

# Aus Theorie und Praxis der Ingenieurwissenschaften

Mathematik Mechanik Bauwesen

*Festschrift zum 65. Geburtstag von  
HERRN PROF. DR.-ING. ISTVÁN SZABÓ*



Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn  
Berlin München Düsseldorf



**Herausgeber:**

**o. Prof. Dr.-Ing. Rudolf Trostel**

**Priv.-Doz. Dr.-Ing. Peter Zimmermann**

**Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung  
in fremde Sprachen, vorbehalten.**

**Nachdruck und fotomechanische Wiedergabe,  
auch auszugsweise, verboten.**

**© 1971 by Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin/München/Düsseldorf  
Printed in Germany. Druck: H. Heenemann KG, Berlin 42**

**ISBN 3 433 00579 6**

# Die Stabilität der Drehbewegungen eines unsymmetrischen Körpers auf horizontaler Unterlage

Von K. Magnus, München

## 1. Abgrenzung der Aufgabe

Im Jahre 1896 hat *G. T. Walker* [1] das merkwürdige Verhalten der sog. Keltischen Wackelsteine beschrieben und eine bereits sehr weitgehende Theorie dazu veröffentlicht. Diese meist flachen und unregelmäßig geformten Steine zeigen oft nach dem Andrehen auf horizontaler Unterlage um eine vertikale Achse ein auffällig verschiedenes Verhalten, je nachdem in welcher Drehrichtung der Anstoß erfolgte. Man hat den Eindruck, daß diesen Steinen eine bestimmte Eigen-Drehrichtung inneohnt, in der sie gleichmäßig und ruhig, also stabil, weiterdrehen. Dreht man sie in entgegengesetzter Richtung an, dann beginnen sofort heftige Rollschwingungen um eine Querachse. Dadurch wird die Drehbewegung gestoppt und anschließend der Drehsinn sogar umgekehrt, so daß der Stein wieder in der Eigenrichtung dreht.

Der Wackelstein kann als verallgemeinerter Fall eines Spielkreisels angesehen werden. Er unterscheidet sich von diesem durch die Unsymmetrie der äußeren Gestalt. Aus ihr resultieren ein dreiachsiges Trägheitsellipsoid und eine ellipsoidähnliche Oberfläche in der Umgebung des Auflagepunktes. Die Hauptträgheitsachsen fallen i. allg. nicht mit den Hauptkrümmungsrichtungen im Auflagepunkt zusammen. Theorie und Versuch zeigen, daß dieser Unterschied der Hauptachsen die Ursache für das beschriebene Verhalten bildet.

Walker hat bei der Berechnung des Verhaltens der Wackelsteine angenommen, daß die Steine auf der Unterlage rollen ohne zu gleiten. Die bohrende Reibung wird vernachlässigt. Die gleichen Annahmen legte auch *G. Herglotz* [2] seinen Unternehmungen zugrunde, jedoch konnte er zusätzlich zeigen, daß im Falle reibungslosen Gleitens der anfangs erwähnte Effekt nicht auftreten kann.

Die Theorie der Wackelsteine zeigt demnach viele Parallelen zur einfacheren Theorie des Spielkreisels, bei der man sich ebenfalls lange Zeit mit den Grenzfällen reinen Rollens oder völliger Reibungslosigkeit beschäftigt hatte. Ansätze, bei denen *Coulombsche* Gleitreibung vorausgesetzt wurde, gestatteten zwar den bekannten Aufrichteffekt eines Spielkreisels — oder eines gekochten Eies — qualitativ zu erklären, jedoch blieb die quantitative Übereinstimmung von Theorie und Versuch unbefriedigend (*L. Föpl* [3]).

In das noch bis vor kurzem sehr kontroverse Schrifttum zum Spielkreisel — man denke nur an die vielen Arbeiten über den Stehauf-Kreisel (tippe-top) — wurde 1962 durch *P. Contensou* [4] Klarheit gebracht (s. auch [5]).

Es gelang ihm eine umfassende Theorie aufzustellen, die alle bisher bekannten Grenzfälle umfaßt und zugleich gute quantitative Ergebnisse liefert. Der Grundgedanke von *Contensou* war ein Reibungsansatz für die Bewegung der Kreiselspitze auf der Unterlage, bei dem das Zusammenwirken der *Coulombschen* Gleitreibung mit der Bohrrreibung berücksichtigt wird. Wenn auch die bohrende Reibung ihrem Betrage nach klein bleibt — wie dies bereits von *F. Klein* und *A. Sommerfeld* [6] erkannt wurde —, so hat die Drehbewegung doch erheblichen Einfluß, weil sie zu einer Mittelung der Gleitreibungskräfte führt. Dieses Zusammenwirken hat dieselbe Wirkung wie eine Überlagerung von schnellen Schwingungen über eine Gleitbewegung: die Reibung wird erheblich verringert, und der verbleibende Rest ergibt eine quasi-viskose, der Gleitgeschwindigkeit proportionale Reibung. Dieser Effekt kann sehr eindrucksvoll an Bohnermaschinen beobachtet werden: bei nicht drehenden Bohnerbürsten erfordert das Verschieben eine beachtliche Kraft; dagegen gleitet die Maschine bei entgegengesetzt rotierenden Bürsten spielend leicht.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, den Reibungsansatz von *Contensou* in die Theorie der Wackelsteine einzuführen, um diese über die bekannten Grenzfälle hinaus zu verallgemeinern.

## 2. Annahmen und Ausgangsgleichungen

Es werde ein starrer Körper  $K$  betrachtet, der stets eine starre horizontale Ebene  $E$  in einem Punkte  $P$  berührt

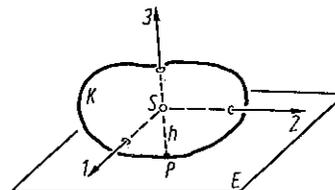


Bild 1

(Bild 1). Dabei werden die folgenden Annahmen vorausgesetzt:

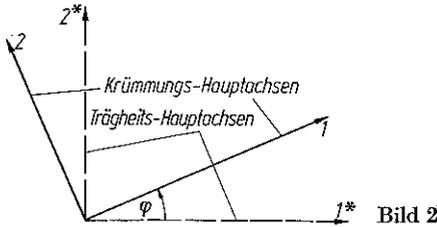
- Der Körper  $K$  sei konvex und ohne Kanten.
- Bei ruhendem Körper sei die vertikale Verbindungslinie  $PS$  ( $S$  ist der Massenmittelpunkt) zugleich eine Hauptachse des Körpers (Achse 3).
- Die horizontalen körperfesten Achsen 1 und 2 werden parallel zu den Hauptkrümmungsrichtungen gewählt, die für  $P$  gelten. Da diese Achsen i. allg. keine Hauptachsen sind, gilt für den Trägheitstensor

$$\theta_{ij} = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad (1)$$

mit

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(A_0 + B_0) + \frac{1}{2}(A_0 - B_0) \cos 2\varphi, \\ B &= \frac{1}{2}(A_0 + B_0) - \frac{1}{2}(A_0 - B_0) \cos 2\varphi, \\ F &= \frac{1}{2}(A_0 - B_0) \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (2)$$

Dabei sind  $A_0$ ,  $B_0$  und  $C$  die Hauptträgheitsmomente bezüglich  $S$ ;  $F$  ist das einzige in diesem Falle auftretende Massen-Deviationsmoment. Der Winkel  $\varphi$  kennzeichnet die Abweichung des gewählten 123-Systems gegenüber dem Hauptachsensystem 1\* 2\* 3 (Bild 2).



d) Am Berührungspunkt  $P$  soll entsprechend dem Ansatz von *Contensou* eine horizontale Reibungskraft

$$R_i = -k \dot{x}_i^P \quad (3)$$

wirken. Dabei ist  $k$  der Beiwert der quasi-viskosen Reibung und  $\dot{x}_i^P$  der Vektor der Absolutgeschwindigkeit desjenigen körperfesten Punktes, der gerade die Unterlage berührt.

e) Für die spätere Theorie (Kap. 3) wird weiter vorausgesetzt, daß die Abweichungen der Richtung der 3-Achse von der Vertikalen klein bleiben.

Wegen der Unsymmetrie des Körpers ist es zweckmäßig, das körperfeste 123-System der Rechnung zugrunde zu legen. Dann lassen sich die Ausgangsgleichungen wie folgt formulieren:

α) Mit dem Drallvektor  $H_i = \theta_{ij} \omega_j$  lautet der Drallsatz:

$$\frac{d' H_i}{dt} + \varepsilon_{ijk} \omega_j H_k = M_i = \varepsilon_{ijk} y_j (N_k + R_k). \quad (4)$$

Dabei ergibt sich das äußere Moment  $M_i$  bezüglich  $S$  als Vektorprodukt des Ortsvektors  $y_j = \overrightarrow{SP}$  mit der in  $P$  wirkenden resultierenden Gesamtkraft  $N_k + R_k$ , wobei  $N_k$  die zur Unterlage normale Komponente der Auflagerkraft ist. Mit dem Einheitsvektor  $e_i^v$  in Richtung der Vertikalen gilt:  $N_i = N e_i^v$  und  $\varepsilon_{ijk} e_j^v R_k = 0$ .

β) Wenn  $J_i = m \dot{x}_i^S$  der Impuls des Körpers ist, dann gilt im 123-System der Impulssatz:

$$\frac{d' J_i}{dt} + \varepsilon_{ijk} \omega_j J_k = F_i = G_i + N_i + R_i. \quad (5)$$

Dabei ist  $F_i$  die Resultierende aller äußeren Kräfte und  $G_i = -m g e_i^v$  die Gewichtskraft.

γ) Von den beiden kinematischen Gleichungen

$$\frac{d' e_i^v}{dt} + \varepsilon_{ijk} \omega_j e_k^v = 0 \quad (6)$$

$$\dot{x}_i^P = \dot{x}_i^S + \varepsilon_{ijk} \omega_j y_k \quad (7)$$

sagt die erste aus, daß die absolute Änderung des Vektors  $e_i^v$  verschwindet, während durch (7) die Absolutgeschwindigkeit des körperfesten Punktes bei  $P$  bestimmt ist.

δ) Schließlich wird die geometrische Gleichung

$$f(y_1, y_2, y_3) = 0 \quad (8)$$

benötigt, durch die die Oberflächenform des Körpers definiert wird. Dabei muß für den Berührungspunkt  $P$  gelten:

$$(\text{grad } f)_P = e_i^v \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_3}\right)^2}. \quad (9)$$

Die Gleichungen (3) bis (8) reichen aus, das Verhalten der Wackelsteine zu berechnen. Für die Komponentengleichungen von (4) erhält man mit (1) nicht die einfache *Eulersche* Form der Kreisgleichungen sondern

$$\begin{aligned} A \dot{\omega}_1 + (C - B) \omega_2 \omega_3 + F (\omega_1 \omega_3 - \dot{\omega}_2) &= y_2 (N_3 + R_3) - y_3 (N_2 + R_2), \\ B \dot{\omega}_2 + (A - C) \omega_3 \omega_1 - F (\omega_2 \omega_3 + \dot{\omega}_1) &= y_3 (N_1 + R_1) - y_1 (N_3 + R_3), \\ C \dot{\omega}_3 + (B - A) \omega_1 \omega_2 - F (\omega_1^2 - \omega_2^2) &= y_1 (N_2 + R_2) - y_2 (N_1 + R_1). \end{aligned} \quad (10)$$

Von den Komponentengleichungen der Vektorgleichungen (5) bis (7) seien hier nur die jeweils ersten angegeben, da die anderen durch zyklisches Vertauschen der Indices daraus folgen. Man erhält mit  $x_i^S = [x_1, x_2, x_3]$ :

$$\text{Aus (5): } m (\dot{x}_1 + \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2) = G_1 + N_1 + R_1, \quad (11)$$

$$\text{aus (6): } \dot{e}_1^v + \omega_2 e_3^v - \omega_3 e_2^v = 0, \quad (12)$$

$$\text{aus (7): } \dot{x}_1^P = \dot{x}_1 + \omega_2 y_3 - \omega_3 y_2. \quad (13)$$

### 3. Partikuläre Lösungen und Nachbarbewegungen

#### 3.1. Gleichgewicht und stationäre Drehung

Man erkennt leicht, daß wegen der getroffenen Annahmen die durch

$$\omega_i = 0; \dot{x}_i^S = 0; y_i = -h e_i^v; \dot{e}_i^v = 0 \quad (14)$$

gegebene statische Gleichgewichtslage eine Lösung der Ausgangsgleichungen ist.

Außerdem gibt es eine weitere Partikulärlösung: Weil die 3-Achse des Körpers Hauptachse ist, sind Drehungen mit konstanter Drehgeschwindigkeit  $\omega_0$  möglich, wenn die 3-Achse vertikal ist. Diese Bewegung wird durch

$$\left. \begin{aligned} \omega_i &= [0, 0, \omega_0]; e_i^v = [0, 0, 1]; \\ y_i &= (0, 0, -h]; H_i = [0, 0, C\omega_0]; \\ \dot{x}_i^S &= 0; \dot{x}_i^P = 0; J_i = 0; R_i = 0; \\ G_i + N_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

gekennzeichnet.

### 3.2. Nachbarbewegungen zu (15)

Nimmt man die in (15) verschwindenden Größen als klein von erster Ordnung an, dann erkennt man aus (10) bis (13) leicht, daß die Größen

$$\begin{aligned}\omega_3 &= \omega_0; e_3^v = 1; \dot{x}_3 = 0; y_3 = -h; \\ N_3 &= -G_3 = -mg\end{aligned}$$

bis auf Größen von zweiter Ordnung konstant bleiben. Mit den verbleibenden Größen erster Ordnung ergeben sich linearisierte Bewegungsgleichungen. Um sie zusammenzufassen, werden die kleinen Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  eingeführt, die die Abweichung der 3-Achse von der Vertikalen bestimmen. Dazu muß die Körperform in der Umgebung von  $P$  näher betrachtet werden. Wir approximieren sie durch ein elliptisches Paraboloid mit der Gleichung

$$f(y_1, y_2, y_3) = y_3 + h - \frac{1}{2} \left( \frac{y_1^2}{p} + \frac{y_2^2}{q} \right) = 0. \quad (16)$$

Darin sind  $p$  und  $q$  die Hauptkrümmungsradien der Oberfläche in  $P$ . Aus (9) folgt mit (16) bei Vernachlässigung von Größen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}(\text{grad } f)_P &= e_i^v \sqrt{\left( \frac{y_1}{p} \right)^2 + \left( \frac{y_2}{q} \right)^2 + 1} \approx e_1^v \approx \\ &\approx \left[ -\frac{y_1}{p}, -\frac{y_2}{q}, 1 \right]. \quad (17)\end{aligned}$$

Mit den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  der Drehungen um die körperfesten 1- bzw. 2-Achsen (Bild 3) erhält man

$$\alpha \approx -\frac{y_2}{q} = e_2^v; \beta \approx \frac{y_1}{p} = -e_1^v,$$

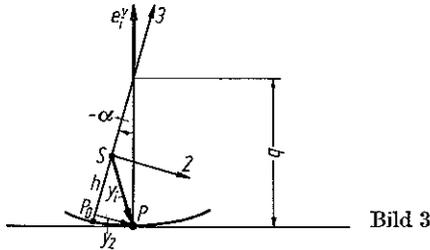


Bild 3

so daß

$$e_i^v = [-\beta, \alpha, 1] \quad (18)$$

gilt. Damit lassen sich nun mit (12) die Variablen  $\omega_1$  und  $\omega_2$ , mit (13) und (3) die Komponenten  $R_1$  und  $R_2$  durch  $\alpha$  und  $\beta$  ausdrücken. Die insgesamt 12 skalaren Differentialgleichungen (10) bis (13) können dann auf die folgenden vier reduziert werden:

$$\begin{aligned}A\ddot{\alpha} + [\omega_0^2(C - B) - mg(h - q)]\alpha - F\ddot{\beta} - \\ - \omega_0(A + B - C)\dot{\beta} - F\omega_0^2\beta - mh\omega_0\dot{x}_1 - mh\ddot{x}_2 = 0 \\ -F\ddot{\alpha} + (A + B - C)\omega_0\dot{\alpha} - F\omega_0^2\alpha + B\ddot{\beta} + \\ + [\omega_0^2(C - A) - mg(h - p)]\beta + mh\ddot{x}_1 - mh\omega_0\dot{x}_2 = 0 \\ -k\omega_0(h - q)\alpha - kh\dot{\beta} + m\ddot{x}_1 + k\dot{x}_1 - m\omega_0\dot{x}_2 = 0 \\ kh\dot{\alpha} - k\omega_0(h - p)\beta + m\omega_0\dot{x}_1 + m\ddot{x}_2 + k\dot{x}_2 = 0 \quad (19)\end{aligned}$$

### 3.3. Die charakteristische Gleichung

Da die Schwerpunktskoordinaten  $x_1$  und  $x_2$  nur als Ableitungen in (19) eingehen, hat man ein System von 6. Ordnung. Seine charakteristische Gleichung läßt sich aus (19) unmittelbar in Determinantenform gewinnen. Da es sich für die weitere Diskussion als zweckmäßig erweist, nach Potenzen des Reibungsbeiwertes  $k$  zu ordnen, wird mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}P &= \omega_0^2(C - A) - mg(h - p), \\ Q &= \omega_0^2(C - B) - mg(h - q), \\ D &= A + B - C\end{aligned} \quad (20)$$

umgeformt, so daß die charakteristische Gleichung wie folgt lautet:

$$\begin{aligned}m^2(\lambda^2 + \omega_0^2)\{\lambda^4(AB - F^2) + \lambda^2(AP + BQ + D^2\omega_0^2 - \\ - 2F^2\omega_0^2) + (PQ - F^2\omega_0^4)\} + k\{\lambda^5[2m(AB - F^2) + \\ + m^2h^2(A + B)] + \lambda^4m^2\omega_0hF(p - q) + \lambda^3[m^2\omega_0^2h^2 \\ (A + B + 2D) + m^2h^2(P + Q) - m^2\omega_0^2hD(p + q) + \\ + 2m(AP + BQ) + 2m\omega_0^2(D^2 - 2F^2)] + \\ + \lambda^22m^2\omega_0^2hF(p - q) + \lambda[m^2h^2\omega_0^2(P + Q + 2D\omega_0^2) - \\ - m^2\omega_0^4hD(p + q) + 2m(PQ - F^2\omega_0^4)] + \\ + m^2\omega_0^5hF(p - q)\} + k^2\{\lambda^4[(A + mh^2)(B + mh^2) - \\ - F^2] + \lambda^3m\omega_0hF(p - q) + \lambda^2[(A + mh^2)P + \\ + (B + mh^2)Q - \omega_0^2(2F^2 - D^2) - m\omega_0^2h(A + mh^2) \\ (h - p) - m\omega_0^2h(B + mh^2)(h - q) + m\omega_0^2Dh \\ (4h - p - q) + m^2\omega_0^2h^2(2h - p)(2h - q)] + \lambda m\omega_0^3hF \\ (p - q) + [PQ - F\omega_0^4 + m^2\omega_0^4h^2(h - p)(h - q) + \\ + m\omega_0^2h(Qp + Pq - Qh - Ph)]\} = 0 \quad (21)\end{aligned}$$

## 4. Diskussion

### 4.1. Grenzfälle

Im reibungsfreien Fall  $k = 0$  bleibt von (21) nur die erste geschweifte Klammer übrig. Die dann verbleibende charakteristische Gleichung ist identisch mit der von *Herglotz* [2] angegebenen. Folglich können die dort erhaltenen Ergebnisse übertragen werden: im statisch stabilen Fall  $h < p, q$  sind die Drehungen um die Vertikalachse bei beliebigen Werten von  $\omega_0$  stabil; im statisch instabilen Fall  $h > p, q$  kann dagegen Stabilität nur bei hinreichend großer Drehgeschwindigkeit  $\omega_0$  erreicht werden.

Der Grenzfall reinen Rollens wird für  $k \rightarrow \infty$  erhalten. Es bleibt dann lediglich die letzte geschweifte Klammer von (21) übrig. Auch sie ist mit der von *Herglotz* für diesen Fall angegebenen charakteristischen Gleichung identisch. Man erkennt im vorliegenden Fall unmittelbar aus (21), daß eine Abhängigkeit der Stabilität vom Drehsinn vorhanden ist. Die Glieder mit  $\lambda^3$  und  $\lambda$  in der dritten geschweiften Klammer von (21) haben den Teilfaktor

$$\omega_0 F(p - q). \quad (22)$$

Da der Faktor von  $\lambda^4$  positiv ist — wie aus (2) leicht gezeigt werden kann — muß notwendigerweise auch (22) positiv sein, wenn Stabilität möglich sein soll.

Diese Bedingung kann wegen (2) auch in die Form

$$\omega_0 (A_0 - B_0) (p - q) \sin 2\varphi > 0 \quad (23)$$

gebracht werden. Wählt man nun die 1- und 2-Achsen so, daß  $A_0 > B_0$  ist, dann ist für nicht extrem inhomogene Körper stets auch  $p < q$ . Damit aber muß nach (23) für Stabilität  $\omega_0 \varphi < 0$  gefordert werden. Die Drehung muß dann — wie man aus Bild 2 erkennt — bei  $\varphi > 0$  von oben gesehen rechts herum erfolgen. Man erkennt daraus, daß stabile Drehbewegungen nur dann möglich sind, wenn die Hauptachse mit dem größeren (oder kleineren) Trägheitsmoment der Achse mit der größeren (oder kleineren) Krümmung vorausseilt. Diese bereits von Walker ausgesprochene Erkenntnis stimmt mit Versuchsergebnissen überein.

Auch der Grenzfall des Spielkreisels ist in dem hier betrachteten allgemeineren Fall enthalten. Man hat hierfür

$$A = B; F = 0; P = Q; p = q \quad (24)$$

zu setzen. Durchsichtiger Formulierungen gewinnt man für den Spielkreisel allerdings, wenn man — wie dies z. B. in [5] geschehen ist — ein nicht mit dem Kreisels mitdrehendes Koordinatensystem verwendet. Es läßt sich zeigen, daß die Differentialgleichungen (19) mit (24) durch Transformation auf ein nicht mitdrehendes Bezugssystem genau in die in [5] verwendete Form übergehen.

Schließlich kann man für den Grenzfall eines nicht-drehenden Körpers  $\omega_0 = 0$  aus (21) mit (20) zu einer charakteristischen Gleichung vom 6. Grade kommen. Eine Untersuchung der Vorzeichen der Faktoren von  $\lambda^6$ ,  $\lambda^4$  und  $\lambda^2$ , die hier nicht im einzelnen durchgeführt werden soll, führt auf die für Stabilität notwendigen Bedingungen

$$h < p; h < q. \quad (25)$$

Das aber bedeutet statische Stabilität.

Im Grenzfall sehr schneller Drehung ( $\omega \rightarrow \infty$ ) hat man nur die Glieder mit den jeweils höchsten Potenzen von  $\omega_0$  in den Faktoren der  $\lambda^n$  zu berücksichtigen. Das von  $\lambda$  freie Glied der charakteristischen Gleichung enthält als Form mit der höchsten Potenz den Ausdruck

$$\omega_0^6 m^2 [(C - A)(C - B) - F^2].$$

Er muß positiv sein, weil der Faktor von  $\lambda^6$  stets positiv ist. Unter Berücksichtigung von (2) führt diese Forderung zu

$$(C - A_0)(C - B_0) > 0. \quad (26)$$

Bei rascher Drehung ist also Stabilität nur möglich, wenn zur 3-Achse entweder das größte oder das kleinste Hauptträgheitsmoment gehört.

## 4.2. Das Aufrichten des gekochten Eies

L. Föppl [3] hat in seiner Habilitationsschrift nur den Fall untersucht, daß die Symmetrieachse des Eies im Verlaufe des Aufrichtungsvorganges der Vertikalrichtung

bereits hinreichend nahe gekommen ist. Seine Untersuchungen beziehen sich also letztlich auf eine Untersuchung des Eies als symmetrischer Spielkreisel. Interessanter ist jedoch der Beginn der Aufrichtbewegung, bei der das Ei noch „auf dem Bauche“ liegt und in dieser Stellung um die Vertikale angedreht wird. Auch hierfür lassen sich einige Aussagen formulieren.

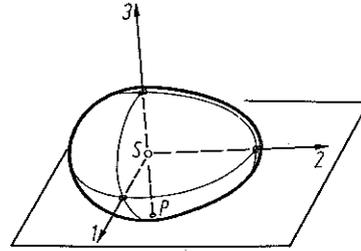


Bild 4

Wenn die Symmetrieachse des Eies als 2-Achse (Bild 4) gewählt wird, dann gilt

$$A = C > B; F = 0; q > p = h. \quad (27)$$

Damit folgt aus (20)  $P = 0$  und  $Q > 0$ . Die charakteristische Gleichung (21) vereinfacht sich zu:

$$\begin{aligned} & m^2 (\lambda^2 + \omega_0^2) \{ \lambda^4 A B + \lambda^2 [\omega_0^2 B C + B m g (q - h)] \} + \\ & + k \{ \lambda^5 [2 m A B + m^2 h^2 (A + B)] + \\ & + \lambda^3 [2 m^2 h^2 \omega_0^2 (A + B) + 2 m \omega_0^2 A B + \\ & + m^2 g (q - h) (2 B + m h^2) - \\ & - m^2 \omega_0^2 h B (h + q)] + \lambda [m^2 \omega_0^4 h^2 (A + B) - \\ & - m^2 \omega_0^2 h B (h + q) + m^3 h^2 \omega_0^2 g (q - h)] \} + \\ & + k^2 \{ \lambda^4 (A + m h^2) (B + m h^2) + \\ & + \lambda^2 [\omega_0^2 A B + m \omega_0^2 h^2 (A - B) + \\ & + m g (B + m h^2) (q - h) + 2 m h^2 \omega_0^2 B + \\ & + m^2 h^4 \omega_0^2] \} = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Daraus kann interessanterweise zunächst der Schluß gezogen werden, daß eine Instabilität der Drehungen weder bei reibungslosen Gleiten ( $k = 0$ ) noch bei reinem Rollen ( $k \rightarrow \infty$ ) zu erwarten ist. In beiden Fällen gibt es für  $\lambda^2$  je eine Nullwurzel sowie eine reelle Wurzel mit  $\lambda^2 < 0$ . Das System befindet sich demnach auf der Stabilitätsgrenze.

Nun hat L. Föppl bei seinen Versuchen einwandfrei festgestellt, daß bestenfalls ein zeitweiliges Rollen, stets aber auch Gleiten auftritt. Demnach kann das wirkliche Verhalten nicht durch die beiden genannten Grenzfälle erfaßt werden. Aus (28) läßt sich aber auch für beliebige Werte von  $k$  ein Ergebnis finden: weil der Faktor von  $\lambda^6$  positiv ist, müssen notwendigerweise die Faktoren aller anderen Potenzen von  $\lambda$  positiv sein.

Der Faktor von  $\lambda$  (ein von  $\lambda$  freies Glied gibt es nicht) kann wie folgt geschrieben werden:

$$m^2 h \omega_0^2 [\omega_0^2 (h A - B q) + m g h (q - h)] \quad (29)$$

Wenn dieser Ausdruck auch bei beliebig großer Drehgeschwindigkeit  $\omega_0$  positiv sein soll, dann muß  $h A - q B$  positiv sein.

Als hinreichende, sicher aber nicht notwendige Bedingung für Instabilität, also für das Aufrichten eines Eies aus der Bauchlage heraus bei hinreichend schneller Drehung hat man deshalb die Forderung

$$qB > hA \text{ oder } \frac{B}{A} > \frac{h}{q}. \quad (30)$$

Für ein normales Hühnerei ist sie erfüllt; hierfür gilt angenähert  $B/A \approx 0,78$  und  $h/q \approx 0,68$ .

Die Aufrichtbedingung (30) erklärt auch einen von verschiedenen Autoren beschriebenen Effekt, der an Kugeln (z. B. an kugelförmigen Bällen) mit schwach exzentrischem Schwerpunkt beobachtet werden kann: die in statisch stabiler Lage um die Vertikale angedrehte Kugel überschlägt sich um  $180^\circ$  und dreht in der Lage stabil weiter, in der der Schwerpunkt seine höchste Stellung einnimmt. Die Erklärung ist nach dem zuvor Gesagten einfach: wenn die Verschiebung des Schwerpunktes aus der Mitte als von erster Ordnung klein angenommen wird, dann

ist auch die Abweichung des Verhältnisses  $h/q$  vom Wert 1 von erster Ordnung klein. Dagegen weicht nach dem Satze von *Huygens-Steiner* das Verhältnis  $B/A$  nur um eine Größe von zweiter Ordnung von 1 ab. Demnach ist die Aufrichtbedingung (30) bei tiefer liegendem Schwerpunkt erfüllt. Nach dem Aufrichten ist dagegen  $h/q > 1 > B/A$ , so daß stabile Drehungen möglich sind.

## Literatur

- [1] Walker, G. T.: On a Dynamical Top, *The Quart. J. Appl. Math.*, 28 (1896) S. 175—184.
- [2] Herglotz, G.: Vorlesung über analytische Mechanik. Universität Göttingen, Sommer-Semester 1941.
- [3] Föppl, L.: Rotierendes Ei auf horizontaler Unterlage. Habilitationsschrift, Universität Würzburg, Göttingen 1914.
- [4] Contensou, P.: Couplage entre frottement de glissement et frottement de pivotement dans la théorie de la toupie. In *Kreiselp Probleme, Symposium Celerina 1962*, Berlin 1963, S. 201—216.
- [5] Magnus, K.: *Kreisel, Theorie und Anwendungen*. Berlin 1971, Kap. 7.2.
- [6] Klein, F., und Sommerfeld, A.: *Über die Theorie des Kreisels*. Bd. III, Berlin 1923.