NEUERE ERGEBNISSE EINER ALLGEMEINEN THEORIE
VON KREISELSYSTEMEN

K. Magnus

Übersicht

Folgerungen, die sich aus neueren Ergebnissen der allgemeinen Theorie von Kreiselsystemen für die Technik der Kreiselgeräte ergeben, werden diskutiert. Diese Ergebnisse betreffen:

1. Allgemeine Bedingungen, die aus der Forderung nach Stabilität für die Struktur von Kreiselsystemen folgen. Dabei ist vor allem der Einfluß der Dämpfungskräfte und der nichtkonservativen Lagekräfte zu berücksichtigen.

2. Näherungen für Systeme mit schnellen Kreiseln erlauben neben einer Vereinfachung der Bewegungsgleichungen auch Aussagen über das Frequenzverhalten der Systeme. Die Frequenzgruppen können als Nutationen, Präzessionen und Pendelschwingungen klassifiziert werden.

1. Einleitendes

In der Frühzeit der Kreiseltechnik war ein von Thomson und Tait [1] im Jahre 1879 veröffentlichter Satz richtungweisend und überaus nützlich. Er besagte, daß ein instabiles mechanisches System nur dann mit Hilfe von Kreiseln stabilisiert werden kann, wenn eine gerade Anzahl instabiler Freiheitsgrade vorhanden ist. Die unmittelbare Anwendung dieses Satzes auf die Kreiselstabilisierung von Schiffen (Schlick'scher Schiffskreisel) und bei der Einschienenbahn ist im Schrifttum ausführlich dargestellt. Der genannte Satz ist jedoch auch für Kreiselgeräte von Bedeutung, auch wenn deren Aufgabe nicht primär im Stabilisieren besteht. So wird z. B. die Anzeige eines Lotkreisels instabil, wenn die Fesselung gemischt, d. h. in einer Achse statisch stabil, in der anderen Achse statisch instabil ist. Dagegen läßt sich mit statisch instabilen Fesselungen um beide Achsen durchaus ein dynamisch stabiler Lotkreisel bauen.

Der Vorteil des angegebenen Satzes liegt vor allem in seiner großen Allgemeinheit. Bereits im Entwurfsstadium eines Kreiselsystems können mit seiner Hilfe aussichtslose Konstruktionen erkannt und ausgeschieden werden, ohne daß zuvor genauere Berechnungen durchgeführt werden müssen. Wenn sich auch derartig quantitative Rechnungen bei der Festlegung der Parameter nicht umgehen lassen, so wird man sie verständlicherweise bei solchen Systemen vermeiden wollen, die strukturinstabil sind. Diese aber lassen sich zum Teil nach Thomson und Tait erkennen.

Der Satz von Thomson und Tait ist inzwischen als erweiterungsbedürftig erkannt worden, da sein Gültigkeitsbereich ziemlich eng ist. Dennoch blieb er Vorläufer und Vorbild für weitere allgemeine Sätze, durch deren Anwendung man die meist sehr mühsame numerische Analyse erheblich erleichtern oder einschränken wollte. Man hoffte dabei einen zielstrebigen Weg zur Synthese zu finden, also die Entwurfs- und Entwicklungsarbeiten abzukürzen und auf eine wissenschaftlich gesicherte Grundlage zu stellen.

Bei der Suche nach allgemeinen Sätzen geht man auf die verschiedenen Kräftearten zurück, die auf ein System einwirken und die auch in den Bewegungsgleichungen zum Ausdruck kommen. Wenn man kleine Bewegungen eines Systems in der Nachbarschaft einer Gleichgewichtslage betrachtet, dann läßt sich das System der Bewegungsgleichungen in die Form

$$a_{\alpha\beta}\,\ddot{x}_\beta + (d_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta})\,\dot{x}_\beta + (f_{\alpha\beta} + e_{\alpha\beta})\,x_\beta = 0 \qquad (1)$$

$$(\alpha\,,\ \beta = 1, 2, \dots, n)$$

bringen. Über Indices, die in einem Ausdruck doppelt vorkommen, ist dabei zu summieren. In (1) ist x_β ein aus Zustandsvariablen des Systems gebildeter Lagevektor mit n Komponenten. Die Massenmatrix $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ ist stets symmetrisch. Die von $\dot{x}_\beta$ und x_β abhängigen Glieder können in Anteile mit symmetrischen und solche mit schiefsymmetrischen Matrizen zerlegt werden. Die Dämpfungsmatrix $d_{\alpha\beta}$ sowie die Matrix $f_{\alpha\beta}$ der konservativen Fesselkräfte sind symmetrisch, während die Matrizen $g_{\alpha\beta} = - g_{\beta\alpha}$ und $e_{\alpha\beta} = - e_{\beta\alpha}$ schiefsymmetrisch sind. Die Glieder in (1) können als (verallgemeinerte) Kräfte gedeutet werden und zwar sind:

$-a_{\alpha\beta}\,\ddot{x}_\beta$ Beschleunigungskräfte,

$-d_{\alpha\beta}\,\dot{x}_\beta$ Dämpfungskräfte,

$-g_{\alpha\beta}\,\dot{x}_\beta$ Kreiselkräfte,

$-f_{\alpha\beta}\,x_\beta$ konservative Lagekräfte (Fesselkräfte),

$-e_{\alpha\beta}\,x_\beta$ nichtkonservative Lagekräfte.

Eine kritische Sichtung der Sätze, die die Auswirkungen dieser Kräftearten auf das Verhalten eines mechanischen Systems betreffen, wurde vor kurzem in einer ausführlicheren Veröffentlichung [2] bzw. [7] gegeben. Daran anknüpfend sollen im folgenden einige Ergebnisse über den Einfluß von Dämpfungskräften und von nichtkonservativen Lagekräften betrachtet werden. Dabei zeigt es sich, daß auch die für die kreiseltechnische Praxis sehr interessierende Frage der Gültigkeit der weit verbreiteten technischen Näherungsgleichungen für Kreiselsysteme umfassender als zuvor beantwortet werden kann.

2. Der Stabilitätssatz von Thomson und Tait, seine Präzisierung und Erweiterungen

Dieser Satz sagt aus:

> "Wenn für die Gleichgewichtslage eines konservativen Systems eine ungerade Anzahl instabiler Freiheitsgrade vorhanden ist, dann kann sie durch Hinzufügen von gyroskopischen Kräften nicht stabilisiert werden!"

Zu fragen ist nun: 1) Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit ein instabiles System durch Einbau von Kreiseln stabilisiert werden kann und 2) was passiert bei nichtkonservativen Systemen? Die Frage 1) wird durch einen von Merkin [3] angegebenen Satz beantwortet:

> "Die instabile Gleichgewichtslage eines konservativen Systems kann durch gyroskopische Kräfte stabilisiert werden, wenn
>
> a) $\det(g_{\alpha\beta}) \neq 0$,
>
> b) $V = \frac{1}{2} f_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ definit ist, (2)
>
> c) keine mehrfachen Eigenwerte auftreten,
>
> d) der Drall hinreichend groß ist."

Wichtiger noch ist Frage 2), da bei allen realen Systemen Energieverluste durch Dämpfung auftreten. Hierzu wurde von Četaev [4] bewiesen, daß wenn: a) $e_{\alpha\beta} = 0$, b) die Rayleigh-Funktion $D = \frac{1}{2} d_{\alpha\beta} \dot{x}_\alpha \dot{x}_\beta$ positiv definit und c) $f_{\alpha\beta}$ keine verschwindenden Eigenwerte hat, die Stabilität eines Systems völlig unabhängig von Dämpfungs- und Kreiselkräften ist.

Dieses Ergebnis ist für die Kreiseltechnik entmutigend, da es zeigt, daß eine den Bedingungen (2) genügende Kreiselstabilisierung durch das Hinzutreten von Dämpfungskräften unwirksam wird. Die Stabilität hängt damit letztlich nur noch von den Eigenwerten der Fesselungsmatrix $f_{\alpha\beta}$, also von der statischen Stabilität ab. Allerdings muß hier einschränkend betont werden, daß bei diesen Aussagen der Begriff der asymptotischen Stabilität verwendet wird, der vom Verhalten eines Systems für sehr große Zeiten, also für $t \to \infty$ abgeleitet ist. Das kann bei Kreiselgeräten mit zeitlich begrenzter Arbeitsdauer zu unnötig harten Anforderungen führen. Man kann in der Praxis durchaus mit Systemen arbeiten, die vom streng analytischen Standpunkt aus als instabil bezeichnet werden müssen. In derartigen Fällen interessiert dann vor allem die Zeitkonstante der instabilen Teilbewegungen.

Bei der Anwendung der genannten Sätze auf Probleme der Satellitentechnik zeigte es sich, daß die Voraussetzung einer positiv definiten Rayleigh-Funktion D, wie sie von Četaev gefordert wird, nicht immer gegeben ist, daß D vielmehr auch semidefinit sein kann. Praktisch bedeutet dies, daß im System Freiheitsgrade vorhanden sind, in denen keinerlei Dämpfung wirkt. Durch die Kopplung der Bewegungen in den verschiedenen Freiheitsgraden kann in solchen Fällen dennoch eine insgesamt stabile Bewegung vorhanden sein. Zum Beispiel besaß einer der ersten Kreiselhorizonte der Firma Anschütz lediglich eine Düsendämpfung für eine der beiden Achsen. Das reichte zur Beruhigung des Gesamtsystems aus.

Man kann allgemein zeigen, daß die Bewegungen eines Systems mit positiv semidefiniter Rayleigh-Funktion dann gedämpft werden, wenn die Dämpfung zu allen Freiheitsgraden durchdringt ("durchdringende" Dämpfung, s. P. Müller [5]).

Das läßt sich mathematisch exakt formulieren und führt zu der Bedingung, daß das System

$$a_{\alpha\beta}\,\ddot{x}_\beta + g_{\alpha\beta}\,\dot{x}_\beta + f_{\alpha\beta}\,x_\beta = d_{\alpha\beta}\,u_\beta \qquad (3)$$

mit dem Steuervektor u_β im Sinne der modernen Regeltheorie vollständig steuerbar ist. So wie die vollständige Steuerbarkeit das Durchdringen der Steuerimpulse zu allen Freiheitsgraden verlangt, so muß die Dämpfung die Möglichkeit haben, auf alle Bewegungsformen einzuwirken.

Als Folgerung dieser Überlegungen kann festgestellt werden, daß ein System mit $e_{\alpha\beta} = 0$ und durchdringender Dämpfung nur dann asymptotisch stabil sein kann, wenn die Fesselungsmatrix $f_{\alpha\beta}$ positiv definit, also die Ruhelage statisch stabil ist. In allen anderen Fällen ist eine Stabilisierung auch durch noch so starke Kreiselkräfte nicht möglich. Diese Schwierigkeit läßt sich überwinden, wenn zusätzlich nichtkonservative Lagekräfte auf das System einwirken, wenn also $e_{\alpha\beta} \neq 0$ gemacht wird.

3. Der Einfluß nichtkonservativer Lagekräfte

Über diese spezielle Art von Kräften, die sich durch schiefsymmetrische Anteile der Matrix der Lagekräfte ($e_{\alpha\beta} \neq 0$) bemerkbar machen, ist in den vergangenen Jahren viel veröffentlicht worden. In der Kreiseltechnik sind derartige Kräfte zumindest in einem Fall seit langem bekannt: das Führen eines Kreiselhorizontes in die Lotrichtung (z. B. beim Sperry-Horizont) wird durch nichtkonservative Lagekräfte besorgt. Dasselbe gilt auch für die Lageregelung von drallstabilisierten Satelliten und Raumschiffen. Im einfachsten Fall eines Kreiselpendels gelten unter der Voraussetzung kleiner Auslenkungswinkel α und β die bekannten Bewegungsgleichungen

$$
\begin{aligned}
A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} + f_1\alpha + e\beta &= 0, \\
B\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} + f_2\beta - e\alpha &= 0.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

A und B sind die Trägheitsmomente, H ist der Drall, f_1 und f_2 sind die Fesselungskonstanten und e ist ein Maß für die Stärke des Aufrichtsystems, also der Führung. Man hat demnach

die symmetrische Massenmatrix $\quad a_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$,

die schiefsymmetrische Kreiselmatrix $\quad g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & H \\ -H & 0 \end{bmatrix}$,

die symmetrische Fesselmatrix $\quad f_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix}$,

die schiefsymmetrische Matrix der Führkräfte $\quad e_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & e \\ -e & 0 \end{bmatrix}$.

Nun läßt sich allgemein beweisen, daß instabile nichtgyroskopische Systeme ($g_{\alpha\beta} = 0$) durch Hinzufügen von nichtkonservativen Lagekräften nicht stabilisiert werden können. Dagegen ist es möglich, derartige Systeme durch gleichzeitiges Hinzufügen von Kreiselkräften und nichtkonservativen Lagekräften zu stabilisieren. Allerdings muß dabei die Voraussetzung erfüllt sein, daß im Falle einer statisch instabilen Gleichgewichtslage eine gerade Zahl von instabilen Freiheitsgraden vorhanden ist, wie dies bereits bei dem klassischen Satz von Thomson und Tait gefordert wurde. Diese Erkenntnis ist zum Beispiel für aufsteigende Raketen wichtig, bei denen in bestimmten Geschwindigkeitsbereichen die statische (aerodynamische) Stabilität verloren gehen kann.

Schließlich sei noch erwähnt, daß ein beliebiges System durch Kreisel- oder Lage-Kräfte nicht stabilisiert werden kann, wenn im System hinreichend stark angefachte Teilschwingungen möglich sind. Die Anfachung muß so stark sein, daß sie die Wirkung von Dämpfungen in anderen Freiheitsgraden überwiegt. Mathematisch läßt sich dies aus der Tatsache erkennen, daß die Spur der Dämpfungsmatrix $d_{\alpha\beta}$, also die Summe der in der Hauptdiagonale stehenden Elemente, negativ ist:

$$
\operatorname{sp}\,(d_{\alpha\beta}) < 0. \tag{5}
$$

Nichtkonservative Lagekräfte treten bei technischen Problemen oft als unerwünschte Begleiterscheinung auf und können dann zu gefährlichen Instabilitäten führen, zum Beispiel bei Turborotoren oder bei selbsterregt schwingenden Systemen. Um zu erkennen, ob derartige Kräfte vorhanden sind, genügt es leider nicht, die Bewegungsgleichungen aufzustellen und nachzusehen, ob schiefsymmetrische Anteile der Lagekräfte auftreten. Es zeigt sich nämlich (s. P. Müller [6]), daß es "scheinbare" nichtkonservative Lagekräfte gibt, die nur durch die Wahl des Koordinatensystems bedingt sind. Sie können durch eine geeignete Koordinatentransformation fortgeschafft werden, während dies für echte nichtkonservative Lagekräfte, wie sie z. B. im Führmechanismus des Sperry-Horizontes auftreten, nicht möglich ist. Dies soll an einem einfachen Beispiel gezeigt werden.

Es sei ein gedämpfter, nicht gefesselter symmetrischer Kreisel betrachtet, wie er etwa bei Lagekreisel-Plattformen verwendet wird. Seine genäherten Bewegungsgleichungen in einem Inertialsystem lauten:

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + d\dot{\alpha} + H\dot{\beta} &= 0\,, \\ A\ddot{\beta} + d\dot{\beta} - H\dot{\alpha} &= 0\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Da überhaupt keine Lagekräfte vorhanden sind, gibt es auch keine nichtkonservativen Lagekräfte. Dagegen sind die nichtkonservativen Geschwindigkeitskräfte der Dämpfung vorhanden. Transformiert man nun diese Gleichungen mit Hilfe der neuen Variablen

$$\begin{aligned} \phi &= \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t \\ \psi &= -\alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t \end{aligned} \tag{7}$$

auf ein Koordinatensystem, das mit der Winkelgeschwindigkeit ω um diejenige raumfeste Achse dreht, gegenüber der die Ablagewinkel α und β der Rotorsymmetrieachse gemessen werden, dann geht (6) über in

$$\begin{aligned} A\ddot{\phi} + d\dot{\phi} + (H - 2A\omega)\dot{\psi} + (H\omega - A\omega^2)\phi - d\omega\psi &= 0\,, \\ A\ddot{\psi} + d\dot{\psi} - (H - 2A\omega)\dot{\phi} + (H\omega - A\omega^2)\psi + d\omega\phi &= 0\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Die Massen- und die Dämpfungsmatrix dieses Systems sind gegenüber (6) nicht verändert, in der gyroskopischen Matrix ist an die Stelle von H der Ausdruck $H - 2A\,\omega$ getreten. Bemerkenswert ist, daß sowohl konservative wie auch nichtkonservative Lagekräfte vorkommen, mit den Matrizen

$$f_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} H\omega - A\omega^2 & 0 \\ 0 & H\omega - A\omega^2 \end{bmatrix}, \quad e_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -d\,\omega \\ d\,\omega & 0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Die konservativen Anteile $f_{\alpha\beta}$ können als kinetische Fesselungen bezeichnet werden. Wenn die Drehgeschwindigkeit ω des Bezugssystems gleich der Kreiseldrehgeschwindigkeit Ω gemacht wird, dann verschwinden diese kinetischen Fesselungen im Fall eines Kugelkreisels ($C = A$), da $H = C\Omega$ ist. Die nichtkonservativen Anteile der Lagekräfte hängen von der Dämpfung, also vom Beiwert d ab. Für ungedämpfte Kreisel (Luftlagerung!) verschwinden sie. Die nichtkonservativen Lagekräfte $e_{\alpha\beta}$ nach (9) stellen nun gerade jenen Typ von Kräften dar, die durch Rücktransformation auf ein Inertialsystem beseitigt werden können.

4. Näherungen für Systeme mit schnellen Kreiseln

Technische Kreiselgeräte enthalten im allgemeinen schnellaufende Kreisel, weil man den aus Funktionsgründen notwendigen Drall mit möglichst wenig Aufwand an Gewicht erreichen möchte. Deshalb dominieren in vielen Fällen die Kreiselkräfte gegenüber den sonst im Gerät noch vorhandenen Massen-, Fesselungs- oder Führungskräften. Diese Tatsache ermöglicht es, Näherungsberechnungen durchzuführen, deren Genauigkeit meist umso besser ist, je schneller die Kreisel laufen. Derartige Bewegungsgleichungen werden auch als "Technische Kreiselgleichungen" bezeichnet. Ihre Ableitung läßt sich für sehr allgemeine Fälle von Kreiselsystemen mathematisch absichern und als Rechenanweisung formulieren (siehe z. B. [7]).

In dem bereits erwähnten Fall des Kreiselpendels, Gleichung (4), führt die Rechenvorschrift dazu, daß zur Berechnung der meist primär interessierenden langsamen Präzessionsbewegungen die Massenkräfte vernachlässigt werden. Das Gleichgewicht von Kreiselmomenten einerseits sowie Fessel- und Führ-Momenten andererseits führt dann aus (4) zu den Näherungsgleichungen:

$$\begin{aligned} H\dot{\beta} + f_1\alpha + e\beta &= 0, \\ -H\dot{\alpha} + f_2\beta - e\alpha &= 0. \end{aligned} \qquad (10)$$

Andererseits können die Lagekräfte bei der Berechnung der schnellen Nutationsschwingungen vernachlässigt werden, so daß diese Bewegung aus dem Momentengleichgewicht von Kreisel- und Massenkräften errechnet werden kann. Das ergibt aus (4) die Näherungsgleichungen:

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} &= 0, \\ B\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} &= 0. \end{aligned} \qquad (11)$$

Beide Gleichungssysteme (10) und (11) lassen sich erheblich einfacher lösen als das vollständige System (4).

Obwohl die Technischen Kreiselgleichungen schon seit langem verwendet werden, ist es erst vor kurzem gelungen, die Voraussetzungen für ihre Gültigkeit genauer zu formulieren (siehe z. B. [3] oder [7], Kap. 5.3.2). Vier Bedingungen müssen erfüllt sein:

1) der Drall H muß hinreichend groß sein,
2) es muß $\det(g_{\alpha\beta}) \neq 0$ gelten,

3) die Lösungen der Näherungsgleichungen, z. B. (10), müssen stabil sein,

4) es dürfen keine Mehrfachwurzeln für die charakteristische Gleichung des Näherungssystems auftreten.

Bei Nichterfüllen dieser Bedingungen muß mit einem Versagen der gerade für die Kreiseltechnik so überaus wichtigen Näherungen gerechnet werden, zumindest ist dann besondere Vorsicht geboten.

5. Frequenzen in Systemen mit schnellen Kreiseln

Sowohl aus den verkürzten Näherungsgleichungen als auch aus den allgemeinen Bewegungsgleichungen vom Typ (1) lassen sich Erkenntnisse ableiten, die das Frequenzverhalten betreffen. So läßt sich für stabile Systeme, bei denen $\det(g_{\alpha\beta}) \neq 0$ gilt, zeigen, daß die vorkommenden Eigenfrequenzen stets in zwei Gruppen aufgespalten werden. Bei großem Drall H wachsen die Frequenzen der einen Gruppe etwa proportional zu H an, während die Frequenzen der zweiten Gruppe etwa mit $1/H$ abnehmen. Es ist sinnvoll, die zur ersten Frequenzgruppe gehörenden Bewegungen als Nutationen, die zweiten als Präzessionen zu bezeichnen.

Wenn $\det(g_{\alpha\beta}) = 0$ gilt, dann bedeutet dies physikalisch, daß die Bewegungsfreiheit der Kreisel im System irgendwie eingeschränkt ist. Das einfachste Beispiel dieser Art bietet der klassische gefesselte Wendekreisel. Tatsächlich kann dieser Wendekreisel weder Nutationen noch Präzessionen ausführen; statt dessen kann man eine Eigenschwingung beobachten, die bei hinreichend starrer Konstruktion von der Größe des Dralls unabhängig ist.

Entsprechendes gilt auch in allgemeineren Fällen. Es läßt sich zeigen, daß für $H \to \infty$ drei Gruppen von Frequenzen möglich sind: die schnellen, mit H anwachsenden Nutationen, die langsamen, mit $1/H$ abnehmenden Präzessionen sowie die dazwischen liegenden Pendelschwingungen, deren Frequenzen mit $H \to \infty$ festen, von H unabhängigen Grenzwerten zustreben. Auch dieses Ergebnis läßt sich noch präzisieren: Die Zahl der Pendelschwingungen ist gleich dem Defekt der Matrix $g_{\alpha\beta}$. (Wenn n die Ordnung einer quadratischen Matrix ist und r die Ordnung der ersten nicht verschwindenden Unterdeterminanten, dann wird $d = n - r$ als Defekt der Matrix bezeichnet). Wenn ein Kreiselsystem durch eine ungerade Anzahl n von Lagekoordinaten beschrieben wird, dann gilt stets $\det(g_{\alpha\beta}) = 0$. Folglich existiert in derartigen Systemen mindestens eine Pendelschwingung. Einfachstes Beispiel ist wieder der Wendekreisel mit $n = 1$.

Bei sehr starken Fesselungen (oder auch bei geringer elastischer Nachgiebigkeit der Bauteile) sowie bei schwachem Drall kann die Trennung der drei Frequenzgruppen unvollständig sein. Dann wird die Klassifikation der

Bewegungstypen schwierig, weil eine Zuordnung der Bezeichnungen Nutation, Präzession oder Pendelschwingung nicht mehr eindeutig möglich ist.

Schrifttum

/1/ W. Thomson und P. G. Tait: Treatise on Natural Pilosophy, part 1, Cambridge University Press 1879.

/2/ K. Magnus: Der Einfluß verschiedener Kräftearten auf die Stabilität linearer Systeme, Z. angew. Math. Phys. 21 (1970) S. 523 - 534.

/3/ D. R. Merkin: Kreiselsysteme, Moskau 1956.

/4/ N. B. Četaev: Die Stabilität von Bewegungen, Moskau 1955.

/5/ P. Müller: Asymptotische Stabilität von linearen mechanischen Systemen mit positiv semidefiniter Dämpfungsmatrix, Z. angew. Math. Mech. (1971).

/6/ P. Müller: Verallgemeinerung des Stabilitätssatzes von Thomson-Tait-Četaev auf mechanische Systeme mit scheinbar nichtkonservativen Lagekräften. Z. angew. Math. Mech. (1972).

/7/ K. Magnus: Kreisel, Theorie und Anwendungen, Springer-Verlag, Berlin 1971. Kap. 5,3 und 10.1.