

- [13] J. E. TAYLOR, *Optimum Design of a Vibrating Bar with Specified Minimum Cross Section*, AIAA J. 6, 1379 (1968).
- [14] C. Y. SHEU, *Elastic Minimum Weight Design for Specified Fundamental Frequency*, Internat. J. Solids Struct. 4, 953 (1968).
- [15] C. Y. SHEU and W. PRAGER, *Optimal Plastic Design of Circular and Annular Sandwich Plates with Piecewise Constant Cross Section*, J. Mech. Phys. Solids 17, 11 (1969).
- [16] D. C. DRUCKER and R. T. SHIELD, *Design for Minimum Weight*, Proc. 9th Internat. Congr. appl. Mech., Brussels 1956, Vol. 5, 212-222.
- [17] R. L. BARNETT, *Minimum-weight Design of Beams for Deflection*, Proc. ASCE 87, EM1, 75 (1961).
- [18] E. J. HAUG, JR. and P. G. KIRMSER, *Minimum Weight Design with Inequality Constraints on Stress and Deflection*, J. appl. Mech. 34, 999 (1967); N. C. HUANG and H. T. TANG, *Minimum weight Design of Elastic Sandwich Beams with Deflection Constraints*, J. Optimiz. Theory Applicat. 4, 277 (1969).
- [19] E. J. HAUG, JR., T. D. STREETER and R. S. NEWELL, *Optimal Design of Elastic Structural Elements*, Report SY-RI-69, Systems Analysis Directorate, U.S. Army Weapons Command, Rock Island, Ill., 1969.

Zusammenfassung

Es wird ein Prinzip der stationären gegenseitigen potentiellen Energie aufgestellt für zwei Belastungssysteme eines elastischen Balkens veränderlicher Biegesteifigkeit. Aus diesem Prinzip wird eine hinreichende Bedingung für stationäres Gewicht eines Sandwichbalkens abgeleitet, wenn die von einer Belastung an einem bestimmten Querschnitt erzeugte Durchbiegung vorgeschrieben ist. Für statisch bestimmte Balken wird gezeigt, dass diese Bedingung ein globales Minimum des Gewichts sicherstellt. Anwendungsbeispiele und Erweiterungen werden besprochen.

(Received: November 12, 1969)

Der Einfluß verschiedener Kräftearten auf die Stabilität linearer Systeme

Von Kurt Magnus, Institut B für Mechanik der Technischen Hochschule München, Deutschland

Herrn Professor Dr. Hans Ziegler zum sechzigsten Geburtstag gewidmet

1. Problemstellung

Zur Bestimmung der Stabilität von Bewegungen linearer Systeme finden sich im Schrifttum überaus viele Verfahren. Es sei hier an die algebraischen Kriterien von Hermite, Routh, Hurwitz, Cremer und Bilharz sowie an die völlig äquivalenten geometrischen Kriterien von Nyquist, Leonhard, Michailow und Neumark erinnert. Diese Kriterien lassen bei geeigneter Art der Anwendung den Einfluss einzelner Systemparameter erkennen und haben sich deshalb recht gut bewährt. Jedoch wird eine physikalische Interpretation der Ergebnisse um so schwieriger, je höher die Ordnung der zu untersuchenden Systeme ist.

Aus diesen Gründen haben sich im Laufe der letzten Jahre zahlreiche Autoren mit anderen Typen von Stabilitätskriterien beschäftigt, bei denen anschauliche Deutungen auch für Systeme beliebig hoher Ordnung möglich sind. Zumindest lässt sich damit der Einfluss verschiedener Kräftearten auf das Stabilitätsverhalten qualitativ erkennen, wenn auch die Ausrechnung konkreter Fälle nicht weniger Rechenarbeit erfordert als für die anfangs erwähnten, bekannten Kriterien. Allgemeine qualitative Aussagen können aber für einen Konstrukteur gerade im Stadium des Entwurfs von Geräten nützlich sein, und ein Analytiker wird oft dank solcher Aussagen das Verhalten komplizierter Systeme besser übersehen können.

Allgemeine Sätze der angedeuteten Art sind bereits Lagrange, Dirichlet und vor allem Thomson und Tait [1] zu verdanken. Ein klassisches Ergebnis der letztgenannten Autoren besagt, dass ein instabiles mechanisches System nur dann durch Hinzufügen von Kreiselkräften stabilisiert werden kann, wenn eine gerade Anzahl von instabilen Freiheitsgraden vorhanden ist. Dieser vielzitierte Satz gilt, ebenso wie die Sätze von Lagrange und Dirichlet, für konservative Systeme, die in der technischen Praxis höchstens als idealisierte Grenzfälle von Interesse sind. Der praktische Wert der genannten Sätze ist daher nicht sehr gross. Erst nachdem nichtkonservative Kräfte mitberücksichtigt wurden, sind Ergebnisse erzielt worden, die für die Praxis überaus nützlich sind.

Schon frühzeitig wurde der Einfluss dissipativer, energievermindernder Kräfte untersucht, die den Geschwindigkeiten proportional sind. Später wurde auch «negative Dissipation», also Anfachung, zugelassen. Noch später wurden nichtkonservative Lagekräfte berücksichtigt; ihr Einfluss auf zahlreiche technische Probleme wurde erst im Laufe der letzten zwei Jahrzehnte im vollen Umfang erkannt und untersucht. Seither ist auf diesem Gebiet auf verschiedenen Wegen und unter verschiedenartigen Gesichtspunkten viel gearbeitet und veröffentlicht worden. Es erscheint daher zweckmässig, die zahlreichen bisher bekanntgewordenen Ergebnisse zu sichten und systematisch zu ordnen, um auf diese Weise ihre Nutzung in der technischen Praxis zu erleichtern. Das soll im vorliegenden Beitrag versucht werden.

Von dem überaus umfangreichen Schrifttum sollen hier zunächst nur drei grundlegende Arbeiten erwähnt werden, die zu einer Weiterentwicklung in der von Thomson und Tait gewiesenen Richtung geführt haben. Chetaev [2] ist eine Präzisierung der Problemstellung und der Beweis eines von Thomson und Tait vermuteten Satzes zu verdanken; Ziegler [3] hat an einer Vielzahl von Beispielen auf die möglichen Verhaltensweisen linearer dynamischer Systeme hingewiesen; schliesslich hat Merkin [4] in einer beachtenswerten Monografie eine zusammenfassende Darstellung für Kreisel-systeme gegeben. Einige speziellere Arbeiten sollen an geeigneter Stelle später zitiert werden.

2. Die Bewegungsgleichungen diskreter linearer Systeme

Bei Anwendung des Lagrangeschen Formalismus lassen sich die Bewegungsgleichungen dynamischer Systeme stets als Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung gewinnen, die bei Beschränkung auf kleine Abweichungen von einer Gleichgewichtslage oder von einer Grundlösung die Form

$$a_{\alpha\beta} \ddot{x}_\beta + b_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta + c_{\alpha\beta} x_\beta = 0, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, m) \quad (1)$$

annehmen. Über doppelt vorkommende Indices soll dabei in üblicher Weise summiert werden. Wir wollen voraussetzen, dass eventuell vorhandene zyklische Koordinaten bereits eliminiert sind. Ist n die Zahl der Freiheitsgrade des Systems und z die Anzahl der zyklischen Koordinaten, dann wird das Verhalten des Systems jetzt nur noch durch die $m = n - z$ nichtzyklischen Lagekoordinaten x_β beschrieben [5]. Infolge der Elimination der zyklischen Koordinaten enthält die Trägheitsmatrix $a_{\alpha\beta}$ auch solche Anteile, die die Vergrößerung der Trägheit durch eingebaute Schwungräder kennzeichnen. Diese Anteile verändern jedoch zwei wichtige Eigenschaften der Trägheitsmatrix nicht: $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ ist stets symmetrisch, und die quadratische Form

$$T = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \dot{x}_\alpha \dot{x}_\beta \tag{2}$$

ist stets positiv definit; sie bildet den von den nichtzyklischen Geschwindigkeiten gebildeten Anteil der kinetischen Energie.

Die Matrix $b_{\alpha\beta}$ von (1) kann dämpfende, anfachende, gyroskopische und solche Glieder enthalten, die durch Änderungen von Massen oder Trägheitsmomenten bedingt sind. Die letzteren Anteile sind z. B. in der Raketentechnik als Strahldämpfung bekannt. Schliesslich kann die Matrix $c_{\alpha\beta}$ Anteile enthalten, die durch statische oder kinetische Fesselungen, z. B. durch Zentrifugalkräfte, oder auch durch Änderung von Dämpfungsbeiwerten bedingt sind. Es ist zweckmässig, die Matrizen $b_{\alpha\beta}$ und $c_{\alpha\beta}$ als Summen von je einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix darzustellen:

$$b_{\alpha\beta} = d_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} d_{\alpha\beta} = d_{\beta\alpha}, \\ g_{\alpha\beta} = -g_{\beta\alpha}, \end{cases} \quad c_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta} + e_{\alpha\beta} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} f_{\alpha\beta} = f_{\beta\alpha}, \\ e_{\alpha\beta} = -e_{\beta\alpha}. \end{cases} \tag{3}$$

Damit geht das System der Bewegungsgleichungen über in:

$$a_{\alpha\beta} \ddot{x}_\beta + d_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta + g_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta + f_{\alpha\beta} x_\beta + e_{\alpha\beta} x_\beta = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, m). \tag{4}$$

Alle darin vorkommenden Glieder können als verallgemeinerte Kräfte interpretiert werden:

$A_\alpha = -a_{\alpha\beta} \ddot{x}_\beta$ sind Trägheitskräfte, die von der kinetischen Energie (2) abgeleitet werden können.

$D_\alpha = -d_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta$ sind geschwindigkeitsproportionale, nichtkonservative Kräfte, durch die der Energieinhalt eines Systems verkleinert (Dämpfung) oder vergrössert (Anfachung) werden kann. Sie können von der Rayleigh-Funktion

$$D = \frac{1}{2} d_{\alpha\beta} \dot{x}_\alpha \dot{x}_\beta \tag{5}$$

abgeleitet werden. Ist D eine positiv definite quadratische Form, dann wird dem System Energie entzogen; in diesem Fall wird D auch Dissipationsfunktion genannt.

$G_\alpha = -g_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta$ sind gyroskopische Kräfte. Sie sind konservativ, da sie bei beliebigen Bewegungen eines Systems keine Arbeit leisten.

$F_\alpha = -f_{\alpha\beta} x_\beta$ sind konservative Lagekräfte (Fessel-Kräfte), die aus einem Potential

$$V = \frac{1}{2} f_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \quad (6)$$

abgeleitet werden können. Ist V in der Umgebung einer Gleichgewichtslage $x_\alpha = 0$ eine positiv definite quadratische Form, dann ist die Gleichgewichtslage statisch stabil (Satz von Dirichlet [6]).

$E_\alpha = -e_{\alpha\beta} x_\beta$ sind nichtkonservative Lagekräfte, durch die – wie bei den D_α – der Energieinhalt verändert werden kann. Man hat die E_α auch als zirkulatorische Kräfte bezeichnet. In Ziffer 3 sollen zwei Beispiele für Systeme mit derartigen Kräften beschrieben werden.

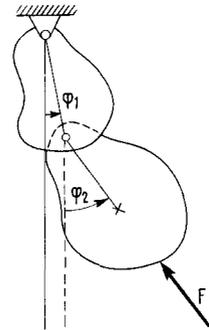
Bevor der Einfluss der genannten Kräftearten auf das Stabilitätsverhalten untersucht wird, muss zunächst etwas über den zu verwendenden Stabilitätsbegriff gesagt werden. Da hier lineare Systeme betrachtet werden, ist asymptotische Stabilität stets vorhanden, wenn die Realteile $Re(\lambda)$ aller Wurzeln λ der charakteristischen Gleichung negativ sind. Es ist jedoch sinnvoll und üblich, auch dann noch von Stabilität zu sprechen, wenn einzelne, nicht mehrfach auftretende Wurzeln verschwindende Realteile haben. Diesen Wurzeln entsprechen ungedämpfte Schwingungen, bei denen die Auslenkungen bestimmte, durch die Anfangsbedingungen gegebene Schranken nicht überschreiten können, so dass «Stabilität im Sinne von Ljapunov» vorhanden ist. Wenn die Bewegungsgleichungen allerdings durch Linearisierung eines ursprünglich nichtlinearen Ausgangssystems erhalten wurden, dann muss im Falle $Re(\lambda) = 0$ entsprechend der Ljapunovschen Theorie genauer untersucht werden.

Die Begriffe der «asymptotischen Stabilität» sowie der «Stabilität nach Ljapunov» sind von dem Verhalten für $t \rightarrow \infty$ abgeleitet. Das kann bei manchen praktischen Anwendungen zu Schwierigkeiten führen, da vielfach nur die Bewegungen eines Systems in einem endlichen Zeitintervall interessieren. Daher kommt es durchaus vor, dass in der Technik z. B. Kreiselgeräte verwendet werden, die nach der erwähnten Terminologie als instabil bezeichnet werden müssen. Ein anschauliches Beispiel ist auch der Spielkreisel: bei hinreichend starkem Antrieb tanzt er und pendelt sich sogar in die vertikale, aufrechte Stellung ein; für $t \rightarrow \infty$ fällt er mit Sicherheit um; man wird ihn jedoch von einem praktischen Standpunkt aus als stabil bezeichnen können, wenn das Aufrecht-Tanzen die Zeit zwischen zwei Peitschenschlägen überdauert. Diese auch technisch wichtige «Stabilität in einem endlichen Zeitintervall» ist in der vorliegenden Arbeit nicht gemeint, wenn von Stabilität gesprochen wird.

3. Beispiele für Systeme mit nichtkonservativen Lagekräften

Lagekräfte, die nicht von einem Potential abgeleitet werden können, kommen in der Technik häufig vor. Zwei einfache, aber typische Beispiele sollen hier erklärt werden.

a) Ein Doppelpendel mit Belastung durch eine Kraft in körperfester Richtung. Es sei das in Figur 1 skizzierte ebene Doppelpendel gegeben, dessen unteres Pendel



Figur 1
Doppelpendel mit Zusatzkraft F in körperfester Richtung.

ausser durch Eigengewicht zusätzlich durch eine Kraft F belastet sein möge, die eine körperfeste Richtung haben soll. Man stellt leicht fest, dass die kleinen Schwingungen des Systems um die Gleichgewichtslage $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ durch ein Gleichungssystem von der Form

$$a_{11} \ddot{\varphi}_1 + a_{12} \ddot{\varphi}_2 + c_{11} \varphi_1 + e (\varphi_2 - \varphi_1) = 0, \quad a_{21} \ddot{\varphi}_1 + a_{22} \ddot{\varphi}_2 + c_{22} \varphi_2 = 0 \quad (7)$$

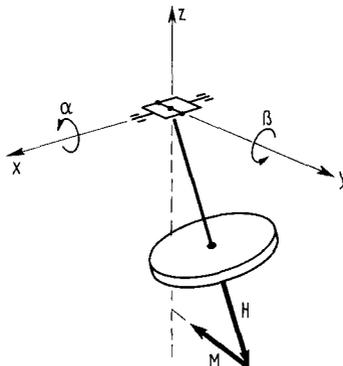
beschrieben werden, wobei der Beiwert e der Zusatzkraft F proportional ist. Ausserdem gilt $a_{12} = a_{21}$, so dass die Trägheitsmatrix $a_{\alpha\beta}$ – wie gefordert – symmetrisch ist. Die Matrix der Lagekraftbeiwerte lässt sich nun wie folgt umformen:

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} c_{11} - e & e \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2(c_{11} - e) & e \\ e & 2c_{22} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & e \\ -e & 0 \end{bmatrix}, \\ &= f_{\alpha\beta} + e_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Die körperfeste Zusatzkraft F kann dabei als eine nichtkonservative Lagekraft bezeichnet werden. Sie verändert allerdings auch die Matrix $f_{\alpha\beta}$ der konservativen Fesselkräfte. Das hier beschriebene System ist ein einfaches Beispiel für «mitgehende Lasten», die in der Elastomechanik, z. B. bei Knickstäben [7], ausführlich untersucht worden sind.

b) Ein Kreiselpendel mit Überwachungseinrichtung. In künstlichen Horizonten werden Kreiselpendel verwendet, die mit einer speziellen Überwachungseinrichtung versehen sind. Die Überwachung sorgt dafür, dass die Richtung des Dralls H nach einer Störung wieder in die Richtung des Lotes gebracht wird. Das geschieht durch Ausüben eines Momentes M , dessen Vektor zur xy -Ebene parallel ist und stets zur z -Achse (Lot) hinzeigt (Fig. 2). Für kleine Auslenkungen α und β der Drallachse aus der z -Richtung erhält man damit die Bewegungsgleichungen (siehe z. B. [8])

$$\left. \begin{aligned} A \ddot{\alpha} + H \dot{\beta} + f_1 \alpha + e \beta &= 0, \\ B \ddot{\beta} - H \dot{\alpha} + f_2 \beta - e \alpha &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$



Figur 2
 Kreiselpendel mit Überwachungsmoment M .

Der Beiwert e ist dem Überwachungsmoment proportional. Das Gleichungssystem (9) besitzt die symmetrischen Matrizen

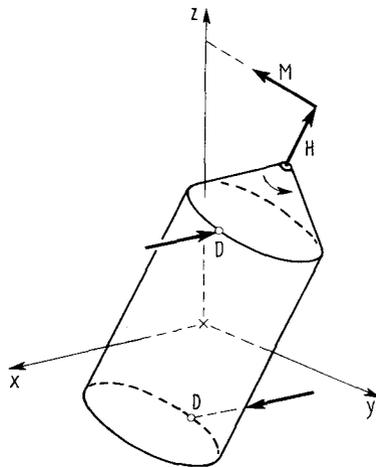
$$a_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad f_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix},$$

sowie die schiefsymmetrischen Matrizen

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & H \\ -H & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad e_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & e \\ -e & 0 \end{bmatrix}.$$

Bei Berücksichtigung geschwindigkeitsproportionaler Dämpfungsmomente um x - und y -Achsen würde in (9) zusätzlich auch noch eine symmetrische Dämpfungsmatrix $d_{\alpha\beta}$ auftreten.

Völlig analog zur Überwachung eines Kreiselpendels arbeiten Lageregelungssysteme bei drallstabilisierten Satelliten oder Raumschiffen (siehe Fig. 3). Nur werden in diesem Fall die Regelmomente M meist nicht stetig, sondern intermittierend



Figur 3
 Zur Lageregelung eines drallstabilisierten Satelliten.

ausgeübt, weil die zur Erzeugung der Rückstosskräfte F dienenden Düsen D wegen der Drehung des Körpers nur zu bestimmten Zeiten in die zur Ausübung des Regelmomentes geeignete Position kommen.

4. Klassifikation der Systeme nach der Art der vorkommenden Kräfte

In den Bewegungsgleichungen (4) treten die fünf in Ziffer 2 näher definierten Kräftearten A_α , D_α , G_α , F_α und E_α auf. Um eine gewisse Ordnung in die Vielzahl der Systeme mit verschiedenen Kräftekombinationen zu bringen, soll eine Klassifikation der folgenden Tabelle entsprechend vorgenommen werden.

Tabelle für Systemtypen mit Übersicht über allgemeine Sätze und deren Verknüpfungen

		$g \equiv 0$		$g \neq 0$	
		$d \equiv 0$	$d \neq 0$	$d \equiv 0$	$d \neq 0$
$f \equiv 0$	$e \equiv 0$	A	AD	AG 1	ADG 2
	$e \neq 0$	AE	ADE	AGE	ADGE 3
$f \neq 0$	$e \equiv 0$	AF	ADF	AGF 7	ADGF 11 12 13 14 15
		6		8 9 10	
	$e \neq 0$	AFE	ADFE	AGFE	ADGFE 18
		16	17		19 20

Es wird dabei angenommen, dass stets Trägheitskräfte A_α vorhanden sind. Je nach Vorhandensein oder Nicht-Vorhandensein der anderen Kräftearten werden nun die verschiedenen Systeme eindeutig durch ein Kästchen der Tabelle sowie durch eine unmittelbar verständliche Kurzbezeichnung charakterisiert. Auf Indices kann bei dieser Kennzeichnung und in der Tabelle verzichtet werden.

Man erkennt leicht, dass in der Tabelle z.B. die folgenden Zuordnungen gelten:

ungefesselte Systeme:	1. und 2. Zeile,
gefesselte Systeme:	3. und 4. Zeile,
Kreiselsysteme:	3. und 4. Spalte,
gedämpfte oder angefachte Systeme:	2. und 4. Spalte,
konservative Systeme	

(für die sowohl $d \equiv 0$ als auch $e \equiv 0$ gilt): Kästchen A, AG, AF, AGF.

In der Fachliteratur lassen sich nun ausserordentlich viele Sätze finden, die das Stabilitätsverhalten von Systemen betreffen. Einige dieser, von verschiedenen Autoren angegebenen Sätze sind äquivalent; andere überdecken sich ganz oder zum Teil, so dass z.B. ein Satz als Spezialfall eines anderen erscheint. Eine Sichtung der dem Verfasser bekannt gewordenen 36 Ergebnisse dieser Art ergab schliesslich 20 Sätze, die sich zwar zum Teil überschneiden, von denen jedoch jeder eine eigene Aussage erhält. Diese Sätze wurden von 1 bis 20 nummeriert und sind mit genauem Wortlaut unter Ziffer 5 zusammengestellt. Aus der Tabelle lässt sich entnehmen, für welches System sie gelten. Einige der angeführten Sätze sind allgemeiner Natur, so dass sie für mehrere Systemarten, also in mehreren Kästchen der Tabelle gelten. Das lässt sich aus den Bezugsstrichen ersehen. Die Nummer des Satzes ist dann jeweils bei dem allgemeinsten System angeführt, für das er gilt.

Bei den Beweisen für die einzelnen Sätze wird stets Gebrauch von den Eigenschaften der quadratischen Formen T (2), D (5) und V (6) sowie der schiefsymmetrischen Matrizen $g_{\alpha\beta}$ und $e_{\alpha\beta}$ gemacht. Diese Beweise sollen hier nicht wiederholt werden; sie können bei den jeweils angegebenen Literaturstellen eingesehen werden. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass sich diese Zitate i. a. nicht auf die Erstveröffentlichungen der Entdecker beziehen, sondern auf meist leichter zugängliche oder modernere zusammenfassende Darstellungen.

5. Verzeichnis der allgemeinen Sätze zum Stabilitätsverhalten

Im folgenden wird der Wortlaut der genannten 20 Sätze in einer solchen Form gebracht, dass ihre Anwendung ohne Zurückgreifen auf die Originalveröffentlichungen möglich ist. Wenn auch eine gewisse Einheitlichkeit in den Formulierungen angestrebt wurde, so sind doch die Aussagen der zitierten Autoren nicht verändert worden. In einigen Fällen werden zur Ergänzung zusätzliche Erklärungen gegeben. Ausserdem wird zu jedem der im Verzeichnis aufgeführten Systeme ein konkretes Beispiel erwähnt, um das Verständnis zu erleichtern.

AG-Systeme (Beispiel: Ein drehender starrer Körper im Zustand der Schwerelosigkeit oder ein antriebsloses Raumschiff, sofern der Gradient der Massenanziehung vernachlässigt werden kann).

- 1) Die Gleichgewichtslage eines konservativen Systems, auf das nur gyroskopische Kräfte G_α einwirken, ist dann und nur dann stabil, wenn $\det(g_{\alpha\beta}) \neq 0$ gilt [4; S. 126].

Aus diesem Satz folgt sofort, dass ein den Bedingungen von Satz 1 genügendes System stets instabil ist, wenn die Zahl m der nichtzyklischen Lagekoordinaten ungerade ist. Für eine schiefsymmetrische Matrix ungerader Ordnung verschwindet nämlich stets die Determinante.

ADG-Systeme (Beispiel: ein drehender Körper in schwerelosen Zustand, auf den geschwindigkeitsproportionale Dämpfungskräfte wirken).

- 2) Die Gleichgewichtslage eines Systems, auf das nur gyroskopische und dissipative Kräfte G_α und D_α einwirken, ist stets stabil, wenn die Rayleigh-Funktion D (5) positiv definit ist [4; S. 163].

Ein positiv definites D bedeutet, dass die Bewegungen in *allen* Freiheitsgraden des Systems gedämpft sind. Die Kräfte D_α wirken dann dissipativ und nicht anfachend.

ADGE-Systeme (Beispiel: ein drehendes Raumschiff im schwerelosen Zustand mit Lageregelung durch E -Kräfte; mit Hilfe derartiger Kräfte kann die Drallachse in eine gewünschte Richtung eingestellt werden).

- 3) Die Bewegungen eines Systems mit $F_\alpha \equiv 0$ können bei geradem m , d.h. bei gerader Anzahl nichtzyklischer Lagekoordinaten asymptotisch stabil gemacht werden, wenn ausser dissipativen Kräften D_α zugleich auch gyroskopische Kräfte G_α hinzugefügt werden [4; S. 214].
- 4) Die Bewegungen eines Systems mit $F_\alpha \equiv 0$ können bei ungeraden Werten von m nicht asymptotisch stabil gemacht werden, unabhängig von den vorhandenen dissipativen, anfachenden oder gyroskopischen Kräften D_α und G_β [4; S. 214].
- 5) Die instabile Gleichgewichtslage eines nichtkonservativen Systems mit $F_\alpha \equiv 0$ kann nur stabilisiert werden, wenn sowohl dissipative als auch gyroskopische Kräfte D_α und G_α hinzugefügt werden [9; S. 33].

AF-Systeme (Beispiel: ein ungedämpfter Feder-Masse-Schwinger).

- 6) Die charakteristische Gleichung eines konservativen Systems mit $G_\alpha \equiv 0$ und nicht definiter potentieller Energie V (6) besitzt mindestens eine Wurzel mit positivem Realteil.

Die charakteristische Gleichung eines AF-Systems lautet $\det(a_{\alpha\beta}\lambda^2 + f_{\alpha\beta}) = 0$. Da man stets eine Koordinatentransformation so vornehmen kann, dass die Matrizen $a_{\alpha\beta}$ und $f_{\alpha\beta}$ zugleich in Diagonalform gebracht werden [10; Kap. 10], muss bei nicht definiter potentieller Energie mindestens eines der Diagonalelemente der transformierten Fesselungsmatrix $f_{\alpha\beta}$ negativ sein. Daraus folgt sofort die Existenz einer Wurzel der charakteristischen Gleichung mit $Re(\lambda) > 0$.

AGF-Systeme (Beispiel: ein Kreiselpendel, eine Einschienenbahn ohne Dämpfungseinrichtung oder ein Spielkreisel ohne Reibung).

- 7) Die charakteristische Gleichung eines konservativen Systems mit stabiler Gleichgewichtslage besitzt nur Wurzeln mit verschwindendem Realteil [11; S. 49].

Eine stabile Gleichgewichtslage ist durch eine positiv definite potentielle Energie V gekennzeichnet. Der angegebene Satz, der bereits auf Lagrange zurückgeht, besagt, dass konservative Systeme stets ungedämpft schwingen, wenn ein stabiles Gleichgewicht gestört wird.

- 8) Wenn für die Gleichgewichtslage eines konservativen Systems eine ungerade Anzahl instabiler Freiheitsgrade vorhanden ist, dann kann sie durch Hinzufügen von gyroskopischen Kräften G_α nicht stabilisiert werden [4; S. 176].

Die Anzahl der instabilen Freiheitsgrade ist gleich der Zahl der Wurzeln λ mit $Re(\lambda) > 0$.

- 9) Die instabile Gleichgewichtslage eines konservativen Systems kann durch gyroskopische Kräfte G_α stabilisiert werden, wenn 1) $\det(g_{\alpha\beta}) \neq 0$, 2) die

potentielle Energie V definit ist, 3) die charakteristische Gleichung des Ausgangssystems keine Mehrfachwurzeln besitzt und 4) der Drall H hinreichend gross ist [4; S. 179].

Die Sätze 8 und 9 enthalten ein klassisches Ergebnis, das Thomson und Tait [1] zu verdanken ist. Die praktische Bedeutung dieser Erkenntnis ist jedoch nicht sehr gross, da sie sich nur auf konservative Systeme bezieht. Bei realen Systemen wird aber stets Energie vernichtet; dadurch kann sich das Stabilitätsverhalten grundlegend ändern, wie der spätere Satz 11 zeigen wird.

- 10) Ein konservatives System mit stabiler Gleichgewichtslage kann durch Hinzufügen von gyroskopischen Kräften G_α nicht instabil gemacht werden [11; S. 49]. *ADGF-Systeme* (Beispiel: Kreiselpendel mit Dämpfung).
- 11) Wenn die Rayleigh-Funktion D positiv definit ist und die Fesselungsmatrix $f_{\alpha\beta}$ keine verschwindenden Eigenwerte hat, dann ist die Stabilität unabhängig von Dämpfungs- und Kreisel-Kräften D_α und G_α [12; S. 47].

Dieser Satz ist ausserordentlich wichtig. Er wurde bereits von Thomson und Tait [1] vermutet, später von Chetaev [2] formuliert und bewiesen. Er sagt letzten Endes aus, dass die Stabilität eines vollständigen ADGF-Systems mit der Bewegungsgleichung

$$a_{\alpha\beta} \ddot{x}_\beta + d_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta + g_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta + f_{\alpha\beta} x_\beta = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, m) \quad (10)$$

der Stabilität des AF-Systems mit der verkürzten Bewegungsgleichung

$$a_{\alpha\beta} \ddot{x}_\beta + f_{\alpha\beta} x_\beta = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, m) \quad (11)$$

entspricht. Letztlich wird damit die Stabilität eines ADGF-Systems ausschliesslich durch die Eigenwerte der Fesselungsmatrix $f_{\alpha\beta}$ bestimmt, wobei diese Eigenwerte Lösungen der Gleichung $\det(f_{\alpha\beta} - \lambda \delta_{\alpha\beta}) = 0$ sind. Durch Satz 11 wird gezeigt, dass ein stabiles System durch Hinzufügen von Dämpfungskräften D_α instabil gemacht werden kann. Tatsächlich lässt sich nachweisen, dass der aufrechte Lagrange-Kreisel (und auch der Spielkreisel) bei Berücksichtigung der dämpfenden Einflüsse und bei Anwendung des zuvor erklärten Stabilitätsbegriffes instabil ist. Dem widerspricht auch nicht die Tatsache, dass Dämpfungseinflüsse beim Spielkreisel zum Aufrichten und damit zu einem Abklingen von Präzessionsbewegungen führen. Für $t \rightarrow \infty$ wird jedenfalls der Drall so verringert, dass der Spielkreisel umfällt.

- 12) Wenn die Rayleigh-Funktion D positiv definit ist, dann ist die Zahl der Wurzeln der charakteristischen Gleichung mit positivem Realteil gleich der Zahl der negativen Eigenwerte der Fesselungsmatrix $f_{\alpha\beta}$ [12; S. 47].
- 13) Statisch stabile Gleichgewichtslagen bleiben stabil, auch wenn beliebige Kreisel- und Dämpfungs-Kräfte G_α und D_α mit positiv-semidefiniter Rayleigh-Funktion D hinzugefügt werden [4; S. 202].

Bei positiv-semidefiniter Rayleigh-Funktion D kann das System in einem oder mehreren Freiheitsgraden ungedämpfte Schwingungen ausführen, während alle anderen Bewegungen gedämpft verlaufen.

- 14) Bei positiv semidefiniter Rayleigh-Funktion D sind die Bewegungen eines Systems bei beliebigen Kreiselkräften G_α instabil, sofern alle Eigenwerte der Fesselungsmatrix $f_{\alpha\beta}$ negativ sind [12; S. 48].

- 15) Eine statisch stabile Gleichgewichtslage wird bei Hinzufügen von D_α -Kräften mit positiv definiter Rayleigh-Funktion D und beliebigen Kreiselkräften G_α asymptotisch stabil [4; S. 203].

AFE-Systeme (Beispiel: ein Doppelpendel, auf dessen unteres Pendel eine konstante Kraft in körperfester, d.h. mitdrehender Richtung einwirkt).

- 16) Die Gleichgewichtslage eines konservativen Systems mit $G_\alpha \equiv 0$ kann durch Hinzufügen nichtkonservativer Lagekräfte E_α stabilisiert oder instabil gemacht werden [3; S. 108].

ADFE-Systeme (Beispiel: Doppelpendel wie beim AFE-System, aber mit Dämpfung oder Anfachung).

- 17) Wenn die Gleichgewichtslage eines Systems mit $G_\alpha \equiv 0$ statisch instabil ist, dann lässt sie sich durch Hinzufügen nichtkonservativer Lagekräfte E_α nicht stabilisieren [9; S. 33].

ADGFE-Systeme (Beispiel: ein Kreiselpendel mit Überwachungseinrichtung nach Sperry sowie mit Dämpfung, eine Einschienenbahn mit Stabilisierungseinrichtung oder ein drehender Satellit mit Lageregelung auf einer erdnahen Bahn).

- 18) Die Gleichgewichtslagen eines Systems mit negativ definiter potentieller Energie V können bei einer ungeraden Anzahl nichtzyklischer Lagekoordinaten durch Hinzufügen beliebiger Kräfte D_α , G_α oder E_α nicht stabilisiert werden [4; S. 215].

- 19) Die Gleichgewichtslagen eines Systems mit negativ definiter potentieller Energie V können bei gerader Anzahl nichtzyklischer Lagekoordinaten und bei Vorhandensein von D_α -Kräften mit positiv definiter Rayleigh-Funktion D nur stabilisiert werden, wenn sowohl Kreiselkräfte G_α als auch nichtkonservative Lagekräfte E_α hinzugefügt werden [4; S. 215].

- 20) Die Bewegungen eines Systems sind bei beliebigen Kräften G_α , F_α und E_α instabil, wenn die Spur der Matrix $d_{\alpha\beta}$ negativ ist [4; S. 213].

Die Bedingung $Sp(d_{\alpha\beta}) < 0$ besagt physikalisch, dass die anfachenden Anteile der Rayleigh-Funktion gegenüber den dämpfenden dominieren. Das kann wie folgt eingesehen werden: wenn man die Matrix $d_{\alpha\beta}$ durch eine Koordinatentransformation in Diagonalform überführt, dann deuten positive Elemente auf gedämpfte, negative auf angefachte Schwingungsformen hin. Wenn die Summe der positiven Elemente grösser als die Summe der Beträge der negativen ist, dann überwiegt die Dämpfung. Da jedoch die Summe der Diagonalelemente einer Matrix, also ihre Spur, invariant gegenüber Koordinatentransformationen ist, kann das Überwiegen oder Nicht-Überwiegen der Dämpfungsanteile bereits aus der ursprünglichen Matrix $d_{\alpha\beta}$ durch Bilden der Spur erkannt werden.

Literaturverzeichnis

- [1] W. THOMSON and P. G. TAIT, *Treatise on Natural Philosophy*, Part I (Cambridge 1921).
 [2] N. G. CHETAEV, *Die Stabilität von Bewegungen*, russ. (Moskau 1955).
 [3] H. ZIEGLER, *Linear Elastic Stability*, Z. angew. Math. Phys. 4, 89 (1953).
 [4] D. R. MERKIN, *Kreiselsysteme*, russ. (Moskau 1956).
 [5] H. GOLDSTEIN, *Klassische Mechanik*, Kap. 7-2 (Frankfurt a.M. 1963).
 [6] G. HAMEL, *Theoretische Mechanik*, Abs. 125 (Berlin 1949).
 [7] H. ZIEGLER, *Some Developments in the Theory of Stability*, Canadian Congress of Applied Mechanics, Quebec 3, 233 (1967).
 [8] M. SCHULER und K. MAGNUS, *Luftfahrtforschung* 16, 318 (1939).

- [9] I. I. METELIZYN, Doklady Akademii Nauk SSSR 86, russ, 31 (1952).
 [10] F. R. GANTMACHER, *The Theory of Matrices*, Vol. I (Chelsea 1959).
 [11] N. FORBAT, *Analytische Mechanik der Schwingungen* (Berlin 1966).
 [12] E. E. ZAJAC, J. Astronaut. Sci. 17, 46 (1964).

Summary

Several general theorems concerning the stability of dynamical systems have been published during the last decades. Starting with a classification of such systems an attempt is made to define the range of validity for these known theorems. Emphasis is laid upon the effect of different forces, as for example velocity-forces (gyroscopic as well as damping or exciting ones) and of positional forces (potential as well as circulatory nonconservative ones). The text of 20 theorems is given.

(Eingegangen: 6. Dezember 1969)

Error Estimates for Certain Approximate Solutions of Problems in the Linear Theory of Elasticity

By Warner T. Koiter, Lab. voor Mechanica, Technische Hogeschool, Delft, The Netherlands

Dedicated to Professor Dr. Hans Ziegler on the occasion of his 60th birthday

1. Introduction

Let \underline{v} denote an arbitrary kinematically admissible displacement field of an elastic system. The elastic energy stored in the system in isothermal deformations is in the linear theory a positive homogeneous quadratic functional $P_2[\underline{v}]$ of the displacement field \underline{v} . If the body is properly supported, such that rigid-body displacements are excluded, the functional $P_2[\underline{v}]$ is positive definite. The external loads in the linear theory of equilibrium have a potential energy which is a linear functional $P_1[\underline{v}]$ of the displacement field.

Let \underline{u} denote the displacement field in the equilibrium configuration under the action of the external loads. This solution may be identified with the minimizing displacement field of the variational problem

$$P_2[\underline{v}] + P_1[\underline{v}] = \text{Min.} \quad (1)$$

Introducing the obvious and well-known notation

$$P_2[\underline{v} + \underline{w}] = P_2[\underline{v}] + P_{11}[\underline{v}, \underline{w}] + P_2[\underline{w}], \quad (2)$$

the variational equation, associated with the minimum problem, and satisfied by the solution \underline{u} reads

$$P_{11}[\underline{u}, \underline{v}] + P_1[\underline{v}] = 0, \quad (3)$$

holding for all kinematically admissible displacement fields \underline{v} . This variational