

In (13) ist A die Koeffizientenmatrix von (1). Mit (1), (11) und (12) lautet die optimale Stellfunktion nun endgültig

$$u_{\text{opt}}(\tau) = -\beta^T x. \quad (14)$$

Der Vektor β in (14) stellt die Verstärkung des optimalen Reglers dar. Er besitzt die Komponenten $\beta_i = r_{i2} + r_{i4}$; $i = 1, \dots, 4$, wobei die Funktionen r_{ij} ; $i = 1, \dots, 4$; $j = 2, 4$ Elemente von $R(\tau)$ sind. Setzt man eine hinreichend große Regelzeit T voraus, dann läßt sich (13) algebraisieren, da R zeitunabhängig wird. In diesem Fall besteht zwischen den Gewichtsfaktoren γ_{ii} und den Verstärkungsfaktoren β_i ; $i = 1, \dots, 4$ der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \beta_1^2, & \gamma_{33} &= \beta_3(\beta_3 + 2) - 2(\beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_4), \\ \gamma_{22} &= \beta_2^2 - 2\beta_1(1 + \beta_3), & \gamma_{44} &= \beta_4^2 - 2\beta_3 + 2(\beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_4). \end{aligned} \quad (15)$$

Zur Durchführung einer vollständigen Synthese müssen nach Vorgabe von γ_{ii} die Faktoren β_i ; $i = 1, \dots, 4$, aus (15) berechnet werden. Es ergeben sich dabei im allgemeinen zunächst mehrdeutige Lösungen. Mit diesen mehrdeutigen Lösungen geht man in die charakteristische Gleichung des geschlossenen Regelkreises

$$\lambda^4 + (\beta_2 + \beta_4)\lambda^3 + (1 + \beta_1 + \beta_3)\lambda^2 + \beta_2\lambda + \beta_1 = 0 \quad (16)$$

und überprüft diese auf stabile Eigenwerte. Daraus läßt sich dann eine eindeutige Lösung für die Faktoren β_i ; $i = 1, \dots, 4$ festlegen. Setzt man schließlich die berechneten β_i ; $i = 1, \dots, 4$ in (14) ein und geht damit in die Zustandsdifferentialgleichung, so ergibt sich die vollständige Lösung des Optimierungsproblems wieder durch Integration von (1).

Literatur

- 1 KUNTZE, H. B., Zur zeitoptimalen Steuerung und Regelung von Laufkränen, Wiss. Zeitschrift der Hochschule für Verkehrswesen „Friedrich List“ Dresden, S. 973–990 (1971).
- 2 PONTRJAGIN, L. S. u. a., Mathematische Theorie optimaler Prozesse, Oldenbourg Verlag, München, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967.
- 3 ATHANS, M., FALB, P. L., Optimal Control, McGraw-Hill, New York 1966.

Anschrift: Dr.-Ing. REINHART LUNDERSTÄDT, Institut für Meß- und Regelungstechnik der Universität, 75 Karlsruhe 1, Richard-Willstätter Allee 2, BRD

ZAMM 54, T 54 – T 55 (1974)

K. MAGNUS

Zur Theorie der Keltischen Wackelsteine

Ein besonders reizvolles Beispiel für ein nichtholonomes System bilden die Keltischen Wackelsteine („celts“). Die Stabilität dieser verallgemeinerten Spielkreisel hängt nicht nur von der Drehgeschwindigkeit, sondern auch vom Drehsinn ab. Im klassischen Schrifttum (Übersicht s. [1]) ist dieser Effekt nur für den Fall des reinen Rollens der Steine auf der Unterlage theoretisch behandelt worden. Versuche zeigen jedoch, daß stets auch zumindest partiell ein Gleiten stattfindet. Damit ist die beim Spielkreisel ausführlich untersuchte Frage des Reibungsansatzes auch für die Wackelsteine von entscheidender Bedeutung. Nachdem die Theorie der Spielkreisel von CONTENSOU durch einen hybriden Reibungsansatz (Überlagerung von Bohrreibung und COULOMBScher Gleitreibung) vereinheitlicht werden konnte, lag es nahe, diesen Ansatz auch in die Theorie der Wackelsteine einzuführen.

Annahmen: Der Wackelstein W (Bild 1) sei starr, konvex und ohne Kanten; er soll die starre, ebene, horizontale Unterlage E im Gleichgewichtsfall im Punkte P_0 berühren. Die Vertikale durch P_0 und den Schwerpunkt S sei Hauptträgheitsachse des Steines (3-Achse). Die Achsen 1 und 2 werden parallel zu den Hauptkrümmungsrichtungen der Körperoberfläche im Punkte P_0 gewählt. Die Hauptkrümmungsradien r_1 und r_2 seien verschieden groß. Das Wesentliche für den Wackelsteineffekt ist die Tatsache, daß die 1- und 2-Achsen nicht zugleich auch Hauptträgheitsachsen sein dürfen. Wackelsteine besitzen also stets eine Unsymmetrie, entweder in der äußeren Form oder in der Massenverteilung.

Für die Berechnung stehen zur Verfügung: der Drallsatz, der Impulssatz, eine aus der Form des Steines folgende geometrische Gleichung und eine Beziehung für die zwischen Stein und Unterlage ausgeübte Reibungskraft F_i^R . Für diese in der Ebene E liegende Kraft wird nach dem Vorbild von CONTENSOU der quasiviskose, aus einer Überlagerung von Bohr- und Gleitreibung resultierende Ansatz

$$F_i^R = -k v_i^P$$

gewählt. Darin ist v_i^P die absolute Geschwindigkeit desjenigen körperfesten Punktes, der gerade mit dem momentanen Berührungspunkt P zusammenfällt. Bei hinreichend großer Drehgeschwindigkeit gibt der Ansatz einen guten Mittelwert für die in der Berührungsfläche übertragenen COULOMBSchen Reibungskräfte.

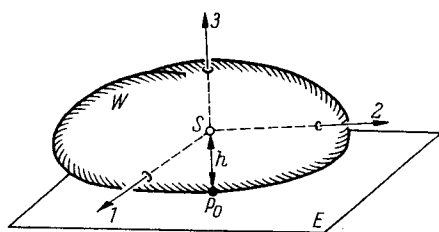
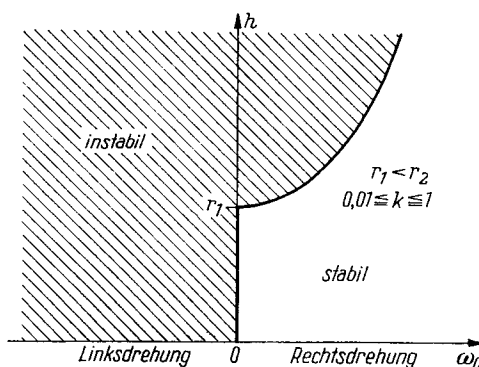


Bild 1. Wackelstein W auf horizontaler Ebene E

Bild 2. Stabilitätsdiagramm in der h, ω-Ebene



Die Ausgangsgleichungen haben unter den zuvor genannten Voraussetzungen eine partikuläre Lösung, die einer Drehung um die vertikal stehende Hauptachse 3 mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0 entspricht. Die Stabilität dieser Drehung läßt sich durch Untersuchen der Nachbarbewegungen nach bekannten Methoden bestimmen. Man wird dabei auf ein System von sechster Ordnung geführt, das zwar für Grenzfälle gelöst und diskutiert werden kann, das jedoch wegen der Vielzahl der eingehenden Parameter keine allgemeinen Aussagen zuläßt. Durch numerische Auswertung (Bild 2) kann jedoch gezeigt werden, daß der charakteristische Wackelsteineffekt fast unabhängig von der Größe des Reibungsbeiwertes k auftritt. Interessanterweise ergibt aber der Grenzübergang $k \rightarrow 0$ nicht die gleichen Ergebnisse, wie sie aus einer Betrachtung des reibungsfreien Falles ($k \equiv 0$) bekannt sind. Man hat also auch hier wieder ein System, bei dem sich die von ZIEGLER [2] beschriebenen „Spureneffekte“ bemerkbar machen. Auch kleinste Reibungskräfte müssen demnach berücksichtigt werden, weil durch ihre Vernachlässigung die qualitative Struktur des beschreibenden Gleichungssystems in unzulässiger Weise verändert würde.

Literatur

- 1 MAGNUS, K., Die Stabilität der Drehbewegungen eines unsymmetrischen Körpers auf horizontaler Unterlage, Aus Theorie und Praxis der Ingenieurwissenschaften, Berlin, München, Düsseldorf, 1971, S. 19–23.
- 2 ZIEGLER, H., Trace effects in Stability, in „Instability of Continuous Systems, Berlin, Heidelberg, New York, 1971, S. 96–111.

Anschrift: Prof. Dr. KURT MAGNUS, Technische Universität München, 8 München 2, Arcisstraße 21, BRD

ZAMM 54, T 55 – T 56 (1974)

P. C. MÜLLER*)

Stabilität und Instabilität bei linearen, zeitinvarianten, dynamischen Systemen

Lineare, zeitinvariante, dynamische Systeme endlicher Ordnung n lassen sich im Zustandsraum durch n -dimensionale Vektorgleichungen beschreiben: im (zeit-) kontinuierlichen Fall durch

$$\dot{x}(t) = A x(t), \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

im (zeit-) diskreten Fall durch

$$x(k + 1) = A x(k), \quad x(0) = x_0. \tag{2}$$

In dieser Schreibweise sind z. B. die mechanischen Systeme mit f Freiheitsgraden enthalten, die sich durch

$$M \ddot{z} + P \dot{z} + Q z = 0 \tag{3}$$

($M = M^T > 0$) beschreiben lassen, wenn man $n = 2f$,

$$x = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -M^{-1}Q & -M^{-1}P \end{bmatrix} \tag{4}$$

setzt.

*) Institut B für Mechanik, Technische Universität München.