

Beiträge zur Kinetik des Kurvenkreisels *

Von K. Magnus

Übersicht: Für den an einer materiellen Kurve entlang geführten Kurvenkreisel werden die zur Berechnung notwendigen Ausgangsgleichungen zusammengestellt, und es wird gezeigt, wie das Verhalten in den Bewegungsphasen Rollen, Gleiten und freie Nutation ermittelt werden kann. Dabei werden angekoppelte Zusatzmassen sowie die Veränderlichkeit der Eigendrehung des Kreisels berücksichtigt. An einfachen Beispielen von Führungskurven werden die möglichen Erscheinungen demonstriert. Bemerkenswert ist dabei, daß die Kriterien für das Auftreten einer Gleitphase oder einer freien Nutation nicht von der Schnelligkeit der Kreiseldrehung, also auch nicht von der Geschwindigkeit der Führungsbewegung abhängen. Bei Bewegungsphasen mit freier Nutation treten stets auch Stöße auf, die mit den angegebenen Gleichungen berechnet werden können.

Summary: The equations for the behaviour of a tracking-gyro are stated, and it is shown how to determine the different modes of motion: rolling, sliding and free nutational motion. Additional masses coupled to the gyro as well as variations of rotational speed are taken into account. For some simple examples of tracking curves the possible effects of motion are demonstrated. A remarkable result is the fact that the criteria for either sliding motion or free nutational motion do not depend on the gyros rotational speed, and consequently not on the speed of the tracking motion. In cases with free-motion modes shocks always occur which can be calculated from the given equations.

1. Einführendes

Der Kurvenkreisel ist ein Spielkreisel, dessen verlängerte Achse an einer materiell ausgeführten Kurve abrollt. Die dabei auftretenden Kreiselmomente pressen die Achse gegen die Kurve, so daß die Achse fast beliebigen Krümmungen der Kurve zu folgen vermag. Im klassischen Kreiselschrifttum [z. B. 1, 2, 3] wird der Kurvenkreisel meist nur als Kuriosität erwähnt. Sein Verhalten wird zwar an Hand der Formel für das Kreiselmoment gedeutet, jedoch sind kaum genauere Analysen durchgeführt worden. Als wesentliches Ergebnis einer Theorie des einfachen, aus einem rotationssymmetrischen starren Körper bestehenden Kurvenkreisels findet man [4]: ein abgeplatteter Kreisel kann beim Abrollen beliebig gekrümmten Kurven, sogar scharfen Ecken der Führungskurve folgen, ohne daß die Achse den Kontakt zur Kurve verliert; ein gestreckter Kreisel kann beim Umlaufen von Ecken vorübergehend den Kontakt verlieren, läuft aber nach einem mehr oder weniger großen Nutationsbogen wieder an der Führungskurve weiter.

Vor kurzem wurden nun von Mansour und Pavlov [5] einige technische Anwendungen des Kurvenkreisels vorgeschlagen. Es wurde zugleich eine Theorie der verschiedenen möglichen Bewegungsformen sowie eine Computer-Analyse für einige spezielle Führungskurven gegeben. Neu gegenüber früheren Untersuchungen sind dabei vor allem zwei Punkte: der Kreisel wird als kardanisches Lager angenommen, so daß die Trägheit der Rahmen berücksichtigt werden kann; außerdem wird neben dem Rollen der Achse an der Kurve auch ein Gleiten oder vorübergehendes Verlassen der Kurve, d. h. freie Nutationsbewegung, zugelassen. Es bleiben jedoch noch wichtige Fragen offen, so daß eine genauere Untersuchung sinnvoll erscheint. Deshalb soll im folgenden eine Ergänzung sowie eine Präzisierung der Theorie in einigen Detailfragen gegeben werden. Dabei soll vor allem die Annahme einer konstanten Absolutdrehgeschwindigkeit des Kreisels um seine Symmetrieachse fallen gelassen werden, da sie wenig realistisch ist. Außerdem soll hier der Versuch gemacht werden, das physikalische Geschehen durch Betrachten spezieller Einzelfälle durchsichtiger und damit verständlicher zu machen, als dies mit Hilfe von elektronisch berechneten Lösungskurven für allgemeinere Fälle möglich ist. Insbesondere sollen dabei die Übergänge zwischen den Bewegungsformen Rollen, Gleiten und freie Nutation an Beispielen gezeigt werden.

* Eduard Pestel zum sechzigsten Geburtstag gewidmet.

2. Ausgangsbeziehungen für eine allgemeine Theorie

Hier sollen zunächst die theoretischen Unterlagen zusammengestellt und der Weg für die Auswertung aufgezeigt werden. Konkrete Beispiele werden anschließend in Kap. 3 behandelt.

2.1 Grundannahmen und Bezeichnungen

Es soll ein kardanisch gelagerter Kreisel mit symmetrischem Rotor betrachtet werden, dessen verlängerte Rotorachse mit einer starren Kurve in Kontakt sein kann (Abb. 1). Zum Beschreiben der Bewegungen werden die Kardanwinkel α , β , γ verwendet, die die Relativdre-

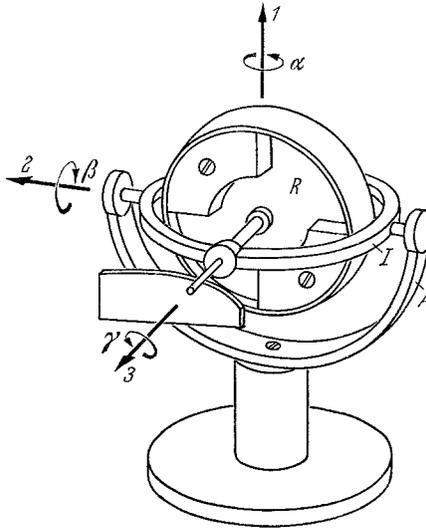


Abb. 1. Kardanisch gelagerter Kurvenkreisel

hungen des Außenrahmens (Index A) gegenüber dem Gestell, des Innenrahmens (Index I) gegenüber dem Außenrahmen und des Rotors (Index R) gegenüber dem Innenrahmen angeben. Es wird angenommen, daß die Trägheits-Hauptachsen von Außenrahmen, Innenrahmen und Rotor in der Normalstellung ($\beta = 0$) zusammenfallen. Die Hauptträgheitsmomente werden mit $A^R = B^R, C^R$; A^I, B^I, C^I ; A^A bezeichnet. Der Kreisel wird als astatisch angenommen, d. h. der Schwerpunkt soll mit dem gemeinsamen Schnittpunkt von Rotor- und Rahmenachsen (Fixpunkt) zusammenfallen. Lagerreibungen werden vernachlässigt.

Die Führungskurve wird als räumlich feststehend betrachtet. Ihre Projektion auf eine Kugel um den Kreiselfixpunkt werde durch

$$f(\alpha, \beta) = 0 \quad (1)$$

beschrieben. Im weiteren wird angenommen, daß alle Punkte der Führungskurve den konstanten Abstand s vom Fixpunkt haben. Bei Kurven, die dieser Bedingung nicht genügen, ergeben sich keine prinzipiellen Schwierigkeiten; es sind lediglich kompliziertere geometrische Beziehungen zu berücksichtigen.

2.2 Kinetische Gleichungen

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen werden die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (q_i = a, \alpha, \beta, \gamma) \quad (2)$$

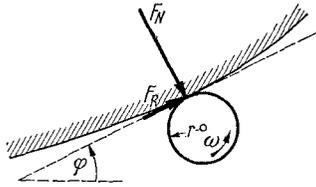


Abb. 2. Abrollen des Stiftes an der Führungskurve

verwendet, in denen sich die verallgemeinerten Kräfte Q_i aus den Komponenten F_N (Normalkraft) und F_R (Reibkraft) der Kontaktkraft zwischen Stift (verlängerte Kreiselachse) und Führungskurve wie folgt ergeben (s. Abb. 2);

$$\left. \begin{aligned} Q_\alpha &= (F_N \sin \varphi + F_R \cos \varphi) s \cos \beta, \\ Q_\beta &= (-F_N \cos \varphi + F_R \sin \varphi) s, \\ Q_\gamma &= -rF_R. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Darin ist φ der Neigungswinkel der Kurve, auf der die Stiftmitte geführt wird. Mit der kinetischen Energie

$$T = \frac{1}{2} \{ \dot{\alpha}^2 [A \cos^2 \beta + (A^A + C^I) \sin^2 \beta] + \dot{\beta}^2 B + \omega^2 C^R \}. \quad (4)$$

wobei

$$\omega = \omega_3^R = \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta \quad (5)$$

die Absolutdrehung des Rotors um seine Symmetrieachse ist, und außerdem die Abkürzungen

$$A = A^R + A^I + A^A, \quad B = B^R + B^I \quad (6)$$

eingeführt wurden, erhält man aus (2) die Bewegungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\alpha} [A \cos^2 \beta + (A^A + C^I) \sin^2 \beta] - \dot{\alpha} \dot{\beta} \cdot 2 \sin \beta \cos \beta (A^R + A^I - C^I) + \\ + \dot{\beta} \cdot C^R \omega \cos \beta + \dot{\omega} C^R \sin \beta = Q_\alpha, \\ \ddot{\beta} B + \dot{\alpha}^2 \cdot \sin \beta \cos \beta (A^R + A^I - C^I) - \dot{\alpha} \cdot C^R \omega \cos \beta = Q_\beta, \\ \dot{\omega} C^R = Q_\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Diese Gleichungen reichen bereits aus, die freien Nutationen des Kreisels auszurechnen, bei denen kein Kontakt zwischen Stift und Führungskurve vorhanden ist ($F_N = F_R = 0, Q_\alpha = Q_\beta = Q_\gamma = 0$). Für Bewegungszustände, bei denen der Stift die Führungskurve berührt, müssen weitere kinematische Beziehungen berücksichtigt werden.

2.3 Kinematische Gleichungen

Bei gegebener Funktion $f(\alpha, \beta)$ von (1), durch die die Führungskurve für die Stiftmitte bezeichnet werden soll, findet man für die Ableitung

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \alpha' = \frac{\partial f / \partial \beta}{\partial f / \partial \alpha} \quad (8)$$

und daraus mit

$$v_\alpha = \dot{\alpha} s \cos \beta; \quad v_\beta = \dot{\beta} s \quad (9)$$

den Winkel φ aus

$$\tan \varphi = \frac{v_\beta}{v_\alpha} = \frac{\dot{\beta}}{\dot{\alpha} \cos \beta} = \frac{1}{\alpha' \cos \beta}. \quad (10)$$

Wenn Kontakt zwischen Stift und Führungskurve vorhanden ist, gilt stets

$$\dot{\alpha} = \alpha' \dot{\beta}. \quad (11)$$

Bei Abrollen des Stiftes gilt außerdem für die Geschwindigkeit der Stiftmitte $v = r\omega$, folglich

$$v_\alpha = r\omega \cos \varphi, \quad v_\beta = r\omega \sin \varphi.$$

Mit (9) und (10) folgt daraus

$$\dot{\alpha} = \frac{r\omega\alpha'}{s\sqrt{1 + \alpha'^2 \cos^2 \beta}}, \quad \dot{\beta} = \frac{r\omega}{s\sqrt{1 + \alpha'^2 \cos^2 \beta}}. \quad (12)$$

2.4 Bewegungen bei abrollendem Stift

Die bisher angegebenen Gleichungen müssen noch durch eine Reibungsbeziehung ergänzt werden. Bei abrollendem Stift gilt nach Coulomb

$$F_R \leq \mu F_N \quad (13)$$

mit dem Reibungsbeiwert μ .

Damit stehen ausreichend viele Beziehungen für die Berechnung der Bewegungen des Kurvenkreisels im Rollzustand zur Verfügung. Ihre Auswertung wird vor allem durch die Tatsache erschwert, daß die absolute Winkelgeschwindigkeit des Rotors ω wegen (7/3) nicht konstant bleibt, wenn $F_R \neq 0$ ist. Man geht deshalb zweckmäßigerweise so vor, daß das Glied mit $\dot{\omega}$ in (7/1) mit Hilfe von (7/3) und (3/3) eliminiert wird. Nach Einsetzen von (3) in (7) folgt dann

$$\left. \begin{aligned} L_1 &\equiv \ddot{\alpha} [A \cos^2 \beta + (A^A + C^I) \sin^2 \beta] - \dot{\alpha} \dot{\beta} \cdot 2 \sin \beta \cos \beta (A^R + A^I - C^I) + \dot{\beta} C^R \omega \cos \beta = \\ &= F_{Ns} \sin \varphi \cos \beta + F_R (s \cos \varphi \cos \beta + r \sin \beta), \\ L_2 &= \ddot{\beta} B + \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta (A^R + A^I - C^I) - \dot{\alpha} \cdot C^R \omega \cos \beta = -F_{Ns} \cos \varphi + F_{Rs} \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Dabei sind die linken Seiten abkürzend mit L_1 und L_2 bezeichnet worden. Die Auflösung von (14) nach den Kraftkomponenten ergibt:

$$F_N = \frac{1}{N} \left[L_1 \sin \varphi - L_2 \left(\cos \varphi \cos \beta + \frac{r}{s} \sin \beta \right) \right], \quad F_R = \frac{1}{N} [L_1 \cos \varphi + L_2 \sin \varphi \cos \beta]. \quad (15)$$

Der Gang der Auswertung dieser Beziehungen, der sich selbstverständlich auch als Computerprogramm formulieren läßt, ist folgender: Mit Anfangswerten für α, β, ω wird aus (8) α' und aus (10) φ berechnet. Damit folgen aus (12) die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\alpha}$ und $\dot{\beta}$, durch deren Integration dann neue Werte für α und β erhalten werden. In einer Rechenschleife werden damit neue Werte für $\dot{\alpha}$ und $\dot{\beta}$ und daraus $\ddot{\alpha}$ und $\ddot{\beta}$ berechnet. Jetzt können L_1 und L_2 aus (14) bestimmt und in (15) eingesetzt werden. Für die so erhaltenen Werte F_R und F_N wird geprüft, ob (13) erfüllt ist. Ist dies der Fall, dann befindet sich das System tatsächlich im Rollzustand. Ist dagegen für die nach (15) errechneten Werte $F_R > \mu F_N$, dann kann kein Rollen vorliegen. Die Rechnung muß dann unter der Annahme eines Gleitzustandes so durchgeführt werden, wie es in Kap. 2.5 beschrieben wird.

Schließlich muß noch aus (7.3) mit (3.3) die Größe $\dot{\omega}$ ausgerechnet werden. Durch Integration gewinnt man daraus einen neuen Anfangswert ω für den nächsten Rechenschritt.

Obwohl die hier zu verwendenden Gleichungen sehr kompliziert aufgebaut sind, ist das Auswerten für den Fall des Rollzustandes nicht schwierig, da keine Differentialgleichungen gelöst werden müssen. Schwieriger wird die Auswertung dagegen für den Bewegungszustand des Gleitens.

2.5 Bewegungen bei gleitendem Stift

Anstelle der Ungleichung (13) muß jetzt mit

$$F_R = \mu F_N = \tan \rho F_N \quad (16)$$

gerechnet werden, wobei hier kein Unterschied zwischen den Reibungsbeiwerten bei rollender und gleitender Bewegung gemacht werden soll. Es ist zweckmäßig, weiterhin den Reibungs-

winkel ϱ durch $\tan \varrho = \mu$ einzuführen. Damit läßt sich (3) wie folgt umformen:

$$\left. \begin{aligned} Q_\alpha &= \frac{1}{\cos \varrho} F_N s \cos \beta \sin (\varphi + \varrho), \\ Q_\beta &= -\frac{1}{\cos \varrho} F_N s \cos (\varphi + \varrho), \\ Q_\gamma &= -r\mu F_N. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Andererseits findet man aus (7) unter Berücksichtigung von (11)

$$\left. \begin{aligned} &\ddot{\beta} \alpha' [A \cos^2 \beta + (A^A + C^I) \sin^2 \beta] - \dot{\beta}^2 2\alpha' \sin \beta \cos \beta (A^R + A^I - C^I) + \dot{\beta} C^R \omega \cos \beta \\ = &Q_\alpha - Q_\gamma \sin \beta, \\ &\ddot{\beta} B + \dot{\beta} \alpha'^2 \sin \beta \cos \beta (A^R + A^I - C^I) - \dot{\beta} \alpha' C^R \omega \cos \beta = Q_\beta. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Mit (17) erhält man für die rechte Seite von (18/1):

$$Q_\alpha - Q_\gamma \sin \beta = -Q_\beta \left[\cos \beta \tan (\varphi + \varrho) + \frac{r\mu}{s} \frac{\sin \beta \cos \varrho}{\cos (\varphi + \varrho)} \right] = -KQ_\beta. \quad (19)$$

Einsetzen von (19) mit der Abkürzung K für den Ausdruck in eckigen Klammern und Elimination von Q_β ergibt aus (18) eine nichtlineare Differentialgleichung für β :

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} \{ \alpha' [A \cos^2 \beta + (A^A + C^I) \sin^2 \beta] + BK \} + \dot{\beta}^2 \alpha' \sin \beta \cos \beta (\alpha' K - 2) (A^A + A^I - C^I) + \\ + \dot{\beta} \cdot C^R \omega \cos \beta (1 - \alpha' K) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Da ω noch unbekannt ist, muß eine weitere Gleichung verwendet werden. Man findet sie z. B. aus (18/2) mit (17) und erhält nach Elimination von F_N :

$$\dot{\omega} = \frac{r\mu \cos \varrho}{C^R s \cos (\varphi + \varrho)} [B\ddot{\beta} + \dot{\beta}^2 \alpha'^2 \sin \beta \cos \beta (A^A + A^I - C^I) - \dot{\beta} \alpha' C^R \omega \cos \beta]. \quad (21)$$

Durch Auflösen des gekoppelten Systems der Differentialgleichungen (20) und (21) gewinnt man $\beta(t)$ und $\omega(t)$. Damit aber lassen sich die sonst noch interessierenden Größen, z. B. α aus (11) oder F_N aus (17/2) mit (18/2) durch Einsetzen bestimmen.

3. Spezielle Führungskurven

Die im folgenden zu behandelnden Spezialfälle sind so ausgesucht worden, daß die beim Kurvenkreisel möglichen Bewegungsformen an möglichst einfach zu berechnenden Beispielen gezeigt werden können. Für kompliziertere Führungskurven kann man durch Kombination der hier demonstrierten einfachen Fälle das zu erwartende Bewegungsverhalten oft schon qualitativ übersehen. Auf jeden Fall steht einer genaueren Analyse nach der in Kap. 2 beschriebenen Methode nichts im Wege.

3.1 Meridian- und Breitenkreise

Wird die Stiftmitte auf einen Meridian geführt, dann gilt: $\alpha = \text{const}$, $\dot{\alpha} = \ddot{\alpha} = 0$, $\varphi = \pi/2$. Im Rollzustand gilt $\dot{\beta} = r\omega/s$. Man kann nun zeigen, daß — richtige Anfangsbedingungen vorausgesetzt — $\omega = \text{const}$, und damit $\dot{\beta} = \text{const}$, also $\ddot{\beta} = 0$ eine Lösung der Grundgleichungen ergibt. Tatsächlich folgt damit aus (14)

$$L_1 = -\dot{\beta} C^R \omega \cos \beta, \quad L_2 = 0,$$

und aus (15)

$$F_N = \frac{r\omega^2 C^R}{s^2}, \quad F_R = 0. \quad (22)$$

Dieses Ergebnis ist unmittelbar einleuchtend; es sagt aus, daß das auf die Führungskurve ausgeübte Kreiselmoment sF_N gleich dem Produkt aus dem Drall $C^R\omega$ und der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\beta} = r\omega/s$ bei der Führungsbewegung ist.

Bei Führung auf einem Breitenkreis ist $\beta = \beta_0$, $\dot{\beta} = \ddot{\beta} = 0$, $\varphi = 0$. Hier gibt es eine Lösung mit $\dot{\alpha} = \text{const}$ und $\ddot{\alpha} = 0$. Aus $r\omega = \dot{\alpha}s \cos \beta$ findet man

$$\dot{\alpha} = \frac{r\omega}{s \cos \beta}. \quad (23)$$

Aus (14) folgt jetzt:

$$L_1 = 0, \quad L_2 = \dot{\alpha}^2 \sin \beta_0 \cos \beta_0 (A^R + A^I - C^I) - \dot{\alpha} C^R \omega \cos \beta_0.$$

Damit ergeben sich aus (15) mit (23) die Kräfte:

$$F_N = \frac{r\omega^2}{s^2} \left[C^R - \frac{r}{s} \tan \beta_0 (A^R + A^I - C^I) \right], \quad F_R = 0. \quad (24)$$

Mit $\beta_0 = 0$, d. h. bei Führung längs des Äquators folgt daraus wieder das Ergebnis (22). Die Formel (24) für F_N kann z. B. dazu verwendet werden, den optimalen Winkel β_0 für eine Kollermühle so zu bestimmen, daß ein maximaler Mahldruck erzeugt wird.

3.2 Schlitz in Äquatorrichtung

Es sei ein Schlitz in Richtung des Äquators (Abb. 3) angenommen, dessen Breite d den Durchmesser $2r$ des Stiftes nur wenig überschreitet:

$$d = 2(r + \varepsilon). \quad (25)$$

Die Stiftmitte bewegt sich dann im Bereich

$$-\beta_0 < \beta < \beta_0 \quad \text{mit} \quad \beta_0 = \frac{\varepsilon}{s} \ll 1. \quad (26)$$

Damit läßt sich die Berechnung vereinfachen, da man sich im Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ mit einer Berücksichtigung der Glieder mit den in ε niedrigsten Potenzen begnügen kann.

Der Bewegungszustand kann in die Abschnitte: Rollen längs der Geraden (oben oder unten) und Führung längs der Halbkreise vom Radius ε (für die Stiftmitte) an den Schlitzenden unterteilt werden. Für die Führung längs der Geraden kann das Ergebnis (22) unmittelbar übernommen werden. Die Umkehr der Bewegungsrichtung an den Schlitzenden bedarf jedoch einer genaueren Untersuchung (s. Abb. 4).

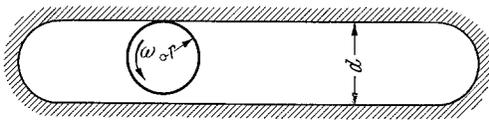


Abb. 3. Führung des Stiftes in einem Schlitz

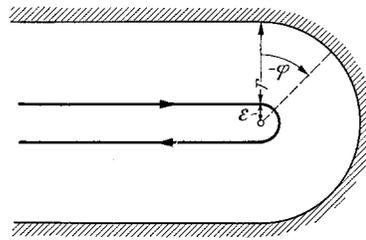


Abb. 4. Umlenken am Schlitzende

Unter der Annahme reinen Rollens bewegt sich die Stiftmitte in jedem Augenblick mit der Geschwindigkeit $v = r\omega$. Da andererseits $v = -\varepsilon\dot{\varphi}$ gilt, hat man

$$\dot{\varphi} = -\frac{r\omega}{\varepsilon}, \quad \varphi = -\frac{r}{\varepsilon} \int \omega dt, \quad \alpha = \alpha_0 - \frac{\varepsilon}{s} \sin \varphi, \quad \beta = \frac{\varepsilon}{s} \cos \varphi. \quad (27)$$

Wenn nun in erster Näherung $\omega = \omega_0 = \text{const}$ angenommen wird, dann wird

$$\alpha = \frac{r\omega}{s} \cos \frac{r\omega}{\varepsilon} t, \quad \ddot{\alpha} = -\frac{r^2\omega^2}{s\varepsilon} \sin \frac{r\omega}{\varepsilon} t, \quad \dot{\beta} = -\frac{r\omega}{s} \sin \frac{r\omega}{\varepsilon} t, \quad \ddot{\beta} = -\frac{r^2\omega^2}{s\varepsilon} \cos \frac{r\omega}{\varepsilon} t. \quad (28)$$

Berücksichtigt man weiterhin nur die Glieder mit der niedrigsten Potenz in ε , dann folgt aus (14)

$$L_1 \approx A\ddot{\alpha}, \quad L_2 \approx B\ddot{\beta} \quad (29)$$

und aus (15)

$$F_N = \frac{r^2\omega^2}{\varepsilon s^2} \left(A \sin^2 \frac{r\omega}{\varepsilon} t + B \cos^2 \frac{r\omega}{\varepsilon} t \right), \quad F_R = \frac{r^2\omega^2(B-A)}{\varepsilon s^2} \sin \frac{r\omega}{\varepsilon} t \cos \frac{r\omega}{\varepsilon} t. \quad (30)$$

Wegen $F_N > 0$ wird die Führungskurve nie verlassen. Die Reibungskraft F_R hat wechselndes Vorzeichen und ergibt für den gesamten Umkehrvorgang den Mittelwert Null. Reines Rollen vorausgesetzt wird der Stift also die Umlenkkurve mit der gleichen Geschwindigkeit verlassen, mit der er eingetreten ist. Jetzt bleibt zu prüfen, unter welchen Bedingungen die Annahme reinen Rollens zutrifft. Man erhält aus (30)

$$\frac{F_R}{F_N} = \frac{(A-B) \sin \varphi \cos \varphi}{A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi}. \quad (31)$$

Diese Funktion hat in dem hier interessierenden Bereich Nullstellen für $\varphi = 0, -\pi/2, -\pi$. Dazwischen liegen zwei Extremwerte bei

$$\cos 2\varphi = \frac{A-B}{A+B}$$

von der Größe

$$\left(\frac{F_R}{F_N} \right)_{\text{extr.}} = \frac{A-B}{2\sqrt{AB}}. \quad (32)$$

Danach ergibt sich als Bewegungszustand für

$$\frac{A-B}{2\sqrt{AB}} \begin{cases} < \mu: & \text{Rollen,} \\ > \mu: & \text{partielles Gleiten.} \end{cases} \quad (33)$$

Um die Annahme eines konstanten Wertes für ω zu überprüfen, soll die Schwankung $\Delta\omega$ während des Umlenkvorganges ausgerechnet werden. Mit (7/3), (3/3) und (30/2) findet man

$$\dot{\omega} = \frac{Q_\gamma}{C^R} = -\frac{r}{C^R} F_R = \frac{r^3\omega_0^2}{s^2\varepsilon} \frac{A-B}{C^R} \sin \frac{r\omega_0}{\varepsilon} t \cos \frac{r\omega_0}{\varepsilon} t.$$

Die Integration ergibt für die maximale Schwankung

$$\Delta\omega = \int_0^{\frac{\pi\varepsilon}{2r\omega_0}} \dot{\omega} dt = \frac{r^2\omega_0}{4s^2} \frac{A-B}{C^R},$$

also

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \left(\frac{r}{2s} \right)^2 \frac{A-B}{C^R}. \quad (34)$$

Da im allgemeinen $r \ll s$ ist, wird dieser Wert außerordentlich klein. Für ein wirklich ausgeführtes Modell betrug $r = 0,02$ s und $(A-B)/C^R = 0,25$, so daß dafür $\Delta\omega/\omega_0 = 2,5 \cdot 10^{-5}$ erhalten wird. Die Annahme $\omega = \omega_0$ erscheint damit gerechtfertigt. Es bereitet jedoch keine grundsätzlichen Schwierigkeiten, in einem weiteren Rechenschritt auch die Veränderlichkeit von ω mit zu berücksichtigen.

3.3 Schlitz in Meridianrichtung

Ganz entsprechend zu dem in Kap. 3.2 gezeigten Vorgehen kann das Bewegungsverhalten auch für einen in Meridianrichtung erstreckten Schlitz berechnet werden. Die rechnerische Durchführung wird nur dadurch umständlicher, weil die „Breitenkoordinate“ β_0 für den Mittelpunkt des Umkehr-Halbkreises berücksichtigt werden muß. Die Bewegung in diesem Halbkreis kann mit

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{r\omega}{\varepsilon} t, \quad \alpha = \alpha_0 - \frac{\varepsilon}{s} \cos \frac{r\omega}{\varepsilon} t, \quad \beta = \beta_0 + \frac{\varepsilon}{s} \sin \frac{r\omega}{\varepsilon} t \quad (35)$$

berechnet werden. Man erhält damit sowie mit der Abkürzung $r\omega/\varepsilon = \psi$ die Kraftkomponenten

$$\left. \begin{aligned} F_N &= \frac{r^2\omega^2 \left\{ [A \cos^2 \beta_0 + (A^A + CI) \sin^2 \beta_0] \cos^2 \psi + B \cos \beta_0 \sin^2 \psi + \frac{r}{s} B \sin \beta_0 \sin \psi \right\}}{\varepsilon s (s \cos \beta_0 + r \sin \beta_0 \sin \psi)}, \\ F_R &= \frac{r^2\omega^2 [A \cos^2 \beta_0 + (A^A + CI) \sin^2 \beta_0 - B \cos \beta_0] \sin \psi \cos \psi}{\varepsilon s (s \cos \beta_0 + r \sin \beta_0 \sin \psi)}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Die Erfüllung der Rollbedingung $F_R/F_N < \mu$ hängt jetzt nicht nur von den Trägheitsmomenten, sondern auch von β_0 ab. Sie kann in konkreten Fällen mit (36) leicht kontrolliert werden. Eine allgemeine Diskussion führt zu sehr unübersichtlichen Ausdrücken und soll hier nicht durchgeführt werden. Für $\beta_0 = 0$, also Umkehren am Äquator, geht (36) in (30) über, nur sind A und B dabei vertauscht.

3.4 Führung in einer 90°-Ecke

An diesem Beispiel (Abb. 5) läßt sich der Übergang vom Rollen zum Gleiten, der Gleitzustand sowie die Auswirkung der bei innerem Durchlaufen einer Ecke möglichen Stöße gut übersehen.

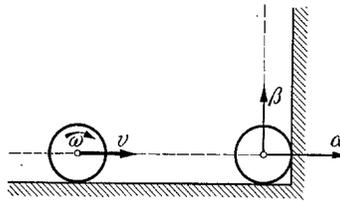


Abb. 5. Abrollen in einer Ecke

Die Ecke sei so gelegt, daß für die Stiftmitte beim Rollen längs des horizontalen Schenkels $\beta = 0$ gilt. Für die Geschwindigkeit in dieser ersten Phase gilt

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{r}{s} \omega_0, \quad \dot{\beta}_1 = 0. \quad (37)$$

Bei Anlaufen der Ecke erfolgt ein Stoß (Phase 2) derart, daß $\dot{\alpha}_2 = 0$ wird. Wegen der kurzen Zeit des Stoßes brauchen nur die Beschleunigungen berücksichtigt zu werden, so daß aus (14)

$$L_1 = A\ddot{\alpha}, \quad L_2 = B\ddot{\beta} \quad (38)$$

erhalten wird. Berücksichtigt man nun, daß der Stoß in Horizontalrichtung wegen der Drehung des Stiftes zugleich mit einem Reibungsstoß nach oben verbunden ist, dann folgt, daß während des Stoßes $\varphi = \pi/2$ gesetzt werden muß. Damit folgt aus (16)

$$F_N = \frac{A\ddot{\alpha}}{s}, \quad F_R = \frac{B\ddot{\beta}}{s}.$$

Die Integration über die Stoßzeit $\Delta t = t_2 - t_1$ ergibt

$$\int F_N dt = \frac{A}{s} (\dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1) = -\frac{A\dot{\alpha}_1}{s} = -\frac{Ar\omega_0}{s^2}, \quad \int F_R dt = \frac{B}{s} (\dot{\beta}_2 - \dot{\beta}_1) = \frac{B\dot{\beta}_2}{s}. \quad (39)$$

Während des Stoßes gleitet der Stift an der Führungskurve, so daß $F_R = \pm \mu F_N$ gilt. Man erhält dann

$$\int F_R dt = \mu |\int F_N dt|$$

und damit aus (39) mit (37)

$$\dot{\alpha}_2 = 0, \quad \dot{\beta}_2 = \frac{\mu Ar\omega_0}{Bs}. \quad (40)$$

Der Reibungsstoß führt zu einer Verringerung $\Delta\omega$ der Drehgeschwindigkeit, die aus

$$C^R \dot{\omega} = -rF_R$$

durch Integration und mit (39) und (40) zu

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\mu \left(\frac{r}{s}\right)^2 \frac{A}{C^R} \quad (41)$$

berechnet werden kann. Auch dieser Wert wird im allgemeinen — wie auch (34) — klein sein. Für die Drehgeschwindigkeit nach dem Stoß hat man $\omega_2 = \omega_0 - \Delta\omega$.

Unmittelbar nach dem Stoß wird als dritte Bewegungsphase im allgemeinen ein Gleiten stattfinden. Wenn nämlich $\dot{\beta}_2$ nach (40) kleiner als die Rollgeschwindigkeit

$$\dot{\beta}_{2r} = \frac{r}{s} \omega_2 \quad (42)$$

ist, dann muß das System durch die Reibungskräfte so lange beschleunigt werden ($\ddot{\beta} > 0$), bis ein Rollen des Stiftes möglich ist. Zur Berechnung dieser Gleitphase soll $\beta \ll 1$, also $\cos \beta \approx 1$ und $\sin \beta \approx \beta$ angenommen werden. Man erhält dann mit $\varphi = \pi/2$, $\alpha' = 0$ und $K \approx -1/\mu$ aus (20) die Differentialgleichung

$$B\ddot{\beta} - \mu C^R \omega_2 \dot{\beta} = 0. \quad (43)$$

Sie hat unter der Voraussetzung eines konstanten Wertes für ω — diese Annahme läßt sich wie zuvor auch zahlenmäßig überprüfen — in der dritten Bewegungsphase die Lösung

$$\dot{\beta}_3 = \dot{\beta}_2 e^{t/T_z} \quad (44)$$

mit der Zeitkonstanten

$$T_z = \frac{B}{\mu C^R \omega_2}. \quad (45)$$

Das Anwachsen der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\beta}_3$ dauert an, bis $\dot{\beta}_3 = \dot{\beta}_{2r}$ nach (42) geworden ist. Das ist nach der Zeit

$$t_3 = T_z \ln \frac{\dot{\beta}_{2r}}{\dot{\beta}_2} = \frac{B}{\mu C^R \omega_2} \ln \frac{B\omega_2}{\mu A\omega_0} \quad (46)$$

der Fall. Für $t > t_3$ rollt der Stift dann mit der Geschwindigkeit

$$\dot{\beta}_4 = \frac{r}{s} \omega_3 \approx \frac{r}{s} \omega_2$$

weiter. Insgesamt kann also der Bewegungsvorgang in die vier Phasen: 1. Rollen, 2. Stoß, 3. Gleiten, 4. Rollen zerlegt werden. Der Verlauf von $\dot{\alpha}$ und $\dot{\beta}$ hierfür ist in Abb. 6 skizziert.

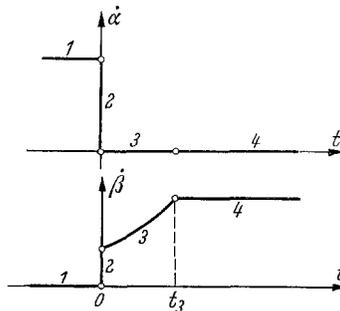


Abb. 6. Verlauf der Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\alpha}$ und $\dot{\beta}$ beim Abrollen in einer Ecke

Wenn $\dot{\beta}_2$ nach (40) größer als $\dot{\beta}_{2r}$ nach (42) ist, wenn also $\mu A\omega_0 > B\omega_2$ gilt, dann geht die Bewegung ohne Gleitphase vom Stoß direkt in die Rollphase über ($t_3 = 0$). Der Wert $\dot{\beta}_2$ nach (40) wird dann während der Stoßphase nicht erreicht, weil die Reibungskraft F_R nach Erreichen des Wertes $\dot{\beta} = \dot{\beta}_{2r}$ kleiner als der Maximalwert μF_N bleibt.

Der während der Gleitphase zurückgelegte Winkelweg β_3 läßt sich aus (44) durch Integration gewinnen:

$$\beta = \int_0^{t_3} \dot{\beta}_3 dt = T_z \dot{\beta}_2 (e^{t_3/T_z} - 1),$$

woraus nach Einsetzen von (45) und (46)

$$\beta(t_3) = \frac{r}{s\mu C^R \omega_2} (B\omega_2 - \mu A\omega_0) \quad (47)$$

erhalten wird. Wegen $r/s \ll 1$ wird auch dieser Wert klein bleiben, so daß die Annahme $\beta \ll 1$ gerechtfertigt erscheint.

Für den Fall, daß die Führung längs der 90° -Ecke mit der Bewegung in Meridianrichtung beginnt, werden völlig entsprechende Ergebnisse erhalten, nur sind A und B einerseits, α und β andererseits zu vertauschen.

3.5 Führung um eine 90° -Ecke

Bei Umlaufen einer Ecke (Abb. 7) bleibt die Bahn des Stiftmittelpunktes knickfrei, sofern der Kontakt zwischen Stift und Führungskurve nicht abreißt. Es ist jedoch möglich, daß der Stift von der Führungskurve abhebt, so daß der Kreisler dann eine freie Eigenbewegung (Nuta-

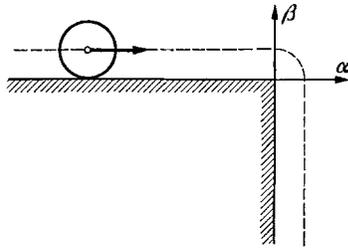


Abb. 7. Abrollen um eine Ecke

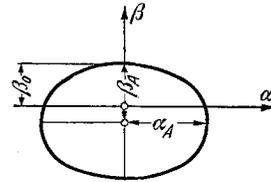


Abb. 8. Nutationsellipse der Stiftmitte bei freier Bewegung

tion) mit $F_R = F_N = 0$ ausführt. Für eine derartige Bewegung folgt aus (3) und (7) zunächst $\omega = \omega_0 = \text{const}$ und mit $\beta \ll 1$ aus (14)

$$A\ddot{\alpha} + C^R \omega \dot{\beta} = 0, \quad B\ddot{\beta} - C^R \omega \dot{\alpha} = 0. \quad (48)$$

Diese linearen Bewegungsgleichungen haben die Lösung

$$\alpha = \alpha_A \sin \omega_N t, \quad \beta = \beta_0 + \beta_A (\cos \omega_N t - 1) \quad (49)$$

mit $\beta_0 = r/s$, der Nutationsfrequenz

$$\omega_N = \frac{C^R \omega}{\sqrt{AB}} \quad (50)$$

und dem Amplitudenverhältnis

$$\frac{\alpha_A}{\beta_A} = \sqrt{\frac{B}{A}}. \quad (51)$$

Die Lösung (49) bedeutet, daß die Stiftmitte eine Ellipse mit den Halbachsen $s\alpha_A$ und $s\beta_A$ (Abb. 8) beschreibt. Ein Ablösen des Stiftes von der Führungskurve unmittelbar nach Erreichen der Ecke ist nur dann möglich, wenn für den lokalen Krümmungsradius der Nutationsellipse im oberen Scheitelpunkt

$$\rho_\beta = \frac{(s\alpha_A)^2}{s\beta_A} > r$$

also

$$\frac{\alpha_A^2}{\beta_A} > \frac{r}{s} = \beta_0 \quad (52)$$

gilt. Nun gilt für die Winkelgeschwindigkeit im oberen Scheitelpunkt

$$\dot{\alpha}_{\max} = \alpha_A \omega_N = \frac{r\omega}{s},$$

woraus wegen (50)

$$\alpha_A = \frac{r}{s} \frac{\sqrt{AB}}{CR}$$

folgt. Unter Berücksichtigung von (51) findet man damit aus (52) die von ω unabhängige Ablösebedingung.

$$B > CR. \tag{53}$$

Es sei — ohne die Rechnung hier im einzelnen durchzuführen — bemerkt, daß für den Fall, daß die Führungsbewegung in Meridianrichtung beginnt, anstelle von (53)

$$A > CR \tag{54}$$

erhalten wird. Für Ecken mit beliebiger Anlaufrichtung φ_0 und in beliebiger Breite β_E erhält man erheblich kompliziertere, von φ_0 , β_E und den Trägheitsmomenten abhängige Ablösebedingungen. Die Ergebnisse (53) und (54) sind Verallgemeinerungen der für den einzelnen starren Körper bekannten Tatsache, daß ein Ablösen nur für Kreisel mit gestrecktem Trägheitsellipsoid möglich ist.

Bei einer Bewegung mit Ablösung beschreibt die Stiftmitte die in Abb. 9 skizzierte Bahn. Insgesamt erhält man fünf Bewegungsphasen: 1. Rollen, 2. freie Nutation, 3. Stoß, 4. Gleiten, 5. Rollen. Jede dieser Phasen kann in der zuvor gezeigten Weise quantitativ berechnet werden. Der Verlauf von $\dot{\alpha}$ und $\dot{\beta}$ ist in Abb. 10 skizziert.

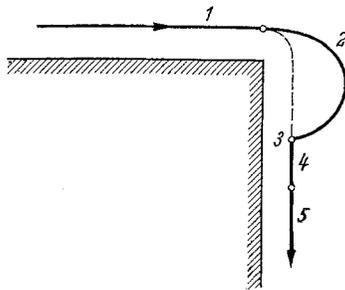


Abb. 9. Bahn der Stiftmitte bei teilweisem Ablösen von der Führungskurve

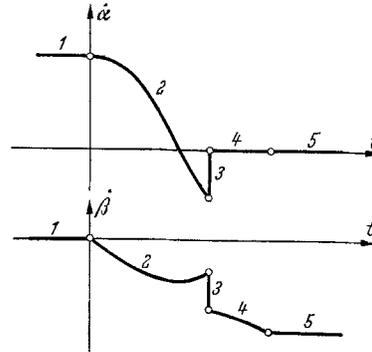


Abb. 10. Verlauf der Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\alpha}$ und $\dot{\beta}$ beim Abrollen um eine Ecke mit Ablösung

Es sei hier noch eine Betrachtung zur Stoßphase 3 angeführt. Sie unterscheidet sich von dem in Kap. 3.4 betrachteten Stoß dadurch, daß das Auftreffen des Stiftes auf die Führungskurve schräg erfolgt. Man erhält aus (49)

$$\dot{\alpha}_3 = \alpha_A \omega_N \cos \omega_N t_3 = -\omega_N \sqrt{\alpha_A^2 - \beta_0^2}, \quad \dot{\beta}_3 = -\beta_A \omega_N \sin \omega_N t_3 = -\omega_N \frac{\beta_A \beta_0}{\alpha_A}.$$

Mit (50) und (51) sowie $\beta_0 = r/s$ folgt daraus

$$\dot{\alpha}_3 = -\frac{r\omega}{s} \sqrt{1 - \left(\frac{CR}{\sqrt{AB}}\right)^2}, \quad \dot{\beta}_3 = -\frac{r\omega}{s} \frac{CR}{B}. \tag{55}$$

Durch den Stoß wird $\dot{\alpha}_4 = 0$; daraus folgt

$$\int F_N dt = -A\dot{\alpha}_3 = \frac{r\omega}{s} \sqrt{\frac{A}{B} (AB - C^2)}.$$

In Meridianrichtung wird

$$\dot{\beta}_4 = \dot{\beta}_3 + \Delta\dot{\beta}$$

mit

$$B \Delta\dot{\beta} = -\mu \int F_N dt = -\frac{\mu r \omega}{s} \sqrt{\frac{A}{B} (AB - C^{R^2})}$$

erhalten. Mit (55) hat man daher

$$\dot{\beta}_4 = -\frac{r\omega}{sB} \left[C^R + \mu \sqrt{\frac{A}{B} (AB - C^{R^2})} \right]. \quad (56)$$

Da die Rollgeschwindigkeit der Stiftmitte durch $s\dot{\beta} = r\omega$ gegeben ist, gilt für den Bewegungszustand nach dem Stoß:

$$C^R + \mu \sqrt{\frac{A}{B} (AB - C^{R^2})} \begin{cases} < B & \text{vorübergehendes Gleiten,} \\ > B & \text{Rollen.} \end{cases} \quad (57)$$

Schließlich soll noch untersucht werden, was bei einer Bewegung ohne Ablösen geschieht. Nach dem zuvor Gesagten ist das für einen „abgeplatteten“ Kreisel – im verallgemeinerten Sinne – der Fall. Die Bahn der Stiftmitte setzt sich jetzt aus zwei, durch einen Viertelkreis verbundenen Geraden zusammen. Für den Viertelkreisbogen gilt

$$\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_1 \cos \omega t; \quad \dot{\beta} = -\dot{\alpha}_1 \sin \omega t. \quad (58)$$

Mit den aus (15) folgenden Werten

$$L_1 = A\ddot{\alpha} + C^R \omega \dot{\beta}, \quad L_2 = B\ddot{\beta} - C^R \omega \dot{\alpha} \quad (59)$$

erhält man dann wegen $\varphi = -\omega t$ aus (16)

$$F_N = \frac{\dot{\alpha}_1 \omega}{s} (C^R + A \sin^2 \omega t + B \cos^2 \omega t), \quad F_R = \frac{\dot{\alpha}_1 \omega}{s} (B - A) \sin \omega t \cos \omega t. \quad (60)$$

Als Rollbedingung ergibt sich daraus

$$\left| \frac{F_R}{F_N} \right| = \left| \frac{(B - A) \sin \omega t \cos \omega t}{C^R + A \sin^2 \omega t + B \cos^2 \omega t} \right| < \mu. \quad (61)$$

Der Vergleich mit dem bei einer Führung auf dem kleinen Halbkreis an einem Schlitzende geltenden Wert (31) zeigt, daß ein Gleiten im Schlitz leichter erfolgen kann als bei Umlaufen einer Ecke. Tatsächlich erhält man für (61) einen Extremwert

$$\left(\frac{F_R}{F_N} \right)_{\text{extr.}} = \frac{B - A}{2\sqrt{AB + C^R(A + B)}} \quad (62)$$

bei dem durch

$$\cos 2\varphi = \frac{A - B}{A + B + 2C^R} \quad (63)$$

gekennzeichneten Wert von φ . Zur Veranschaulichung des Ergebnisses sei erwähnt, daß für das bereits erwähnte Kurvenkreiselmodell die Zahlenwerte

$$\text{Gleichung (32):} \quad \left(\frac{F_R}{F_N} \right)_{\text{extr.}} = 0,162,$$

$$\text{Gleichung (62):} \quad \left(\frac{F_R}{F_N} \right)_{\text{extr.}} = 0,085$$

erhalten werden. Da $\mu \approx 0,3$ angenommen werden kann (PVC-Stift auf Aluminium), ist in beiden Fällen kein Gleiten zu erwarten.

Literatur

1. Crabtree, H.: Spinning Tops and Gyroscopic Motion. London 1914, Kap. III. Nr. 51
2. Gray, A.: A Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion. New York 1918, Kap. V, Nr. 7 u. 8
3. Winkelmann, M.; Grammel, R.: Kinetik der starren Körper. in „Handbuch der Physik“ von Geiger u. Scheel, Berlin 1927, Bd. V, Kap. 8, Nr. 40
4. Magnus, K.: Kreisel, Theorie und Anwendungen. Berlin-Heidelberg-New York, 1971, Kap. 3.1.4.
5. Mansour, W. M.; Pavlov, D.: The Mechanism of Gyroscopic Tracking, ASME-Paper No. 71 — Mech — 32/33, 1972

Eingegangen am 8. Oktober 1973

Professor Dr. Kurt Magnus
D-8035 Gauting
Germeringer Straße 13