die partikuläre Lösung von (6) für  $\alpha > \beta$  wird dann

$$\omega_\beta = \Delta\omega e^{-i a (\alpha - \beta)}, \quad (\alpha > \beta). \quad (7)$$

Physikalisch bedeutet dies eine durch den Stoß ausgelöste Eigenschwingung (Nutation) des Kreisels.

Wegen der durch die Transformation (2) erreichten Linearität der Bewegungsgleichungen läßt sich nun die Gesamtlösung durch Superposition von Teillösungen der Form (7) gewinnen. Berücksichtigt man dabei noch eine Integrationskonstante  $\omega_0 = \omega_{01} + i\omega_{02}$  zur Anpassung an die für  $\alpha = 0$  geltenden Anfangsbedingungen, dann folgt:

$$\omega = \omega_0 e^{-ia\alpha} + \int_0^\alpha m(\beta) e^{-ia(\alpha-\beta)} d\beta \quad (8)$$

oder in reeller Form

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \omega_{10} \cos a\alpha + \omega_{20} \sin a\alpha + \int_0^\alpha [m_1(\beta) \cos a(\alpha-\beta) + m_2(\beta) \sin a(\alpha-\beta)] d\beta, \\ \omega_2 &= \omega_{20} \cos a\alpha - \omega_{10} \sin a\alpha + \int_0^\alpha [m_2(\beta) \cos a(\alpha-\beta) - m_1(\beta) \sin a(\alpha-\beta)] d\beta. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Zusammen mit

$$\omega_3 = \omega_{30} + \frac{1}{C} \int_0^t M_3(t) dt \quad (10)$$

ergibt dies die allgemeine Lösung für den Bewegungszustand des beliebig zeitabhängig erregten symmetrischen Kreisels. Die in (8) und (9) vorkommenden Integrale entsprechen dem in der Schwingungslehre und Regelungstheorie viel verwendeten *Duhamel-Integral*. Seine Anwendung ist auf lineare Systeme beschränkt, so daß eine Verallgemeinerung auf den Fall des selbsterregten unsymmetrischen Kreisels nicht möglich ist.

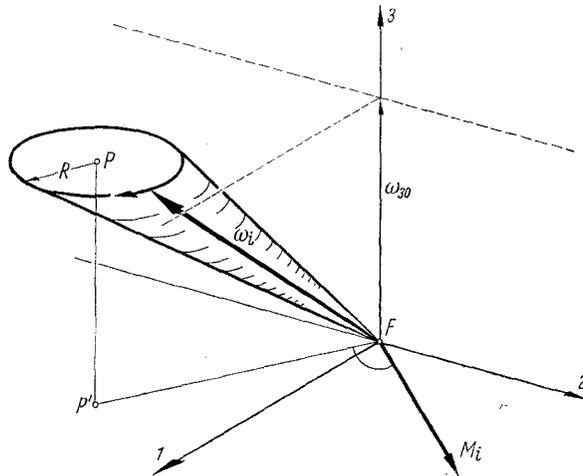


Abb. 2. Der Polkegel im Falle eines konstanten Erregermomentes  $M_i$ .

**3. Anwendungen auf den Fall konstanter Selbsterregungsmomente.** Die Auswertung der allgemeinen Lösung (9) und (10) vereinfacht sich außerordentlich, wenn das erregende Moment senkrecht zur Symmetrieachse des Kreisels steht, also  $M_3 = 0$  ist. Ist außerdem  $\omega_{30} = 0$  (z. B. für drallfreie Satelliten), dann wird die Rechnung völlig elementar, da dann die Gleichungen des Ausgangssystems (1) entkoppelt werden. Hier sollen noch einige Bemerkungen zum Fall  $M_3 = 0$ ,  $\omega_{30} \neq 0$  und  $M_1 = M_{10}$ ,  $M_2 = M_{20}$  gemacht werden. Dieser Fall konstanter Momente ist zwar durch *Bödewadt* [1] bereits prinzipiell gelöst, aber keineswegs soweit diskutiert, daß die physikalischen Eigenschaften daraus erkennbar werden.

Mit  $\omega_3 = \omega_{30}$  folgt aus (2)  $\alpha = \omega_{30} t$ , so daß man ohne Schwierigkeiten wieder zur Zeit  $t$  als der unabhängigen Variablen übergehen kann. Die Lösung (8) geht dann über in:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega_0 e^{-ia\omega_{30}t} + m_0 \omega_{30} \int_0^t e^{-ia\omega_{30}(t-\tau)} d\tau, \\ \omega &= -i \frac{m_0}{a} + \left( \omega_0 + i \frac{m_0}{a} \right) e^{-ia\omega_{30}t}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Dieses Ergebnis besagt, daß der Polkegel der Bewegung ein schiefer Kreiskegel ist (s. Abb. 2). Seine Spitze liegt im Fixpunkt  $F$ ; seine Basis ist ein Kreis in einer Parallelebene zur 1, 2-Ebene im Abstand  $\omega_{30}$  mit dem Mittelpunkt  $P$ :

$$\omega_{1P} = \frac{M_{20}}{(A-C)\omega_{30}}; \quad \omega_{2P} = -\frac{M_{10}}{(A-C)\omega_{30}}; \quad \omega_{3P} = \omega_{30}$$

und dem Radius

$$R = \sqrt{(\omega_{10} - \omega_{1P})^2 + (\omega_{20} - \omega_{2P})^2}.$$

Man erkennt den Zusammenhang zwischen Drehvektor  $\omega_i$  und Momentenvektor  $M_i$  unmittelbar aus Abb. 2: während  $\omega_i$  im Verlauf der Bewegung periodisch mit einer Umlaufzeit

$$T_\omega = \frac{2\pi}{a\omega_{30}} = \frac{2\pi A}{(A-C)\omega_{30}} \quad (12)$$

den Mantel des Polkegels umfährt, liegt der Vektor  $M_i$  fest in der 1,2-Ebene und zwar rechtwinklig zur Verbindungslinie  $P'F$ , wenn  $P'$  der Fußpunkt von  $P$  in der 1, 2-Ebene ist.

Es ist nicht schwer, daraus die verschiedenen Spezialfälle für bestimmte Anfangsbedingungen  $\omega_0$  oder bestimmte  $M_i$  abzuleiten. Wir wollen uns hier mit einem Hinweis auf den von *Grammel* in anderem Zusammenhang untersuchten Sonderfall einer permanenten Drehung begnügen, bei der der Drehvektor sowohl im körperfesten als im raumfesten Bezugssystem konstant bleibt. Mit

$$\omega_0 = -i \frac{m_0}{a} = \frac{M_{20}}{(A-C)\omega_{30}} - i \frac{M_{10}}{(A-C)\omega_{30}} \quad (13)$$

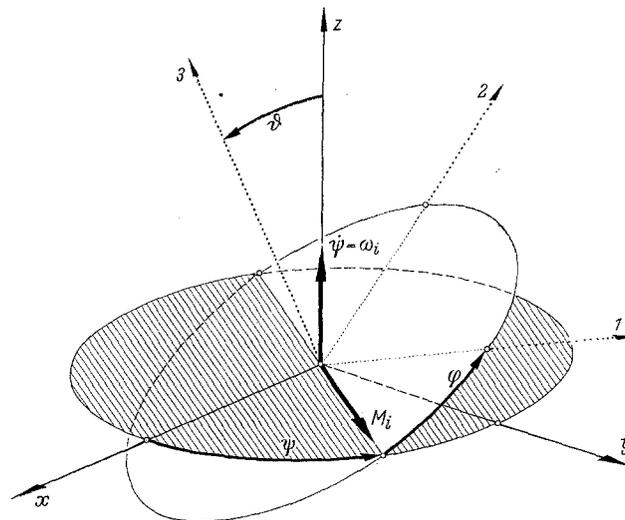


Abb. 3. Euler-Winkel zwischen raumfestem  $x y z$ - und körperfestem  $1 2 3$ -System.

folgt aus (11)  $\omega = \omega_0 = \omega_{10} + i\omega_{20}$ . Der Drehvektor  $\omega_i$  entspricht dann der Strecke  $FP$ , die z. B. als  $z$ -Achse eines raumfesten  $x y z$ -Systems gewählt werden kann. Die gesamte Drehung fällt in diese Richtung und kann durch die Ableitung des Eulerwinkels  $\psi$  dargestellt werden (s. Abb. 3). Es ist dann  $\dot{\psi}_0 = |\dot{\omega}|$ ,  $\dot{\vartheta} = \dot{\varphi} = 0$ , also  $\vartheta = \vartheta_0$ ,  $\varphi = \varphi_0$ . Wegen

$$\omega_1 = \omega_{10} = \dot{\psi}_0 \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0,$$

$$\omega_2 = \omega_{20} = \dot{\psi}_0 \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0,$$

$$\omega_3 = \omega_{30} = \dot{\psi}_0 \cos \vartheta_0$$

findet man für die Winkel:

$$\left. \begin{aligned} \tan \vartheta_0 &= \frac{1}{\omega_{30}} \sqrt{\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2} = \frac{M}{(A-C)\omega_{30}^2}, \\ \tan \varphi_0 &= \frac{\omega_{10}}{\omega_{20}} = -\frac{M_{20}}{M_{10}}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Der Ausdruck für  $\varphi_0$  besagt, daß der Momentenvektor  $M_i$  stets in die Richtung der Knotenachse, also der Schnittgeraden von  $x y$ - und 1, 2-Ebene fällt.

Nachbarbewegungen zu der hier betrachteten permanenten Drehung können als eine Überlagerung von erzwungener Drehung infolge  $M_i$  und Eigenbewegung (Nutation) gedeutet werden. Wie aus der hierfür geltenden Abb. 2 zu entnehmen ist, bleibt diese Bewegung bezüglich der  $\omega$ -Komponenten der permanenten Drehung benachbart, kann also bezüglich  $\omega$  als stabil bezeichnet werden. Die Berechnung der Eulerwinkel für diese Nachbarbewegungen bereitet jedoch erhebliche Schwierigkeiten, so daß die räumlichen Orientierung des Kreisels nicht unmittelbar zu erkennen ist.

**4. Selbsterregung durch Stöße.** Die Integralform (8) bzw. (9) der allgemeinen Lösung eignet sich besonders gut in dem für praktische Anwendungen in der Raumfahrt interessierenden Fall einer Selbsterregung (z. B. zur Lageregelung) durch kurzzeitige Momentenstöße. Dabei soll deren Zeitdauer hier als klein gegenüber der Zeit einer Umdrehung  $2\pi/\omega_3$  angenommen werden. Weiterhin wird wieder  $M_3 = 0$  also  $\omega_3 = \omega_{30}$  vorausgesetzt. Dann läßt sich  $M(t)$  mit Hilfe der Dirac-Funktion  $\delta(t)$  stets in der Form

$$M(t) = \sum_v M_v \delta(t - t_v) \quad (15)$$

schreiben. Darin ist  $t_v$  der Zeitpunkt eines Stoßes,  $M_i$  ein Maß für seine Stärke. Ein entsprechender Ausdruck ergibt sich für das bezogene Moment  $m(t)$ , so daß die Lösung (8) übergeht in:

$$\omega = \omega_0 e^{-ia\omega_{30}t} + \omega_{30} \int_0^t e^{-ia\omega_{30}(t-\tau)} \sum_v m_v \delta(\tau - t_v) d\tau. \quad (16)$$

Jeder einzelne Stoß führt zu einer sprunghaften Veränderung der momentanen Drehgeschwindigkeit um

$$\Delta\omega_v = \omega_{30} \int_0^t m_v \delta(\tau - t_v) d\tau.$$

Wegen

$$\omega_{30} \int_0^t e^{-ia\omega_{30}\tau} m_v \delta(\tau - t_v) d\tau = \omega_{30} m_v e^{-ia\omega_{30}t_v}$$

erhält man dann aus (16) die Lösung

$$\omega = \omega_0 e^{-ia\omega_{30}t} + \omega_{30} \sum_v m_v \mathbf{I}(t - t_v) e^{-ia\omega_{30}(t - t_v)}. \quad (17)$$

Darin ist die Einheitssprungfunktion

$$\mathbf{I}(t - t_v) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < t_v \\ 1 & \text{für } t > t_v \end{cases}$$

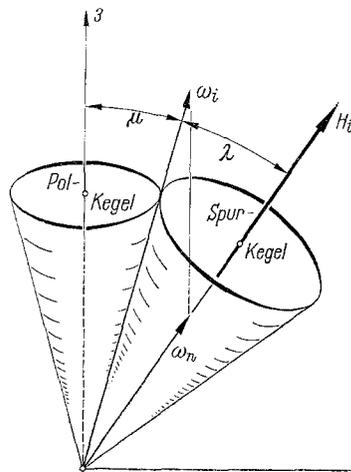


Abb. 4. Polkegel und Spurkegel bei der Nutation eines gestreckten Kreisels ( $A > C$ ).

verwendet worden. Man kann die Lösung (17) deuten als eine Überlagerung von verschiedenen Eigenschwingungen (Nutationen), die durch die Stöße angeregt werden. Zwischen je zwei Stößen umfährt der Drehgeschwindigkeitsvektor einen Teil des Mantels eines Polkegels, der sich wegen  $M = 0$  als gerader Kreiskegel mit der Symmetrieachse des Kreisels als Achse ergibt. Der Öffnungswinkel  $\mu$  des Polkegels folgt aus

$$\tan \mu = \frac{|\omega_0|}{\omega_{30}} = \frac{1}{\omega_{30}} \sqrt{\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2}. \quad (18)$$

Ein voller Umlauf des Drehvektors längs des Kegelmantels erfolgt in der Zeit  $T_\omega$  entsprechend (12). Nach *Poinsot* läßt sich die Nutationsbewegung als ein Abrollen des körperfesten Polkegels auf einem raumfesten Spurkegel darstellen, wie dies in Abb. 4 für den Fall eines gestreckten Kreisels ( $A > C$ ) angedeutet ist. Auch der Spurkegel ist ein gerader Kreiskegel, dessen Achse mit der raumfesten Richtung des Drallvektors  $H_i$  zusammenfällt. Sein Öffnungswinkel  $\lambda$  kann aus

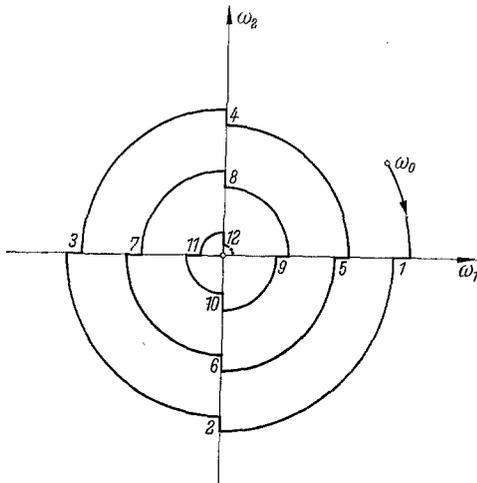
$$\tan(\lambda + \mu) = \frac{\sqrt{H_1^2 + H_2^2}}{H_3} = \frac{A|\omega_0|}{C\omega_{30}} \tag{19}$$

zu

$$\tan \lambda = \frac{(A - C)|\omega_0| \omega_{30}}{C\omega_{30}^2 - A\omega_1^2} \tag{20}$$

berechnet werden. Daraus lassen sich mit (17) die Polkurven und auch die meist interessierende Bewegung der Symmetrieachse (3-Achse) des Körpers ermitteln. An einem Beispiel soll das gezeigt werden.

Es sei die Aufgabe gestellt, die Nutationsbewegung eines starren Raumschiffes zu dämpfen. Als Momentengeber mögen achsenfest eingebaute Rückstoßvorrichtungen zur Verfügung stehen, die kurzzeitige Momentenstöße um die zur Symmetrieachse senkrechten Achsen 1 und 2 in jeweils beiden Richtungen ausüben können. Die Nutationen werden verringert, wenn die Winkel  $\lambda$  und  $\mu$  von Abb. 4 kleiner werden. Dies läßt sich erreichen, wenn die Momentenstöße so gerichtet sind, daß sie die Drallachse der Symmetrieachse (3-Achse) näherbringen. Das geschieht am wirksamsten, wenn die Momentenstöße in den Augenblicken gegeben werden, in denen die 1- oder 2-Achse in die von den Vektoren  $\omega_i$ ,  $H_i$  und der 3-Achse aufgespannte Ebene fallen. Die Stoßzeitpunkte und die Vorzeichen ergeben sich dabei aus dem folgenden Schema:



	$\omega_1$	$\dot{\omega}_1$	$\omega_2$	$\dot{\omega}_2$
$+ M_1$			0	$\geq 0$
$- M_1$			0	$\leq 0$
$+ M_2$	0	$< 0$		
$- M_2$	0	$> 0$		

Abb. 5. Polkurve eines gestreckten Kreisels bei Nutationsdämpfung durch 4 Impulse in der Zeit  $T_\omega$ .

Durch Auswerten der Signale von körperfest eingebauten Drehgeschwindigkeitsmessern (z. B. Wendekreiseln) lassen sich diese Zeitpunkte eindeutig bestimmen. In Abb. 5 ist eine Polkurve konstruiert, die sich dabei in der 1, 2-Ebene ergibt. Man erkennt, daß sich die Öffnung des Polkegels stufenweise bis auf einen nicht mehr tilgbaren, von der Stärke der Momentenstöße abhängigen Rest verringert. Man könnte diesen Rest durch eine Fein-Dämpfung mit entsprechend reduzierten Momentenstößen noch verkleinern. Die Zeit zwischen zwei Momentenstößen ist gleich  $T_\omega/4$  mit dem Wert von (12). Sie kann bei Körpern mit fast kugelförmigem Trägheitsellipsoid ein Vielfaches der Umdrehungszeit  $T_u = 2\pi/\omega_{30}$  werden. Die Polkurve von Abb. 5 gilt für gestreckte Kreisel, wobei der Wert von  $a$  keinen Einfluß auf die Form der Kurve, wohl aber auf die Zeit hat, in der sie durchlaufen wird. Für abgeplattete Körper ergibt sich eine analoge Polkurve mit anderem Umlauf-sinn, die durch Spiegelung des Bildes von Abb. 5 an einer der Achsen erhalten wird.

Die meist interessierende Bewegung der Symmetrieachse des Körpers während des Dämpfungsvorganges läßt sich unter Berücksichtigung von (20) ohne Schwierigkeiten konstruieren. Für nicht zu große Winkel  $\lambda$  und  $\mu$  setzt sich die Bahnkurve aus Kreisbogenstücken zusammen, deren Mittelpunkt jeweils durch die sich sprunghaft verändernde Lage der Drallachse bestimmt ist. In den

Abb. 6 und 7 sind zwei derartige Kurven gezeichnet, die zu verschiedenen Werten von  $a$  gehören. Man erkennt, daß die Dämpfung umso besser ist, je mehr das Trägheitsellipsoid des Körpers von der Kugelform ( $a = 0$ ) abweicht. Dies gilt sowohl für gestreckte als auch für abgeplattete Körper und ist durch die Tatsache bedingt, daß das Durchlaufen der Polkurve bei fast kugelförmigem Trägheitsellipsoid nach (12) sehr viel langsamer erfolgt als für stabförmige Körper ( $a \approx +1$ , schlanke

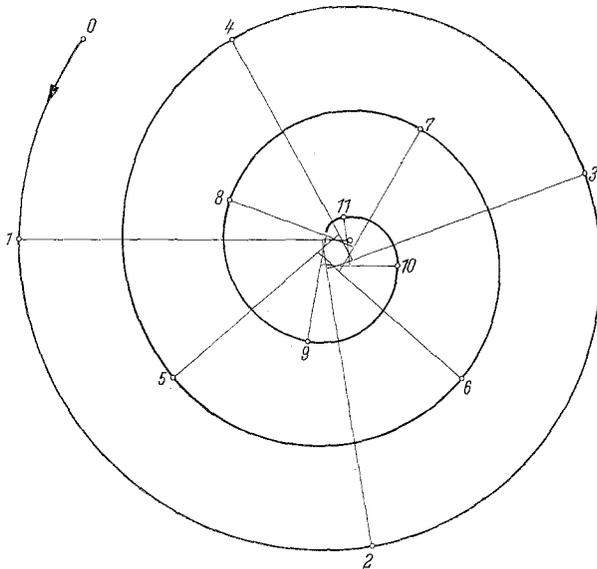


Abb. 6. Bahnkurve eines Punktes der Symmetrieachse für die Polkurve von Abb. 5,  $a = 0,9$ .

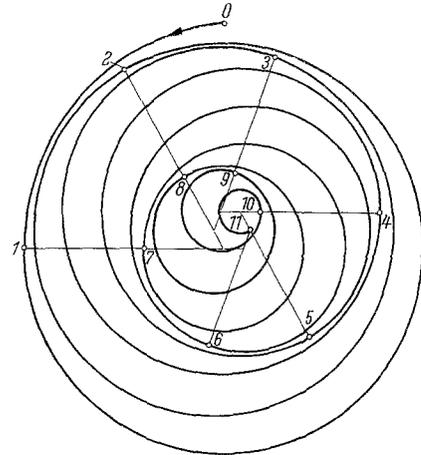


Abb. 7. Bahnkurve eines Punktes der Symmetrieachse für die Polkurve von Abb. 5,  $a = 0,3$ .

Raketen) oder Scheiben ( $a \approx -1$ , fliegende Untertassen). Die körperfest eingebauten Momentengeber kommen deshalb nur in größeren Zeitabständen in die für Dämpfungswirkungen geeignete Positionen.

Rein theoretisch ließe sich die Nutationsbewegung auch durch einen einzigen Momentenstoß völlig beseitigen. Der Momentenstoß müßte hierzu die Größe

$$\int M dt = \sqrt{H_1^2 + H_2^2} = A \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \tag{21}$$

haben. Erfolgt dieser Stoß in der richtigen Richtung, dann verlagert er die Drallachse um den Winkel  $\lambda + \mu$  (Abb. 4), so daß sie in die momentane Lage der Symmetrieachse fällt. Danach aber erfolgt nur noch eine Drehung um diese Hauptachse ohne Nutationen.

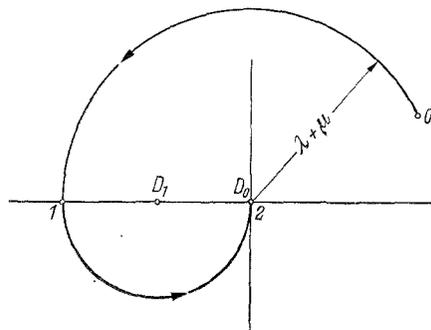


Abb. 8. Bahnkurve eines Punktes der Symmetrieachse bei optimaler Nutationsdämpfung durch zwei Momentenstöße.

Will man die bei dem geschilderten Vorgehen nicht vermeidbare Verlagerung der Drallachse verhindern, dann ist es stets möglich, durch zwei geeignete Momentenstöße von der halben Größe nach (21) eine vollständige Beruhigung ohne Auswanderung der Drallachse zu erreichen. Das Verfahren ist aus Abb. 8 ersichtlich: der anfängliche Öffnungswinkel  $\lambda + \mu$  des Nutationskegels wird durch den im Augenblick 1 erfolgenden ersten Momentenstoß gerade auf die Hälfte verringert. Wenn

nun der zweite Stoß zum Zeitpunkt 2 erfolgt, an dem sich die Symmetrieachse in der Ausgangsposition  $D_0$  der Drallachse befindet, dann kann die Nutation an dieser Stelle gestoppt werden. Die Drallachse springt bei diesem Vorgang zunächst von  $D_0$  nach  $D_1$  und bei dem zweiten Stoß wieder zurück nach  $D_0$ . Man erkennt, daß der zeitliche Abstand  $\Delta t$  der beiden Momentenstöße gleich der halben Zeit für einen Nutationsumlauf sein muß. Mit der aus Abb. 4 zu entnehmenden Kreisfrequenz  $\omega_n$  der Nutation

$$\omega_n = \omega_{30} \frac{\tan \mu}{\sin(\lambda + \mu)} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{C^2}{A^2} \omega_{30}^2} \approx \frac{C}{A} \omega_{30}$$

erhält man

$$\Delta t = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{C^2}{A^2} \omega_{30}^2}} \approx \frac{\pi A}{\omega_{30} C}. \quad (22)$$

Da in dieser Zeit im allgemeinen kein Viertelbogen der Polkurve oder ein Vielfaches davon durchlaufen wird, werden fest eingebaute Momentengeber den zu einer optimalen Dämpfung notwendigen zweiten Momentenstoß nicht geben können. Man wird deshalb Momentengeber verwenden müssen, die Stöße um beliebige Querachsen auszuüben in der Lage sind. Bei Raumschiffen mit festem Verhältnis  $A/C$  könnte man auch durch zwei um den Winkel  $\pi A/C$  fest eingebaute Momentengeber gute Ergebnisse erreichen.

Es sei noch bemerkt, daß in derselben Weise wie die Nutationsdämpfung auch die in der Raumfahrt stark interessierende Frage der Schwenkung der Symmetrieachse in eine vorgegebene Richtung, z. B. Ausrichtung auf einen Stern, behandelt werden kann. Auch hier lassen sich durch sinnvolles Ausnutzen der Nutationsbewegungen Lösungen finden, die geeigneter erscheinen als der Weg über erzwungene Präzessionen der Drallachse.

**5. Polkurven für eine spezielle Klasse von Selbsterregterfunktionen.** Die allgemeinen Lösungen (8) und (9) können noch für eine weitere Klasse von Erregerfunktionen  $m$  explizit ausgerechnet werden. Mit

$$m(\alpha) = \sum_p m_p e^{ib_p \alpha} \quad (23)$$

findet man aus (8) die komplexe Drehgeschwindigkeit

$$\omega = \omega_0 e^{-ia\alpha} - i \sum_p \frac{m_p}{a + b_p} e^{ib_p \alpha}, \quad (b_p \neq -a). \quad (24)$$

Wenn hierin  $M_3 = 0$  also  $\omega_3 = \omega_{30}$  angenommen wird, dann bedeutet jedes Glied von (23) einen in der Äquatorebene (senkrecht zur Symmetrieachse) des Körpers mit der Kreisfrequenz  $b_p \omega_{30}$  umlaufenden Momentenvektor, dessen Größe und Phasenlage durch die ebenfalls komplexe Größe  $m_p$  gegeben ist. Durch Überlagerung derartiger Erregerglieder können sehr allgemeine Erregerfunktionen approximiert werden. Für die Drehgeschwindigkeit (24) erhält man dann ebenfalls eine Überlagerung aller erzwungenen Anteile mit den durch den Anfangswert  $\omega_0$  bedingten Eigenbewegungen. Die Polkurven als geometrischer Ort aller Bildpunkte von  $\omega$  in der komplexen Ebene folgen aus (24) als Epizykeln, die sehr verschiedenes Aussehen haben können und in beliebiger Vielfalt leicht gezeichnet werden können.

Bei der Lösung (24) muß der Fall  $b_p = -a$  ausgeschlossen werden. Ihm entspricht eine Erregung, deren Vektor

$$m(\alpha) = m_0 e^{-ia\alpha}$$

mit derselben Kreisfrequenz umläuft, wie der Vektor für den Anteil der Eigenbewegung. Man kann die Lösung (8) für diesen speziellen Fall leicht zu

$$\omega = (\omega_0 + m_0 \alpha) e^{-ia\alpha} \quad (25)$$

ausrechnen. Bemerkenswerterweise ergibt sich jetzt eine spiralige Polkurve, die sich je nach den Werten von  $\omega_0$  und  $m_0$  zunächst zusammenziehen kann, die aber für  $\alpha \rightarrow \infty$  in jedem Falle vom Nullpunkt fortwandert. Der Körper selbst wird sich dabei schließlich um eine Querachse überschlagen. Physikalisch ist dieses Verhalten verständlich, weil hier der Momentenvektor stets in einer festen Position zu der umlaufenden, durch die Vektoren  $\omega_i$  und  $H_i$  und die Symmetrieachse 3 (s. Abb. 4) aufgespannten Ebene bleibt. Das Moment wirkt also in einem mit der Nutationsgeschwindigkeit  $a \omega_3$  umlaufenden Bezugssystem immer in derselben Richtung, so daß sich die Wirkungen bis zum völligen Überschlagen akkumulieren können.

Von einem gewissen Interesse sind noch die Sonderfälle  $b_p = +a$  und  $b_p = -1$ . Für beide Fälle ist die Lösung in (24) enthalten, jedoch lassen sich die Eigenschaften der Bewegungen besser erkennen, wenn man noch umformt. So erhält man für  $b_p = +a$ :

$$\left. \begin{aligned} m &= m_0 e^{ia\alpha}, \\ \omega &= \left( \omega_0 - i \frac{m_0}{2a} \right) \cos a\alpha - i \left( \omega_0 + i \frac{m_0}{2a} \right) \sin a\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Auch das sind Überlagerungen von Kreisbewegungen, jedoch arten die Polkurven in den Fällen

$$\omega_0 = \pm i \frac{m_0}{2a}$$

in Gerade durch den Nullpunkt aus.

Im Sonderfall  $b_p = -1$  läuft der Momentenvektor mit der Geschwindigkeit  $\omega_3$  der Eigendrehung des Körpers im Gegensinne dieser Eigendrehung relativ zum Körper um. Der Momentenvektor würde also raumfest bleiben, wenn sich der Körper nur um die Symmetrieachse drehte. Bei allgemeineren Taumelbewegungen bleibt er „fast raumfest“. Als Lösung erhält man jetzt

$$\omega = \omega_0 e^{-ia\alpha} + i \frac{m_0 A}{C} e^{-i\alpha}. \quad (27)$$

Für  $a \approx 1$ , also z. B. stabförmige Raumschiffe, können dabei Schwebungen entstehen, bei denen sich die Polkurven pulsierend aufblähen und wieder abschwellen.

#### Literatur

- [1] U. T. Bödewadt, Math. Z. 55 (1952) S. 310.
- [2] R. Grammel, Wiss. Z. TH Dresden 2 (1952/53) S. 361.
- [3] R. Grammel, Ing.-Arch. 21 (1953) S. 149.
- [4] R. Grammel, Ing.-Arch. 22 (1954) S. 73.
- [5] R. Grammel, Ing.-Arch. 29 (1960) S. 153.
- [6] E. Leimanis, The general problem of the motion of coupled rigid bodies about a fixed point, Berlin/Heidelberg/New York 1965.

(Eingegangen am 28. November 1968)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. Kurt Magnus, 8035 Gauting, Germeringer Str. 13 1/3.