KURT MAGNUS, MÜNCHEN *)

DK 531.383
629.7.058.821

FORTSCHRITTE IN DER KINETIK VON MEHRKÖRPER-SYSTEMEN

15. Ludwig-Prandtl-Gedächtnis-Vorlesung, Berlin, 5. Oktober 1972

1. EINFÜHRENDES

Ludwig Prandtl wird oft als "Vater der Strömungslehre" bezeichnet, und er hat diesen Ehrentitel sicher auch verdient - vorausgesetzt, man definiert genauer, was darunter verstanden werden soll. Wir würden *Prandtl* jedoch nicht gerecht, wenn wir ihn auf die Strömungslehre allein festlegen wollten. Seine Arbeiten sind vielmehr gerade dadurch gekennzeichnet, daß sie einen weiten Bereich der physikalischen und technischen Mechanik überspannen. Ein Blick in die drei Bände der "Gesammelten Abhandlungen", die 1961 herausgegeben wurden, bestätigt das in eindrucksvoller Weise. Neben den Veröffentlichungen zur Strömungslehre sind vor allem auch die *Prandtl*schen Arbeiten zur Theorie plastischer Körper bekannt geworden. Das *Prandtl*sche Fließgesetz für ideal plastische Körper wird auch heute noch oft zur Lösung technischer Aufgaben herangezogen. Weniger bekannt ist dagegen, daß *Ludwig Prandtl* auch Anstöße auf dem Gebiet der Mechanik starrer Körper - der Stereomechanik - gegeben hat. Und ich möchte aus dieser Tatsache nun die Rechtfertigung dafür ableiten, daß ich in dieser Gedächtnis-Vorlesung nicht - wie es fast schon Tradition geworden ist - über ein Thema der Strömungslehre spreche.

*) Lehrstuhl und Institut B für Mechanik der TU München.

2. DAS PRANDTL-RAD

In den "Gesammelten Abhandlungen" *Prandtls* [1] sucht man vergeblich nach Arbeiten, die in das Gebiet der Kinetik von Mehrkörpersystemen fallen. Dennoch gibt es eine [2]. Daß sie nicht in den Sammelband aufgenommen wurde, hat einen einleuchtenden Grund: Als Autor fungiert nämlich nicht *Prandtl* selbst, sondern sein Schüler *F. Pfeiffer* (Bild 1). Wir lesen jedoch den Namen *Prandtl* nicht nur im Titel der Arbeit und im ersten Satz der Einleitung, sondern vor allem in dem Zusatz: "Nach Angaben von Prof. *Prandtl* zusammengestellt ...". Man darf daher nicht daran zweifeln, daß die Arbeit *Prandtl*sches Gedankengut widerspiegelt.

Sonderabdruck aus Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 60. Band. 1912. Heft 4.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Experimente mit dem Prandtlschen Kreiselapparat.

Nach Angaben von Prof. Prandtl zusammengestellt

von F. Pfeiffer in Danzig.

Herr Prof. Prandtl in Göttingen hat im Jahre 1906 einen Kreiselapparat konstruiert, der zuerst im dortigen Institut für angewandte Mechanik ausgeführt wurde, und der jetzt im Verlage von Martin Schilling in Leipzig herausgegeben ist. Über diesen Kreiselapparat und eine Reihe mit ihm ausführbarer Versuche soll im folgenden berichtet werden.

Bild 1. Die *Prandtl-Pfeiffer*sche Veröffentlichung aus dem Jahre 1912.

Als Student kannte ich zwar den *Prandtl*schen Kreiselapparat - er wurde im Göttinger Praktikum als *Prandtl*-Rad bezeichnet -, jedoch wußte ich zunächst nichts von der Existenz der genannten Veröffentlichung. Das hatte Folgen - und um sie zu erklären, muß ich hier einige persönliche Bemerkungen einschalten; sie erscheinen mir für das, was ich weiterhin sagen möchte, wichtig. Vor ziemlich genau 30 Jahren, im Wintersemester 1942/43, hielt ich in Göttingen einen Vortrag über ein Kreiselproblem und habe dabei auch Versuche mit dem *Prandtl*-Rad vorgeführt. Bei aller Vielseitigkeit des Geräts - so etwa sagte ich damals - sei es bedauerlich, daß man wegen der begrenzten Bewegungsfreiheit des Rades nicht auch die Stabilität oder Instabilität der Drehungen um alle drei Hauptachsen nachweisen könne. Ich hätte die *Pfeiffer-Prandtl*sche Arbeit vorher lesen sollen, dann wäre mir eine zwar wohlwollende, aber doch sehr bestimmte Aufklärung erspart geblieben, die *Prandtl* dann in der Diskussion zum Vortrag gab. Um es unverblümt zu sagen: ich hatte mich blamiert, denn *Prandtl* zeigte anschließend am Modell, daß meine Aussage nicht stimmte.

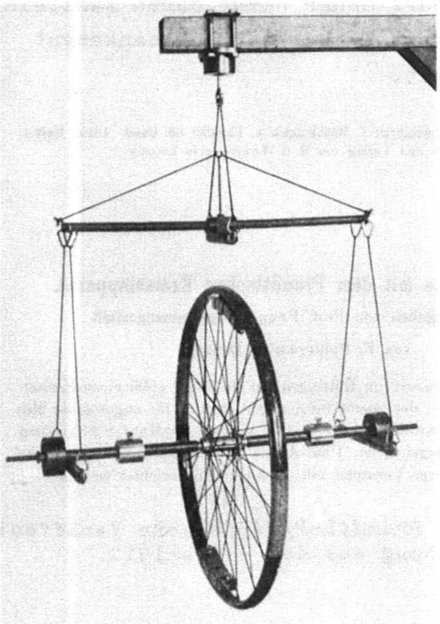

Bild 2. Das *Prandtl*-Rad.

Sehen wir uns zunächst ein Bild des *Prandtl*-Rades an (Bild 2), um den Sachverhalt besser zu verstehen, um den es hier geht. Das Gerät besteht aus einer mit Blei ausgelegten Fahrradfelge, die so in einem Parallelogrammgehänge gelagert ist, daß sie drei Freiheitsgrade der Drehung besitzt. Die Drehmöglichkeit um eine Achse senkrecht zur Ebene des Parallelogramms ist begrenzt, da das Rad bei etwa 50° Achsneigung an das Gestänge schlägt. Durch Anbringen von Zusatzmassen an der Radfelge kann erreicht werden, daß die Hauptträgheitsmomente des Rades verschieden werden, so daß ein sogenannter unsymmetrischer Kreisel vorliegt. Durch weitere Gewichte an dem als Achse dienenden Stab können außerdem die Trägheitsmomente um die zur Drehachse senkrechten Querachsen verändert werden. Will man nun die seit *Euler* bekannte Tatsache demonstrieren, daß Drehungen um die Achse des kleinsten oder des größten Hauptträgheitsmoments stabil, um die Achse des mittleren Hauptträgheitsmoments jedoch instabil sind, dann kann man zwei verschiedene Wege einschlagen. Man sorgt entweder durch Anbringen geeigneter Gewichte an den Achsenden dafür, daß das Trägheitsmoment um die Radachse nacheinander vom größten zum mittleren und kleinsten Hauptträgheitsmoment wird. Nach Andrehen des Rades und Freigabe des Systems zeigen sich die gewünschten Effekte. Oder aber man dreht das Gerät bei unverändert bleibender Massenverteilung nacheinander um alle drei Hauptachsen. Das geschieht, indem man das Gerät nicht nur um die Radachse, sondern auch um die vertikale Aufhängeachse andreht. Dabei muß dann freilich das Rad selbst in eine solche Position gebracht werden, daß eine der beiden Hauptachsen vertikal steht, weil sonst keine freien Drehungen um raumfeste Achsen möglich sind. Die Drehbewegungen um Rad und Vertikalachse, letztere für die beiden möglichen Positionen des Rades, werden als *Prandtl*-Drehungen bezeichnet. Zwei dieser Drehungen - so kann man es in der *Pfeiffer-Prandtl*-

schen Arbeit nachlesen - erweisen sich bei Versuchen mit geeigneten Massenverteilungen stets als stabil, während die dritte instabil ist. Damit kann das klassische Ergebnis der *Euler*schen Theorie experimentell bestätigt werden.

Heute wissen wir, daß die *Prandtl*schen Aussagen nicht in allen Punkten stimmen. Führt man nämlich die Experimente sorgfältig durch und variiert dabei die Massenverteilung in engeren Schritten, dann stellt man fest, daß die Ergebnisse keineswegs so eindeutig sind, wie das bei *Pfeiffer-Prandtl* steht. Man hat manchmal Mühe, das erwartete Ergebnis aus den Versuchen herauszudeuten. Diese Tatsache zwingt uns zu einer genaueren Analyse, die nun sowohl über *Euler* als auch über *Pfeiffer-Prandtl* hinausgehen muß. Das Ergebnis überrascht: Es zeigt nämlich, daß es gewisse Massenverteilungen gibt, für die alle drei *Prandtl*-Drehungen stabil sind, und andererseits solche, für die nur eine der drei Drehungen stabil bleibt. Der Grund für dieses merkwürdige Ergebnis ist in der Tatsache zu suchen, daß das *Prandtl*-Rad eben nicht einen einzelnen starren Körper bildet, sondern ein Mehrkörpersystem. *Eulers* bekannter Satz gilt aber nur für den starren Einzelkörper.

Führt man die genauere Theorie für das *Prandtl*-Rad - oder was zum gleichen Ergebnis führt, für einen kardanisch gelagerten Kreisel - durch, dann lassen sich tatsächlich die beobachteten Effekte theoretisch bestätigen [3]. Ohne auf die Theorie des *Prandtl*-Rades als Mehrkörpersystem näher einzugehen, möchte ich die Ergebnisse dieser Theorie an Hand eines Films verdeutlichen [1]).

[1]) Der Film zeigt den Aufbau eines Stabilitätsdiagramms und Aufnahmen von Versuchen, die das jetzt erheblich kompliziertere Stabilitätsverhalten bei den *Prandtl*-Drehungen an einem Kardankreisel bestätigen.

3. GYROSTATEN

Die im Film gezeigten Erscheinungen beziehen sich auf ein recht einfaches Dreikörpersystem, noch dazu bei einfachen Anfangsbedingungen. Es war bei der Theorie vorausgesetzt worden, daß in der Normalstellung die Hauptachsen aller drei Teilkörper zusammenfallen. Ist das nicht der Fall, dann sind erheblich vielseitigere Erscheinungen zu erwarten, von denen bisher nur wenige Fälle untersucht worden sind. Recht gut bekannt sind die Ergebnisse für Gyrostaten. Darunter versteht man nach *Lord Kelvin* ein Zweikörpersystem, bei dem sich im Inneren eines starren Hüllkörpers ein starrer symmetrischer Rotor befindet. Ein derartiges System ist durch die Tatsache gekennzeichnet, daß seine Gesamtträgheitsmomente unabhängig von der Winkelstellung des inneren Rotors sind.

Gyrostaten interessieren nicht nur, weil sie eine einfache Verallgemeinerung des klassischen starren Einzelkörpers bilden, sondern in letzter Zeit vor allem deshalb, weil Satelliten oder Raumflugkörper mit Dralträdern Gyrostaten sind. Aus der Fülle der inzwischen zum Thema Gyrostaten erschienenen Arbeiten möchte ich hier ein Ergebnis herausgreifen, das vom prinziellen Standpunkt aus besonders interessiert: Ich meine die Untersuchung des Übergangs im Verhalten von einem starren Einzelkörper, der einem Gyrostaten mit nicht drehendem inneren Rotor entspricht, zu einem Gyrostaten mit sehr schnell drehendem Rotor. Im ersten Fall gibt es bekanntlich drei permanente Drehachsen - die Hauptachsen des Körpers; im letzteren Fall jedoch nur eine - die Achse des inneren Rotors. Wie aber geschieht der Übergang vom Fall verschwindender Rotordrehgeschwindigkeit zum Grenzfall eines sehr schnellen Rotors? Diese Frage wurde von *J. Wittenburg* [4] erschöpfend beantwortet. Ihm ist es im vergangenen Jahr gelungen, nicht nur exakte analytische Lösungen für die Bewegungen eines kräftefreien Gyrostaten zu finden, sondern er hat durch sorgfältige Falluntersuchungen zugleich auch die Brücke zwischen bekannten, aber bisher isolierten Arbeiten geschlagen.

Im folgenden möchte ich eine Serie von Polkurvenbildern zeigen, die *Wittenburg* automatisch durch den Plotter einer Rechenanlage zeichnen ließ. Variiert wurde dabei der Drall des inneren Rotors. Er wird im folgenden durch einen diesem Drall proportionalen dimensionslosen Parameter I_o gekennzeichnet. Es soll hier der allgemeine Fall betrachtet werden, bei dem die Rotorachse nicht in eine Hauptachse oder Hauptebene des Gyrostaten fällt. In Bild 3 ist das dem Gyrostaten zugeordnete Trägheitsellipsoid mit seinen Hauptachsen 1, 2, 3 und dem eingebauten Rotor skizziert. Weiterhin wird jetzt nur noch das Ellipsoid gezeigt, aber mit den darauf projizierten Polkurven, die den Weg des Durchstoßpunktes des Drehvektors durch die Oberfläche des Ellipsoids bilden. Im Fall I_o = 0 (Bild 4) erhält man das wohlbekannte Bild für den starren Einzelkörper. Es existieren zweimal zwei Scharen von Polkurven, die durch eine Separatrix getrennt werden. Insgesamt gibt es sechs singuläre Punkte, die die Durchstoßpunkte der Hauptachsen sind. Vier davon - zwei auf der Vorder-, zwei auf der Rückseite des Ellipsoids - sind Wirbelpunkte. Sie entsprechen den stabilen Drehungen um die größte bzw. kleinste Hauptachse. Die beiden anderen Punkte sind Sattelpunkte, die als Schnittpunkte der Separatrizen erscheinen. Sie entsprechen den instabilen Drehungen um die mittlere Hauptachse.

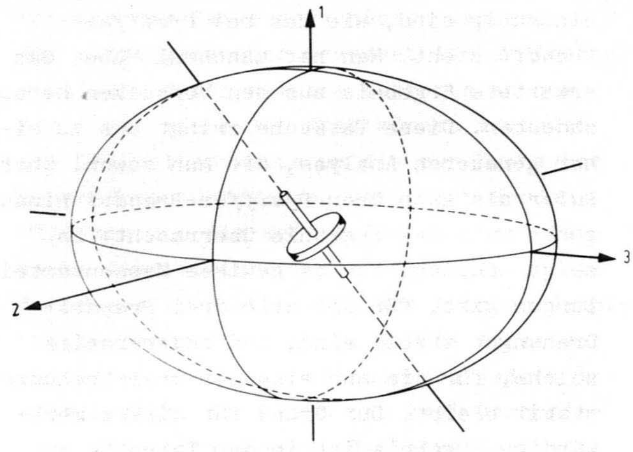

Bild 3. Gyrostat, dargestellt durch sein Trägheitsellipsoid, mit schräg eingebautem Rotor.

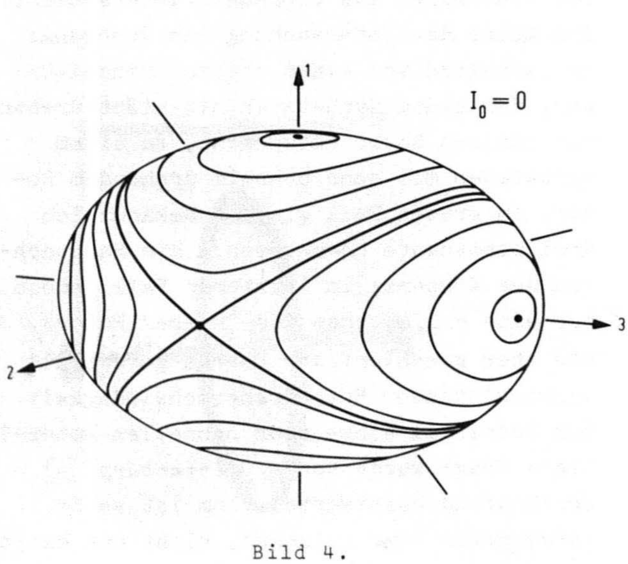

Bild 4.

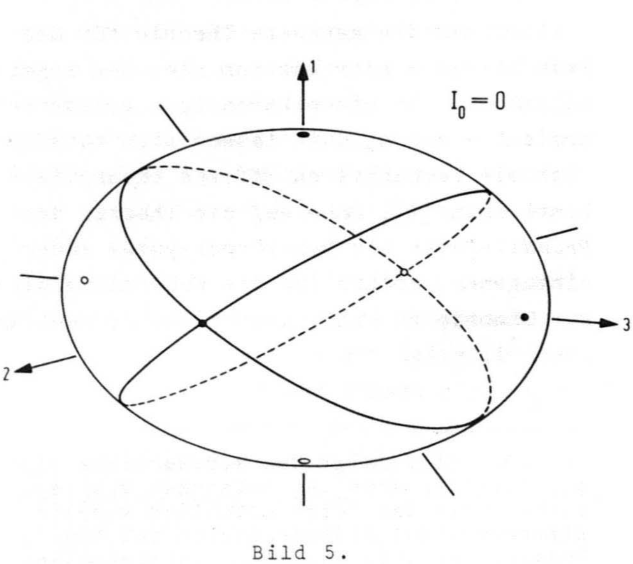

Bild 5.

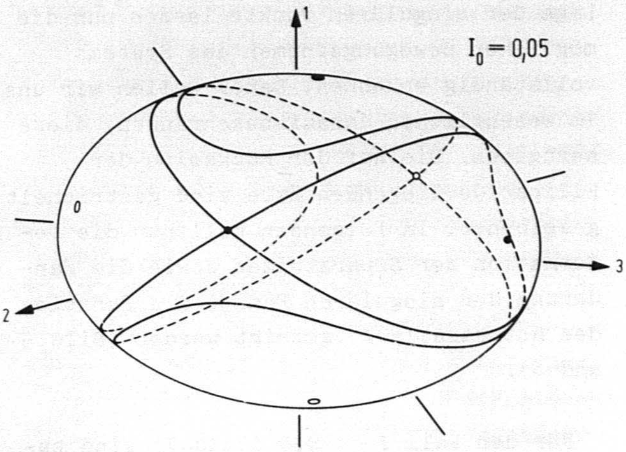

Bild 6.

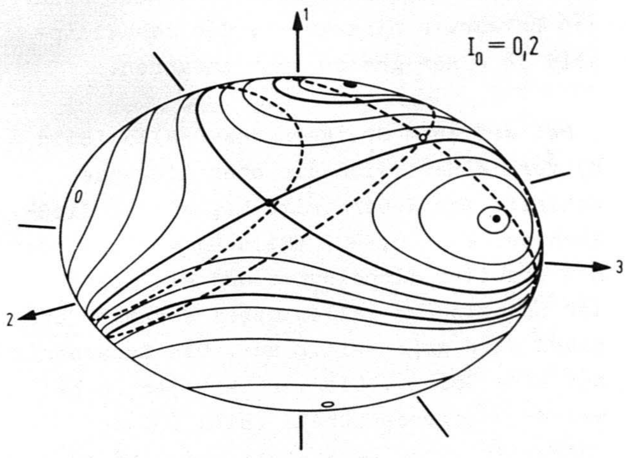

Bild 7.

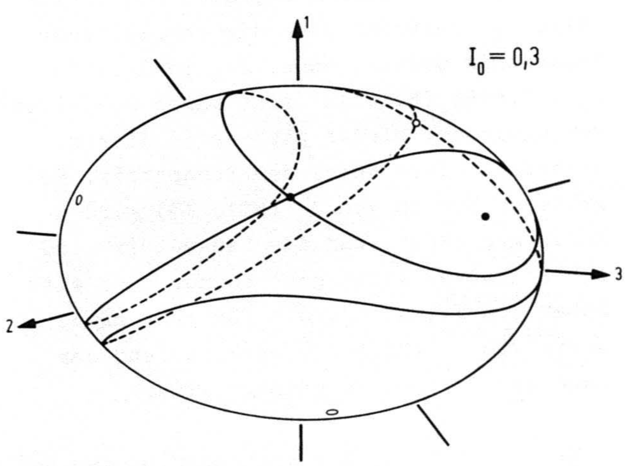

Bild 8.

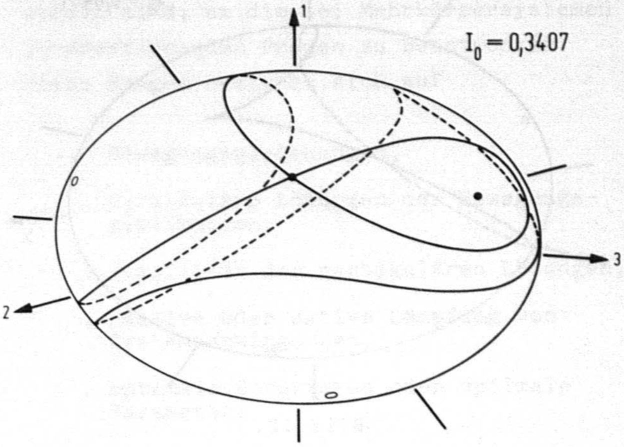

Bild 9.

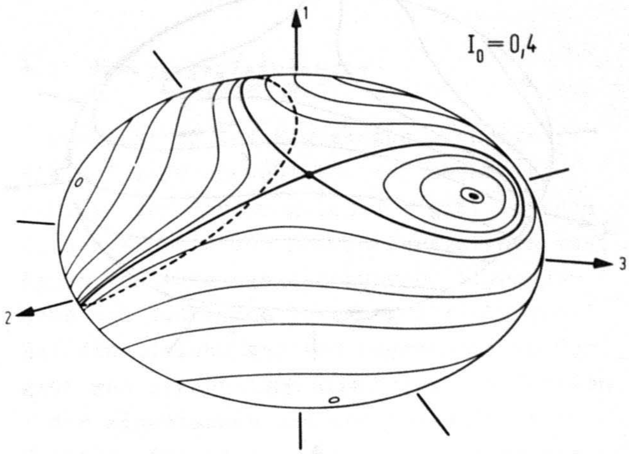

Bild 10.

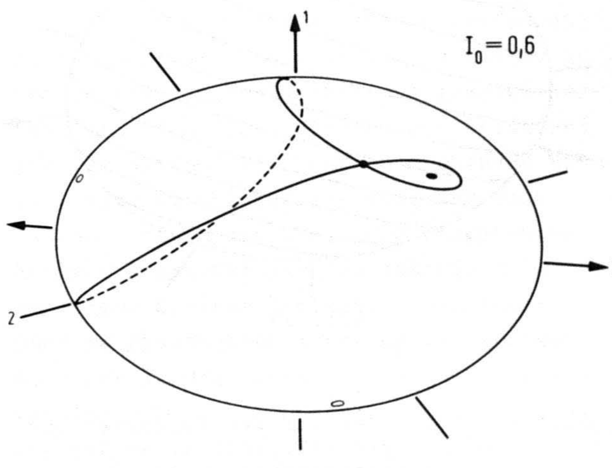

Bild 11.

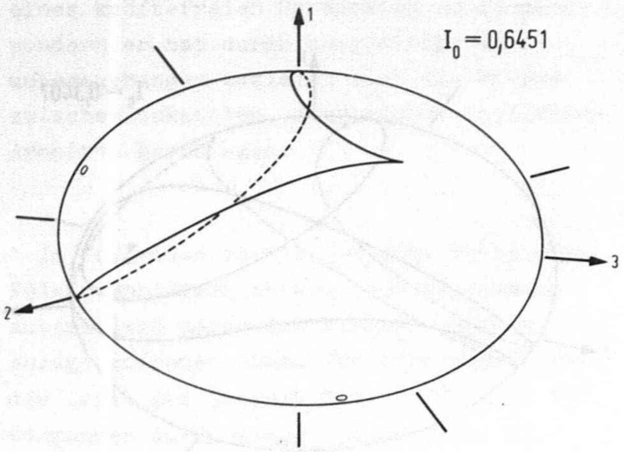

Bild 12.

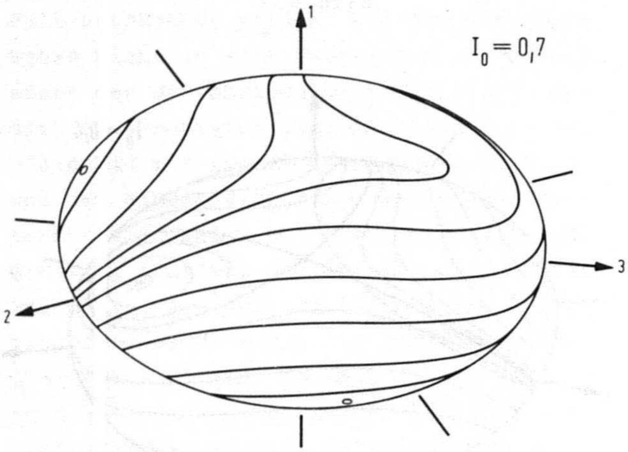

Bild 13.

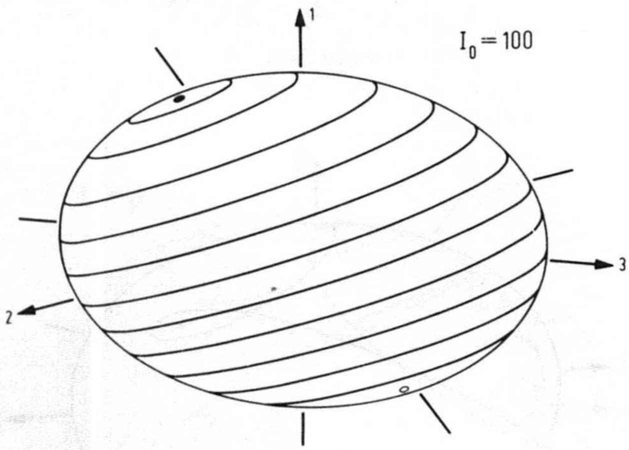

Bild 14.

Bild 4 bis 14. Verlauf der Polkurven auf dem Energie-Ellipsoid eines Gyrostaten, dargestellt für verschiedene Werte der dimensionslosen Größe I_o für den Drall des Rotors.

Der Verlauf der Separatrizen und die Lage der singulären Punkte lassen nun die möglichen Bewegungsformen des Systems vollständig erkennen. Daher wollen wir uns im wesentlichen darauf beschränken, diese anzugeben. Die auf der Rückseite der Ellipsoide liegenden Äste sind gestrichelt gezeichnet. Im folgenden soll nun die Deformation der Separatrizen sowie die Wanderung der singulären Punkte als Funktion des Rotordralls I_o gezeigt werden (Bild 5 und 6).

Für den Fall $I_o = 0,2$ (Bild 7) sind zusätzlich auch die Polkurven selbst eingetragen, weil jetzt zu den schon bekannten zweimal zwei Scharen noch eine neue Schar von Polkurven hinzukommt, die das Ellipsoid in einer großen Acht umfahren.

Bei weiterem Steigern des Dralls (Bild 8) verkleinert sich die oben liegende Schleife der Separatrix, bis sie schließlich bei $I_o = 0,3407$ (Bild 9) verschwindet. Ein stabiler Wirbelpunkt und ein instabiler Sattelpunkt fallen dabei zusammen und heben sich gegenseitig auf. Die Separatrix hat eine Spitze. Sie verliert jedoch bei weiter steigendem Drall (Bild 10) den Charakter einer Separatrix und wird zu einer gewöhnlichen Polkurve. Entsprechend verringert sich die Zahl der Polkurvenscharen. Bei weiterem Steigern des Dralls (Bild 11) verformt sich die verbleibende Separatrix weiter, wobei schließlich für $I_o = 0,6451$ (Bild 12) eine ihrer Schleifen verschwindet. Wieder gibt es in diesem Grenzfall einen Knick der Separatrix. Bei größeren Werten von I_o (Bild 13) wird der Knick geglättet, und die Separatrix wird zur Polkurve. Jetzt gibt es nur noch eine Schar von Polkurven, die für sehr große Werte von I_o (Bild 14) entsprechend der Lage der Rotorachse geneigt sind.

Man erkennt aus der Bilderserie, daß bei von Null ansteigendem Drall erst sechs, dann vier und schließlich bei großem Drall nur noch zwei singuläre Punkte vorhanden sind. Diesen Punkten entsprechen ebensoviele Achsen möglicher stationärer Drehbewegungen, wobei freilich der Drehsinn berücksichtigt werden muß. Dem *Euler*schen Fall des starren Einzelkörpers entsprechen demnach sechs Achsen stationärer Drehbewegungen. Der Körper kann um seine drei Hauptachsen jeweils in beiden Richtungen drehen.

Bei praktischen Anwendungen dieser Erkenntnisse in der Raumfahrt interessieren vor allem die Lagen der Achsen möglicher stabiler Drehungen. Außerdem aber muß der Verlauf der Separatrizen bekannt sein, weil diese die Größe der Einzugsbereiche bestimmen, die den stationären Drehungen zugeordnet sind. Daraus ergeben sich die zulässigen Größen von Störungen, die ohne Übergang des Gyrostaten oder Satelliten in einen anderen Bewegungszustand noch vertragen werden können.

Soviel zum Zweikörpersystem des Gyrostaten. Von dem Dreikörpersystem des Kardankreisels handelte bereits der Film. Es gäbe dazu noch mehr Interessantes zu berichten, jedoch möchte ich mich darauf beschränken, hier nur den für praktische Anwendungen überaus wichtigen Effekt der kinetischen Drift zu erwähnen und im übrigen auf das einschlägige Schrifttum (z.B. [5]) zu verweisen.

4. ALLGEMEINE MEHRKÖRPERSYSTEME

Prandtl-Rad, Kardankreisel und Gyrostaten sind besonders einfache Mehrkörpersysteme. Trotzdem ist die Analyse ihres Verhaltens - von einfachen Sonderfällen abgesehen - schon recht schwierig. Wir können also kaum erwarten, für allgemeinere Mehrkörpersysteme eine auch nur einigermaßen vollständige Theorie zu erhalten. Dennoch gibt es eine Fülle von Einzelergebnissen und vor allem eine Anzahl wichtiger Arbeiten, in denen Methoden ausgearbeitet worden sind, um die bei Mehrkörpersystemen interessierenden Fragen zu beantworten. Diese Fragen beziehen sich auf

- Bewegungsgleichungen,
- partikuläre Lösungen der Bewegungsgleichungen,
- Stabilität der partikulären Lösungen,
- passive oder aktive Dämpfung von Systemschwingungen,
- optimale Strukturen oder optimale Parameter.

Im folgenden möchte ich auf einige dabei auftretende Schwierigkeiten eingehen.

4.1. *Bewegungsgleichungen*

Zunächst zu den Bewegungsgleichungen: Wie auf anderen Gebieten der Mechanik - z.B. in der Strömungslehre - gibt es auch in der Kinetik von Mehrkörpersystemen zwei Typen von Ausgangsgleichungen: *Lagrange*sche und *Euler*sche Bewegungsgleichungen. Bei den Gleichungen vom *Lagrange*schen Typ geht man bekanntlich von Energieausdrücken - der kinetischen und der potentiellen Energie, der *Lagrange*schen oder auch der *Hamilton*schen Funktion - aus. Die Analytische Mechanik liefert dann Vorschriften, um daraus die Bewegungsgleichungen abzuleiten. Vorteile bietet dieses Verfahren fast immer bei konservativen Systemen. In den letzten Jahren konnte nun gezeigt werden, daß sich diese Gleichungen besonders gut für Systeme mit inneren drehenden Massen, also für Kreiselsysteme, verwenden lassen, sofern der Drall der eingebauten Rotoren gegenüber den Drallanteilen des sonstigen Systems dominiert. Man kommt dann zu brauchbaren Näherungsgleichungen, wenn man in die *Lagrange*schen Gleichungen zweiter Art

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

anstelle der *Lagrange*schen Funktion L die verkürzte *Routh*sche Funktion

$$(2) \qquad R^* = \sum_{s,t}^{1\cdots m} H_s h_{st} \dot{q}_t$$

einsetzt. Darin bezeichnet H_s den Drall des s-ten Rotors im System, $\dot{q}_t$ sind die nichtzyklischen Geschwindigkeiten und h_{st} ist eine Matrix von Richtungscosinus, die angibt, welche der Drehungskomponenten $\dot{q}_t$ als Führungsdrehungen für die einzelnen Schwungmassen auftreten. Das Gleichungssystem

$$(3) \quad \left\{ \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial}{\partial q_r} \right] \sum_{s,t}^{1\cdots m} H_s h_{st} \dot{q}_t = 0 \qquad (r = 1, \ldots\ldots, n) \right.$$

kann demnach als Ausgangssystem für die Berechnung von solchen Mehrkörpersystemen verwendet werden, die schnelle Kreisel enthalten. Man bezeichnet (3) auch als Gleichungen der Präzessionstheorie. Gleichungen dieser Art haben sich insbesondere bei der Berechnung komplizierter Kreiselgeräte, z.B. in Trägheitsnavigationsanlagen, bewährt.

Trotz ihrer zweifellos vorhandenen Vorteile haben sich die Gleichungen vom *Lagrange*schen Typ bei der Berechnung von Satelliten und Raumfahrzeugen als nicht so zweckmäßig erwiesen wie Gleichungen vom *Euler*schen Typ. Diese sind offensichtlich anpassungsfähiger für die komplizierten Systeme der Raumfahrt. Bei Gleichungen vom *Euler*schen Typ geht man von Impulssatz und Drallsatz

$$(4) \qquad \frac{dJ_i}{dt} = F_i\ , \qquad \frac{dH_i}{dt} = M_i$$

aus. Schwierigkeiten ergeben sich bei der Durchführung der Theorie durch die Tatsache,

1. daß bei den Kräften F_i und Momenten M_i für jeden Einzelkörper auch die inneren Kräfte zwischen den Teilkörpern des Systems berücksichtigt werden müssen,
2. daß die Drallgleichungen nur dann eine einfache Form haben, wenn man sie in Koordinaten von jeweils körperfesten Bezugssystemen zerlegt und
3. daß die kinematische Struktur des Gesamtsystems und die Art der Verbindung einander benachbarter Teilkörper meist durch recht umständliche Funktionen ausgedrückt werden müssen.

Es bereitet keine Schwierigkeit, die Bewegungsgleichungen für den α-ten Teilkörper in einem körperfesten Bezugssystem anzuschreiben. Man erhält (siehe z.B. [5]):

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & m^\alpha \dot{v}_i^{s\alpha} = F_i^{\alpha} + \sum_\beta F_i^{\alpha\beta}\ , \\ & \Theta_{ij}^{\alpha} \mathring{\omega}_j + \varepsilon_{ijk} \omega_j \Theta_{kl}^{\alpha} \omega_2 + m^\alpha \varepsilon_{ijk} r_j \dot{v}_k = \\ & \qquad = M_i^{\alpha} + \sum_\beta M_i^{\alpha\beta} + \sum_\beta \varepsilon_{ijk} x_j^{\alpha} F_k^{\alpha\beta}\ . \end{aligned} \right.$$

Umständlich wird jedoch das Transformieren dieser Gleichungen auf dasjenige Bezugssystem, das zur Beschreibung der Bewegungen des Gesamtsystems verwendet werden soll. Meist wird hierzu ein im Hauptkörper des Systems - z.B. in der Zelle eines Raumfahrzeugs - festes Bezugssystem herangezogen. Für jeden Teilkörper erhält man $2\cdot 3 = 6$ skalare Gleichungen, in denen die meist nicht weiter interessierenden inneren Kräfte $F_i^{\alpha\beta}$ und Momente $M_i^{\alpha\beta}$ vorkommen. Das System der Gleichungen (5) muß ergänzt werden durch die kinematischen Gleichungen

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & f(x_1^\alpha, x_2^\alpha, x_3^\alpha, \psi^\alpha, \vartheta^\alpha, \varphi^\alpha, \\ & x_1^\beta, x_2^\beta, x_3^\beta, \psi^\beta, \vartheta^\beta, \varphi^\beta, \ldots) = 0\ , \end{aligned} \right.$$

die die Art der Verbindung zwischen benachbarten Teilkörpern ausdrücken. Beim Zusammenfassen der Gleichungen für die Teilkörper zu einem System von Bewegungsgleichungen für das Gesamtsystem lassen sich nun die inneren Kräfte und Momente mit Hilfe der Funktionen (6) wenigstens zum Teil eliminieren. *R.E. Roberson* und *J. Wittenburg* [6] haben gezeigt, daß der Eliminationsprozeß vollständig durchführbar ist, wenn die Verbindung zwischen zwei Teilkörpern des Systems vom Typ eines Kugelgelenks ist und wenn außerdem das Gesamtsystem Baumstruktur besitzt. Es dürfen beliebig viele Äste oder Ketten miteinander verbunden werden, nur dürfen keine geschlossenen Schleifen vorkommen (Bild 15a).

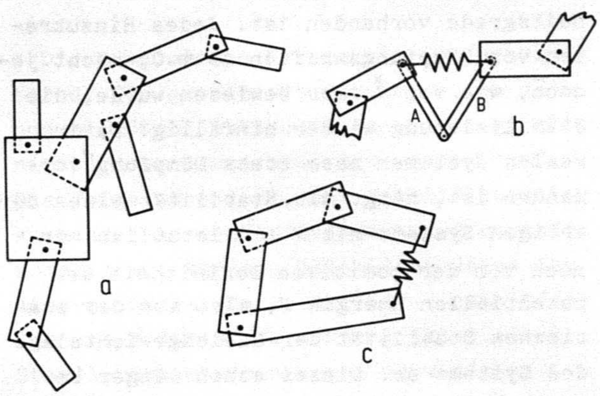

Bild 15. Strukturen von Mehrkörpersystemen.

Zusätzliche Schwierigkeiten ergeben sich, wenn die Verbindung zweier Teilkörper nicht durch Gelenke, sondern durch elastische Elemente - z.B. Gummiseile - geschieht. Man kann dann das bisherige Verfahren zwar im Prinzip beibehalten, wenn man neben der elastischen Verbindung zwei zusätzliche Teilkörper *A* und *B* mit der Masse Null einfügt, die untereinander und mit den Nachbarkörpern gelenkig verbunden sind (Bild 15b). Aber die Mathematik rächt sich für diesen physikalischen Trick: Die Auswertung der Gleichungen wird komplizierter, wenn die quadratische Form der kinetischen Energie semidefinit wird. Das aber ist bei verschwindenden Teilmassen möglich.

Wie hat man nun vorzugehen, wenn ein System Schleifen enthält? Wie *F.W. Ossenberg-Franzes* [7] gezeigt hat, kann die Elimination der inneren Kräfte noch vollständig durchgeführt werden, sofern innerhalb einer Schleife wenigstens eine elastische Verbindung vorhanden ist (Bild 15c). Eine Schleife aus Starrkörpern, die nur durch Kugelgelenke verbunden sind, ist dagegen kinetisch unbestimmt und erfordert zu ihrer Behandlung zusätzliche Gleichungen.

Im Schrifttum finden sich viele verschiedenartige Formen der allgemeinen Bewegungsgleichungen für Mehrkörpersysteme. Sie unterscheiden sich oft nur in der formalen Schreibweise oder in der mehr oder weniger weit durchgeführten Aufbereitung der Teilgleichungen für das Durchrechnen konkreter Probleme mit Hilfe elektronischer Rechenanlagen. Auch die Wahl der Bezugssysteme und Bezugspunkte hat Einfluß auf die Gestalt der Gleichungen. Es wäre jedoch wenig sinnvoll, hier auf Einzelheiten einzugehen. Interessenten seien auf das Schrifttum verwiesen.

4.2. *Die Stabilität partikulärer Bewegungsformen*

Aus den allgemeinen Bewegungsgleichungen lassen sich meist einige partikuläre Lösungen finden, deren zugehörige Bewegungsformen oft schon aus physikalischen Überlegungen erkannt werden können. Offen bleibt dabei jedoch die Frage nach der Stabilität dieser Bewegungsformen. Nun ist die Stabilitätstheorie bekanntlich im Laufe der letzten Jahrzehnte Gegenstand vielseitiger Untersuchungen, aber auch Tummelplatz kontroverser Auffassungen gewesen. Die Geister scheiden sich oft schon bei der Fixierung des Stabilitätsbegriffs: Ob asymptotische, *Ljapunov*sche, totale, globale, energetische, dynamische, temporäre Stabilität oder was sonst noch für eine Art gemeint ist, bietet ausreichend Stoff für hitzige Diskussionen. Glücklicherweise treten derartige Fragen meist in den Hintergrund, wenn man komplizierter Mehrkörpersysteme zu untersuchen hat. Dabei kann man nämlich froh sein, wenn für die linearisierten Störungsgleichungen die klassische asymptotische Stabilität nachgewiesen werden kann. Hierfür gibt es inzwischen bewährte Rechenprogramme, die für die Ausrechnung konkreter Fälle sehr nützlich sind.

Neben den quantitativen Methoden haben sich im Lauf der letzten Jahre aber auch qualitative Verfahren bewährt. Sie gestatten oft schon aus der allgemeinen Struktur der Bewegungsgleichungen Schlüsse über Stabilität oder Instabilität bzw. über die Möglichkeit von Stabilisierungen zu ziehen. Dabei geht man von den linearisierten Störungsgleichungen, d.h. von den Gleichungen für die Nachbarbewegungen zu einer bekannten Gleichgewichtslage oder stationären Bewegungsform, aus. Diese Gleichungen können stets in der Matrizenform

$$(7) \qquad M\ddot{x} + (D+G)\dot{x} + (K+N)x = 0$$

geschrieben werden. Darin ist x der n-dimensionale "Vektor" der Lageabweichungen, M ist die stets symmetrische Massenmatrix, D die symmetrische Dämpfungsmatrix, G die schiefsymmetrische Matrix der gyroskopischen Kräfte, K die symmetrische Matrix der konservativen und N die schiefsymmetrische Matrix der nichtkonservativen Rückstellkräfte. Mit den symmetrischen Matrizen können drei wichtige quadratische Formen gebildet werden:

$$(8)\begin{cases}\text{die kinetische Energie} & T = \frac{1}{2}\dot{x}^T M \dot{x}\,,\\ \text{die } \textit{Rayleigh}\text{sche Funktion} & R = \frac{1}{2}\dot{x}^T D \dot{x}\,,\\ \text{die potentielle Energie} & V = \frac{1}{2}x^T K x\,.\end{cases}$$

Für die Beurteilung der Stabilität der Lösungen von (7) ist es von entscheidender Bedeutung, ob diese quadratischen Formen definit, indefinit oder semidefinit sind. So existieren zur Zeit etwa zwei Dutzend Sätze, mit deren Hilfe aus den Eigenschaften von T, R und V Aussagen über vorhandene oder mögliche Stabilität oder Instabilität der Lösungen (7) gewonnen werden können. Ein typisches Beispiel für diese Art von Sätzen ist der klassische Stabilitätssatz von *Thomson* und *Tait*. Er besagt, daß die Gleichgewichtslage eines statisch instabilen konservativen Systems (d.h. $D \equiv 0$, $N \equiv 0$) nur dann durch Kreiselkräfte (d.h. $G \not\equiv 0$) stabilisiert werden kann, wenn eine gerade Anzahl instabiler Freiheitsgrade vorhanden ist. Jedes Hinzutreten von Dämpfungskräften ($D \not\equiv 0$) macht jedoch, wie von *Četaev* bewiesen wurde, die Stabilisierung wieder hinfällig. Da in realen Systemen aber stets Dämpfung vorhanden ist, hängt die Stabilität eines derartigen Systems mit $N \equiv 0$ letztlich nur noch von der positiven Definitheit der potentiellen Energie V, also von der statischen Stabilität der Gleichgewichtslage des Systems ab. Dieses schon länger bekannte Beispiel zeigt, daß letztlich das von *Thomson* und *Tait* betrachtete konservative System kein für reale Systeme zulässiges Ersatzmodell ist. Das ist besonders bemerkenswert. Es zeigt sich nämlich, daß hierbei kein stetiger Übergang vom Verhalten eines Systems mit kleiner Dämpfung zu einem System ohne Dämpfung vorhanden ist. Für Kenner der *Prandtl*schen Grenzschichttheorie ist eine derartige Erkenntnis nicht unbedingt überraschend, denn auch die Strömungen von Fluiden mit sehr kleiner Reibung sind qualitativ von denen reibungsloser Fluide verschieden. Vielleicht hätten die Stereokinetiker intensiver *Prandtl* studieren sollen, dann hätten sie diese Zusammenhänge früher erkannt. So ist es *H. Ziegler* [8] zu verdanken, daß er den Versuch gemacht hat, diese Erkenntnisse allgemein auszusprechen. Durch Auswertung sehr verschiedenartiger Beispiele kommt er zu dem Ergebnis, daß bei der Untersuchung von Stabilitätsproblemen alle physikalisch möglichen Spureneffekte berücksichtigt werden müssen. Zu diesen häufig vernachlässigten Spureneffekten gehören in mechanischen Systemen außer geringfügigen inneren und äußeren Dämpfungen z.B. auch Massen von Teilsystemen, die wegen ihrer Kleinheit oft vernachlässigt werden. In der Wirklichkeit existieren ja masselose Stangen oder reibungsfreie Gelenke nicht. Jeder schwingende elastische Körper besitzt innere Dämpfung, und bei elektrischen Systemen sind stets auch Spuren von Induktivitäten, Kapazitäten oder Widerständen dort vorhanden, wo man sie oft vernachlässigt.

Die *Ziegler*sche Erkenntnis ist ernüchternd. Sie provoziert die Frage, ob denn nun bei Stabilitätsuntersuchungen wirklich nichts mehr vernachlässigt werden darf. Die Folge wäre doch, daß Stabilitätsuntersuchungen an realen Systemen hoffnungslos kompliziert würden. Glücklicherweise ist dies nicht der Fall. Man hat - nach *Ziegler* - nur darauf zu achten, daß die bei Stabilitätsuntersuchungen verwendeten Ersatzmodelle "zulässig" sind. Zulässig aber bedeutet, daß die quadratischen Formen T, R und V für das Ersatzmodell dieselben Eigenschaften - also Definitheit, Indefinitheit oder Semidefinitheit - besitzen wie die entsprechenden Ausdrücke für das vollständige Ausgangssystem. Jede Stabilitätsuntersuchung komplizierter dynamischer Systeme muß demnach durch eine Prüfung des vorgesehenen Ersatzmodells auf Zulässigkeit ergänzt werden.

Viele Kinetiker werden diese Ergebnisse als enttäuschend empfinden. Schließlich wurde eine neue Hürde aufgezeigt, die es zu überwinden gilt. Gewissermaßen zum Trost mag deshalb erwähnt sein, daß alle diese Ergebnisse auf dem Begriff der asymptotischen Stabilität basieren. Er beschreibt das Verhalten eines Systems für $t \to \infty$. Gerade deshalb aber führt er häufig zu unnötig harten Forderungen, insbesondere bei solchen Systemen, bei denen nur eine zeitlich begrenzte Arbeitsdauer interessiert. Was kümmert es das mit einem Kreisel spielende Kind, wenn ihm ein Gelehrter, gestützt auf Autoritäten wie *Thomson, Tait, Četaev, Ziegler* u.a., nachweist, daß eben dieser schön tanzende Kreisel instabil ist und deshalb irgendwann schließlich umfallen wird. Dem Kind genügt es, wenn der Kreisel nur in der endlichen Zeitdauer zwischen zwei Peitschenschlägen weitertanzt. Ähnliche Fragestellungen treten aber durchaus auch in der Technik, z.B. bei Satelliten mit begrenzter Funktionsdauer, auf. Man kann sich in solchen Fällen oft dadurch helfen, daß nicht die Stabilität allgemein, sondern der Stabilitätsgrad untersucht wird.

Bei einigen der zuvor erwähnten globalen Sätze zum Stabilitätsverhalten linearer Systeme wird als notwendige Voraussetzung die positive Definitheit der *Rayleigh*schen Funktion R nach (8) verlangt. Das bedeutet physikalisch, daß die Bewegung eines Systems in allen Freiheitsgraden gedämpft sein muß und keine ungedämpften Teilschwingungen auftreten. Nun bietet aber gerade die Raumfahrt Beispiele dafür, daß wegen der extremen Bedingungen im Weltraum gewisse Teilkoordinaten praktisch ungedämpft sind. In derartigen Fällen wird die *Rayleigh*funktion semidefinit. Es interessiert dann, ob man nicht trotzdem noch zu einem insgesamt gedämpften System kommen kann. Eine Antwort auf diese Frage ist *P.C. Müller* [9] zu verdanken. Er konnte zeigen, daß ein System nach (7) mit $N \equiv 0$ und positiv semidefiniter *Rayleigh*funktion R stets dann asymptotisch stabil ist, wenn das System

$$(9) \qquad M \ddot{x} + G \dot{x} + K x = D u$$

vollständig steuerbar im Sinne der Regelungstheorie ist. Die Größe u fungiert dabei als Stellvektor, durch den das zu regelnde System beeinflußt wird. Ein System wird als vollständig steuerbar bezeichnet, wenn jeder zulässige Zustand - gegeben durch ein Wertepaar x, $\dot{x}$ - in endlicher Zeit von jedem anderen zulässigen Zustand aus erreicht werden kann. Man bezeichnet eine Dämpfung, die dieser Bedingung genügt, als "durchdringend". So wie die vollständige Steuerbarkeit das Durchdringen der Steuerimpulse zu allen Freiheitsgraden des Systems verlangt, so muß die Dämpfung zu allen Bewegungsformen des Systems durchdringen, wenn insgesamt asymptotische Stabilität vorhanden sein soll.

Auf die zahlreichen Arbeiten zur Frage der Auswirkung nichtkonservativer Lagekräfte auf das Bewegungsverhalten von Systemen kann ich hier nicht eingehen und möchte nur erwähnen, daß wichtige Ergebnisse hierzu *H. Ziegler* [10], *M. Frik* [11] und *P.C. Müller* [12] zu verdanken sind.

Auch das Problem der aktiven Dämpfung sowie die damit zusammenhängenden Fragen der Optimierung des Bewegungsverhaltens von Mehrkörpersystemen muß ich hier ausklammern. Für lineare Systeme hat die Theorie der Optimierungen inzwischen einen hohen Grad von Vollkommenheit erreicht. Sie wurde durch Einführung des Begriffs "Optimalitätsgrad" - d.h. einer Art Wirkungsgrad der Optimierung - durch *W. Schiehlen* und *K. Popp* [13] um eine neue Fragestellung bereichert, die gerade für aktive Systeme interessant ist.

Die modernen Methoden der allgemeinen Systemtheorie, die zumindest zum Teil auch als Abfallprodukte der Raumfahrt angesehen werden können, sind im Lauf der letzten Jahre erfolgreich auf konkrete Probleme wie Satelliten und Raumfahrzeuge, schnellaufende Rotoren und Zentrifugen, Fahrzeuge und Getriebe angewendet worden.

4.3. *Spezielle Dämpfungseffekte*

Bei aller Freude über den inzwischen erreichten hohen Stand der Erkenntnisse auf dem Gebiet der Mehrkörpersysteme darf nicht verschwiegen werden, daß es immer noch wichtige Fragen gibt, für die bisher keine befriedigenden Antworten gefunden wurden. Lassen Sie mich das an zwei Beispielen erläutern, die sich beide auf Dämpfungs- oder Reibungsfragen beziehen.

Sie alle haben gehört, daß sich die ersten Satelliten, die durch Drall um die lange Achse, also die Achse des kleinsten Hauptträgheitsmoments, stabilisiert wurden, überraschenderweise überschlugen, so daß sie nach längerer Zeit nur noch um die kurze Achse, also die Achse des größten Hauptträgheitsmoments, rotierten. Als Ursache für diese Energieübertragung der Drehbewegung von der langen auf die kurze Achse wurde die innere Dämpfung des Satelliten erkannt. Wegen der Abwesenheit äußerer Momente im Weltraum bleibt der Drall des Satelliten erhalten, die Energie nimmt jedoch infolge der inneren Dämpfung ab. Also stellt sich der Satellit im Lauf der Zeit in einen solchen Zustand ein, daß bei gleichbleibendem Drall die Drehenergie ein Minimum ist. Das aber ist bei Drehungen um die Achse des größten Hauptträgheitsmoments der Fall. Eine Näherungstheorie dieses Effekts läßt sich mit der heuristischen Annahme aufstellen, daß die kinetische Energie des Systems nur abnehmen kann: $\dot{T} < 0$ (siehe z.B. [14]). Diese Theorie ergibt, daß - abweichend vom Verhalten des starren Körpers - auch Drehungen um die Achse des kleinsten Hautpträgheitsmoments instabil sind. Natürlich hat man versucht, den Mechanismus der Energieabnahme konkreter zu erfassen, indem man bewegte Teilmassen, elastische Elemente oder Fluide im Innern des Satelliten angenommen hat. Damit aber kommt man letztlich wieder auf Mehrkörpersysteme, wie sie zuvor besprochen worden sind.

Eigenartige Reibungseffekte sind auch an kardanisch gelagerten Kreiseln beobachtet und berechnet worden. Ich muß mir jedoch versagen, auf diese Dinge näher einzugehen, und möchte Ihnen statt dessen durch Versuche mit einem primitiven Einkörpersystem zeigen, daß sogar in diesem einfachen Fall noch Gedankenarbeit investiert werden muß, um die Phänomene völlig zu verstehen. Ich möchte Ihnen die sogenannten "Keltischen Wackelsteine" vorführen, die im klassischen englischen Schrifttum als "Celts" bezeichnet werden. Es handelt sich dabei um Steine, also starre Körper mit konvexer Oberfläche und unregelmäßiger Gestalt, die ein sehr merkwürdiges Stabilitätsverhalten zeigen: Wenn man die auf horizontaler Unterlage liegenden Steine um die vertikale Achse in Drehung versetzt, dann stellt man fest, daß die Stabilität dieser Drehung seltsamerweise vom Drehsinn abhängt. Es gibt Steine, die rechtsdrehend stabil und linksdrehend instabil sind - und umgekehrt. Man kann nachweisen, daß diese Effekte stets dann auftreten, wenn die Trägheitshauptachsen der Steine nicht mit den Hauptkrümmungsrichtungen der Oberfläche am Auflagepunkt übereinstimmen. Bei den hier vorgeführten Modellen wurde dies durch Anbringen von kleinen Bleigewichten erreicht. Man kann weiter zeigen, daß der Effekt bei völlig glatter Unterlage nicht auftritt. Dagegen läßt er sich für den anderen Grenzfall einer rauhen Unterlage, also bei reinem Rollen, qualitativ aus den Bewegungsgleichungen bestätigen. Die wirklichen Reibungsverhältnisse zwischen Stein und Unterlage liegen mit Sicherheit zwischen den beiden Extremen. Dafür aber ist bis heute noch keine völlig befriedigende Theorie gelungen. Untersuchungen, die in letzter Zeit darüber angestellt worden sind [15], deuten darauf hin, daß auch hier Spureneffekte bezüglich der kleinen Reibung vorhanden sind, wie sie ähnlich von *Ziegler* beschrieben wurden.

5. ABSCHLIESSENDES

Vielleicht werden Sie dieses primitive Beispiel belächeln, da wir uns doch hier mit komplizierten theoretischen Problemen von Mehrkörpersystemen beschäftigt haben. Aber können wir denn sicher sein, daß die Reibungs- und Dämpfungsverhältnisse bei Satelliten oder kompliziert gelagerten Rotoren einfacher sein werden? Die Spielerei mit den Wackelsteinen scheint mir geeignet zu sein, vor allzu großem Stolz zu warnen, Stolz darüber, wie wir es doch so herrlich weit gebracht. Und ich bin fest davon überzeugt, daß *Ludwig Prandtl*, säße er jetzt hier unter uns, meine Absicht verstehen und mir verzeihen würde. Zu meiner Rechtfertigung darf ich *Theodor von Kármán* zitieren, der in seinem Buche "Die Wirbelstraße" [16] über *Prandtl* folgendes schreibt:

"*Prandtl* war ein Mann voll merkwürdiger Kontraste: ein anspruchsvoller und begabter Wissenschaftler und ein großartiger Lehrer auf einer persönlichen Basis und dabei doch so naiv und kindlich in seinem Benehmen. Er konnte zum Beispiel in einem Laden nicht an einem Spielzeug vorbeigehen, ohne es neugierig zu betasten, und einfache Zaubertricks konnten ihn fesseln.

Bei einer Gesellschaft wollten die Gäste einmal zum Spaß *Prandtls* bekannte Vorliebe für Spielzeuge auf die Probe stellen. In einer Ecke des Zimmers stellte jemand einen Kinderkreisel so auf, daß er gleich ins Auge fiel. Alle warteten auf *Prandtls* Ankunft, um zu sehen, ob der Professor die Erwartungen erfüllen und direkt auf das Spielzeug zugehen würde. Er enttäuschte sie nicht. Als er das Zimmer betrat und den Kreisel sah, hatte er kein Interesse mehr für irgend etwas oder irgend jemanden in dem Zimmer. Es dauerte fast eine halbe Stunde, bis er merkte, daß sich die Gäste um ihn geschart hatten und alle sich an *Prandtls* kindlicher Versunkenheit weideten."

Übrigens ist mir selbst ein anderes Beispiel noch in lebhafter Erinnerung für diese Fähigkeit *Prandtls*, sich völlig Experimenten hinzugeben, und seien es auch Gedankenexperimente. Und da ich bisher diese Episode in den an verschiedenen Stellen niedergelegten Erinnerungen an *Ludwig Prandtl* nirgends erwähnt gefunden habe, möchte ich sie gern berichten: Es geschah in einer Vorlesung über "Ausgewählte Kapitel der Strömungslehre" etwa um 1936, daß *Prandtl*, wie häufig, während des Vortrags von einem plötzlichen Einfall bedrängt, an der Tafel mehr oder weniger laut zu denken anfing und ständig schreibend den Gedankenblitz zu fixieren versuchte. Er war ganz der Tafel zugewandt und steigerte sich dabei in immer flüchtiger hingeworfene Zwischenrechnungen. Kreide und Lappen traten etwa gleichberechtigt in Funktion. Als es schließlich gar nicht so, wie vielleicht erhofft, klappen wollte, strich *Prandtl* plötzlich mit deutlichen Zeichen der Ungeduld das zuletzt Hingeschriebene mit dicken Strichen kreuzweis durch und begleitete diese energische Geste mit einem ärgerlichen "Ach Quatsch". Danach: absolute Stille im Hörsaal. Jetzt erst schien er sich zu erinnern, daß auch noch Hörer anwesend waren. Langsam - wie ein auf verbotener Tat ertappter Bub - drehte er sich zu uns um, sah uns etwas betroffen an und sagte leise: "Entschuldigen Sie bitte das Wort 'Quatsch'." Nach einigen Umschaltsekunden ging die Vorlesung dann normal weiter.

Mit diesen nichtfachlichen Bemerkungen hoffe ich meine Spielerei mit den Wackelsteinen ausreichend begründet zu haben. Mir kam es auch darauf an, den Eindruck zu vermeiden, daß bei den Mehrkörpersystemen im Zeitalter der Großrechenanlagen alles nur noch Routine sei. Im Gegenteil, gerade moderne Probleme der Raumfahrt haben hier Lücken aufgezeigt, die es noch zu füllen gilt. Das simple Beispiel mit den Wackelsteinen sollte vielleicht auch verdeutlichen, daß wir, um dabei voranzukommen, neben solidem fachlichen Handwerkszeug noch zweierlei brauchen können: Neugier und Bescheidenheit - beides Eigenschaften, die uns *Ludwig Prandtl* in so liebenswert-menschlicher Weise vorgelebt hat.

6. SCHRIFTTUM

[1] *L. Prandtl:* Gesammelte Abhandlungen zur angewandten Mechanik, Hydro- und Aerodynamik, Teil 1 - 3. Herausgegeben von *W. Tollmien, H. Schlichting* und *H. Görtler*. Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1961.

[2] *F. Pfeiffer:* Experimente mit dem Prandtlschen Kreiselapparat. Z. Math. Phys. 60 (1912), S. 337-354.

[3] *K. Magnus:* Die Stabilität permanenter Drehungen des astatischen Kardankreisels mit unsymmetrischem Rotor. Acta Mechanica 2 (1966), S. 130-143.

[4] *J. Wittenburg:* Beiträge zur Dynamik von Gyrostaten. Habilitationsschrift TU Hannover (1972).

[5] *K. Magnus:* Kreisel. Theorie und Anwendungen. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1971.

[6] *R.E. Roberson* und *J. Wittenburg:* A dynamical formalism for an arbitrary number of interconnected rigid bodies, with reference to the problem of satellite attitude control. Proc. 3rd Congress International Federation Automatic Control, London 1966.

[7] *F.W. Ossenberg-Franzes:* Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen unter Berücksichtigung translatorischer und rotatorischer Differenzbewegungen. Dissertation TU München (1972).

[8] *H. Ziegler:* Trace effects in stability. In: *H. Leipholz* (Herausgeber): Instability of Continuous Systems. IUTAM Symposium Herrenalb 1969. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1971, S. 96-111.

[9] *P.C. Müller:* Asymptotische Stabilität von linearen mechanischen Systemen mit positiv semidefiniter Dämpfungsmatrix. Z. angew. Math. Mech. 51 (1971), S. T 197 - T 198.

[10] *H. Ziegler:* Linear elastic stability. Z. angew. Math. Phys. 4 (1953), S. 89-121.

[11] *M. Frik:* Zur Stabilität nichtkonservativer linearer Systeme. Z. angew. Math. Mech. 52 (1972), S. T 47 - T 49.

[12] *P.C. Müller:* Verallgemeinerung des Stabilitätssatzes von Thomson-Tait-Četaev auf mechanische Systeme mit scheinbar nichtkonservativen Lagekräften. Z. angew. Math. Mech. 52 (1972), S. T 65 - T 67.

[13] *W. Schiehlen* und *K. Popp:* Optimalitätsuntersuchungen mechanischer Systeme. Bericht aus dem Institut B für Mechanik der TU München (1972).

[14] *P.W. Likins, G.T. Tseng, D.L. Mingori:* Stable limit cycles due to nonlinear damping in dual-spin spacecraft. J. Spacecraft 8 (1971), S. 568-574.

[15] *K. Magnus:* Die Stabilität der Drehbewegungen eines unsymmetrischen Körpers auf horizontaler Unterlage. Aus Theorie und Praxis der Ingenieurwissenschaften, Szabó-Festschrift. Ernst, Berlin 1971, S. 19-23.

[16] *Th. von Kármán:* Die Wirbelstraße. Mein Leben für die Luftfahrt. Hoffmann & Campe Verlag, Hamburg 1968.

Ü b e r s i c h t

Es wird über neuere Ergebnisse der allgemeinen Theorie von Mehrkörpersystemen sowie über die sich daraus ergebenden Problemstellungen berichtet. Am Beispiel des *Prandtl*-Rades wird gezeigt, daß die auch für Satelliten wichtige Frage der Stabilität von Drehungen um die Hauptachse erheblich vielseitigere Lösungen zuläßt, als dies von dem einzelnen starren Körper her bekannt ist. Das Beispiel des Gyrostaten wird dazu verwendet, den Übergang vom Einzelkörper zum Zweikörpersystem zu verfolgen. Dazu werden die Veränderungen von Polkurven auf dem Energie-Ellipsoid in Abhängigkeit vom Drall des Gyrostatenrotors betrachtet. Bei allgemeinen Mehrkörpersystemen interessieren Fragen der Bewegungsgleichungen, der Stabilität von Lösungen, der passiven und aktiven Dämpfung sowie der Optimierungen, sowohl als Parameter- wie als Struktur-Optimierungen. In der Stabilitätstheorie haben qualitative Methoden an Bedeutung gewonnen. Obwohl auf den genannten Gebieten vieles erarbeitet und erreicht worden ist, sind noch mehr Probleme aufgeworden worden und warten auf Lösung. Als durchsichtiges Beispiel für ein noch nicht völlig beherrschtes Problem wird das Verhalten der "Keltischen Wackelsteine" erwähnt.

S u m m a r y

New results in the field of a general theory of multibody systems are presented and some relating problems are discussed. Using the *Prandtl* wheel it is shown that the problem of the stability of rotations about the principal axis, which is also important for satellites, admits considerably more types of solutions, than the well-known single rigid body. The example of the gyrostat is used to show the transition from a single body to a two-body system. For this purpose the changes of pole curves on the energy ellipsoid are considered as a function of the rotational speed of the gyrostat rotor. In the case of general multibody systems, problems of the equations of motion, of the stability of solutions, of passive and active damping and of optimizations, as well parameter as structure optimizations, are of interest. Though plenty of results have been achieved in the mentioned fields, still more problems have been detected and wait for solutions. As an example for a problem not yet fully theoretically understood the behaviour of the "Celtic rocking stones" is mentioned.

Résumé

L'étude concerne les résultats récents de la théorie générale des systémes à corps multiples attelés élastiquement ainsi que les problèmes qui en résultent. On démontre à l'aide de l'exemple de la roue *Prandtl* que le problème de la stabilité des rotations autour des axes principaux, qui est également important pour les satellites, permet des solutions considérablement plus complexes que celles relatives au corps unique rigide connues jusqu'à ce jour. A titre d'exemple, on utilise le gyrostat pour observer la transposition de la solution du corps unique au système à deux corps. A cet effet, on tient compte des variations des courbes polaires sur l'ellipsoide d'energie en fonction du moment cinétique du rotor du gyrostat. Dans le cas des systèmes à corps multiples on s'intéresse aux problèmes concernant les équations de mouvement, à la stabilité des solutions de ces équations, aux amortissements passifs et actifs ainsi qu'à leur optimisation, tant en ce qui concerne les paramètres que les structures. Dans la théorie de la stabilité, les méthodes qualitatives ont pris de l'importance bien qu'on ait obtenu de bons résultats grâce aux travaux effectués sur les sujets mentionnés; plusieurs autres problèmes se sont présentés et attendent leur solution. Pour un problème non encore entièrement résolu on cite en exemple frappant le comportement des "Pierres oscillantes celtiques".