

# Gyrodynamics

Euromech 38 Colloquium

Louvain-La-Neuve, Belgium, 3-5 September 1973

Edited by P. Y. Willems

Springer-Verlag  
Berlin Heidelberg New York 1974

Professor Dr. P. Y. WILLEMS

Institut de Mécanique et Mathématiques Appliquées

Université Catholique de Louvain



1974.8571

With 99 Figures

ISBN 3-540-06776-0 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

ISBN 0-387-06776-0 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically those of translation, reprinting, re-use of illustrations, broadcasting, reproduction by photocopying machine or similar means, and storage in data banks.

Under § 54 of the German Copyright Law, where copies are made for other than private use, a fee is payable to the publisher, the amount of the fee to be determined by agreement with the publisher.

© by Springer Verlag, Berlin/Heidelberg 1974. Printed in Germany

The use of registered names, trademarks, etc. in this publication does not imply, even in the absence of a specific statement, that such names are exempt from the relevant protective laws and regulations and therefore free for general use.

Offsetprinting: fotokop wilhelm weihert kg, Darmstadt · Bookbinding: Konrad Triftsch, Würzburg

# Reibungseffekte in der Kinetik der Kreisel

K. MAGNUS

Institut B für Mechanik  
Technische Universität München

Reibungskräfte können sich in sehr verschiedenartiger Weise auf das Verhalten von Kreiseln und Kreiselgeräten auswirken. Da diese Auswirkungen auch technisch wichtig und interessant sind, gibt es zahlreiche Untersuchungen zu diesem Thema. Die hierzu veröffentlichte Literatur ist beinahe unübersehbar geworden. Jedoch lassen sich viele Reibungseffekte von einigen Grundphänomenen ableiten, über die hier an Hand einfacher Beispiele berichtet werden soll.

## 1. Auswirkungen von Reibungskräften bei 2-Rahmen-Kreiseln

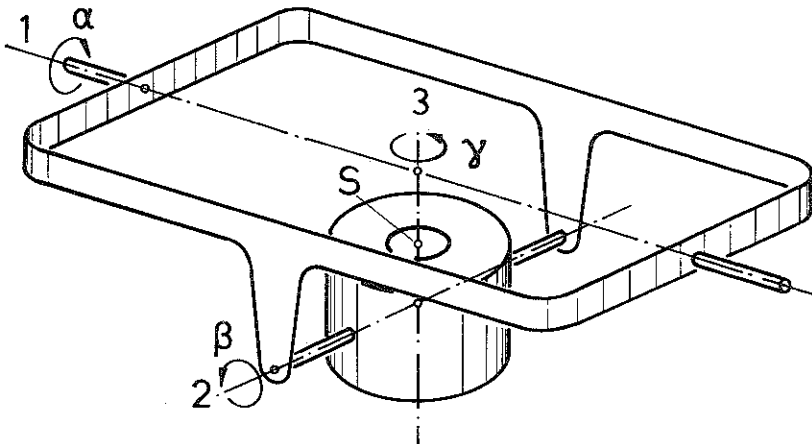


Abb. 1: Zwei-Rahmen Kreisel mit Schwerefesselung

1.1 Reibung in den Rahmenlagern. Für einen kardanisch gelagerten Kreisel nach Abb. 1 sei zunächst  $M_3 \equiv 0$  angenommen. Die Auswirkung von Reibungsmomenten um die 1- und die 2-Achsen hängt nun nicht nur von der Bewegungsform des Kreisels, sondern auch von der Art der Fesselungen ab. Setzt man

$$M_1 = -c_1 \alpha + M_1^R ; \quad M_2 = -c_2 \beta + M_2^R \quad (1)$$

mit den Fesselungsbeiwerten  $c_1$  und  $c_2$  sowie den Reibungsmomenten  $M^R$  an, dann läßt sich zeigen, daß für sehr allgemeine Reibungsgesetze, für die lediglich

$$\operatorname{sgn} M_1^R = -\operatorname{sgn} \dot{\alpha} ; \quad \operatorname{sgn} M_2^R = -\operatorname{sgn} \dot{\beta} \quad (2)$$

gefordert zu werden braucht, das in der folgenden Tabelle zusammengestellte Ergebnis gilt (s. [1], Kap.11.2):

	statische Fesselung		
	stabil $c_1, c_2 > 0$	instabil $c_1, c_2 < 0$	gemischt $c_1 c_2 < 0$
Nutationen	stabil	stabil	instabil
Präzessionen	stabil	instabil	instabil

Es ist bekannt [2], daß ein hiervon abweichendes Verhalten beobachtet werden kann, wenn bei Vorhandensein ideal Coulombscher Reibung zusätzlich noch ein konstantes Moment  $M_0$  um eine der Rahmenachsen wirksam ist:

$$M_1 = M_0 - r_1 \operatorname{sgn} \dot{\alpha} ; \quad M_2 = -r_2 \operatorname{sgn} \dot{\beta} . \quad (3)$$

In diesem Fall sind - trotz des Vorhandenseins von Reibungskräften - ungedämpfte Nutationsbewegungen kleiner Amplituden möglich, bei denen  $\dot{\alpha}$  und  $\dot{\beta}$  ihre Vorzeichen

nicht ändern. Daher ist die Nutationsbewegung von einer monotonen Abwanderung des Kreisels um beide Rahmenachsen überlagert, obwohl das Zusatzmoment  $M_0$  nur um die 1-Achse wirksam ist. Derartige Bewegungsformen können bei Lagekreiseln auftreten, die in rotierenden Bezugssystemen - z.B. auf der Erde - verwendet werden, sofern die kinematische Auswanderung durch ein ständig wirkendes einseitiges Moment ausgeglichen wird. Es läßt sich sogar zeigen, daß die Nutationen als selbsterregte Schwingungen angefaßt werden können, wenn anstelle der ideal Coulombschen Reibung nach (3) eine realistischere Reibungskennlinie mit fallendem Bereich berücksichtigt wird. Dieser Effekt ist vollkommen analog zu der Selbsterregung des Froudeschen Pendels.

1.2 Reibung im Rotorlager. Bei Lagekreiseln mit auslaufendem Rotor kann man eine merkwürdige Erscheinung beobachten, die treffend als Kreiselkollaps bezeichnet wird: der Außenrahmen beginnt einige Zeit nach dem Abschalten des Antriebs sehr plötzlich eine meist rasche Drehbewegung, die sogar zur Beschädigung des Gerätes führen kann. Eine Erklärung dieses Effekts kann unter Berücksichtigung der Reibung in den Rotorlagern gegeben werden. Das vom auslaufenden Rotor auf den Innenrahmen übertragene Reibungsmoment  $M_3^R$  hat bei einem um den Winkel  $\beta$  geneigten Innenrahmen eine Komponente  $M_1 = M_3^R \sin\beta$  in Richtung der Achse des Außenrahmens. Dieses Moment führt bei  $\beta > 0$  ( $\beta < 0$ ) zu einer Präzessionsbewegung des Innenrahmens mit  $\dot{\beta} > 0$  ( $\dot{\beta} < 0$ ). Dadurch wird in jedem Fall die vorhandene Schräglage des Innenrahmens vergrößert, so daß nach einiger Zeit der fast immer vorhandene Anschlag erreicht wird. Dann aber bewirkt der Anpreßdruck ein Moment  $M_2$  um die Achse des Innenrahmens, das zu einer schnellen Präzession um die Achse des Außenrahmens führt.

An diesem Effekt ändert sich qualitativ nichts, wenn zusätzlich auch noch Reibungsmomente in den Rahmenlagern angenommen werden (s. [1], Kap.11.3).

Umgekehrt beobachtet man bei hochlaufendem Rotor ein Präzedieren des Innenrahmens zur Normallage hin, da in diesem Fall  $M_3$  das umgekehrte Vorzeichen besitzt. Ein Kreiselkollaps kann nicht auftreten. Das Hereinpräzedieren des Innenrahmens bei hochlaufendem Rotor ist jedoch häufig von angefachten und wieder abklingenden Nutationschwingungen begleitet. Diese Selbsterregung läßt sich erklären, wenn man beachtet, daß der Drall

$$M = C \omega_3^R = C(\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta) \quad (4)$$

auch von der Bewegung der beiden Rahmen, also von den Nutationsbewegungen abhängt. Wegen der bekannten Abhängigkeit zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  wird infolge der Nutationen bei hochlaufendem Rotor stets Energie vom Rotor auf die Rahmenbewegung übertragen. Sie kann, wie Schmid [3] gezeigt hat, in bestimmten Bereichen  $H_1 < H < H_2$  zu einem Anfachen der Nutationsschwingungen führen. In Abb. 2 ist der Verlauf der Größen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\dot{\gamma}$ ,  $H$  für einen derartigen Fall aufgetragen.

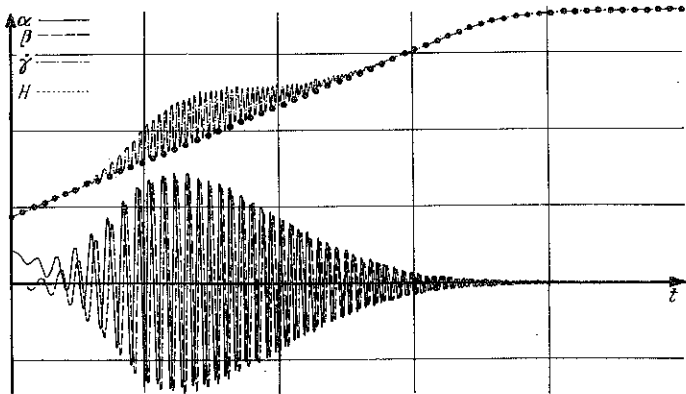


Abb. 2: Verlauf von Kardanwinkeln und Drall beim Hochlaufen eines kardanisch gelagerten Kreisels

### 1.3 Störungen des Momentengleichgewichtes zwischen

Rotorantrieb und Reibung. Nur bei ruhendem Rahmen sind bei der normalen Betriebsdrehzahl Antriebs- und Reibungs-Momente für den Rotor im Gleichgewicht. Da der Antrieb jedoch von der Relativdrehung  $\dot{\gamma}$  des Rotors gegenüber dem Innenrahmen abhängt, erhält man bei schwingendem Rahmen wegen (4) ein Differenzmoment um die Rotorachse

$$M_3 \approx -k\Delta\dot{\gamma} \approx k\dot{\alpha}\sin\beta, \quad (5)$$

da sich  $\omega_3^R$  nur sehr langsam ändert, also während einer Nutationsperiode praktisch konstant bleibt. Dieses Moment ergibt eine Komponente in Richtung der Achse des Innenrahmens

$$M_1 = -M_3\sin\beta \approx -k\dot{\alpha}\sin^2\beta. \quad (6)$$

Setzt man für  $\alpha$  und  $\beta$  die für Nutationsbewegungen geltenden Funktionen ein und integriert die Momente  $M_1$  und  $M_3$  über eine Periode der Nutation, dann stellt man fest, daß sie sich nicht aufheben. Es gilt vielmehr für den Mittelwert  $\overline{M}_3 < 0$ , so daß der Rotor bei schwingendem Rahmen stets gebremst wird. Das Vorzeichen des Mittelwertes  $\overline{M}_1$  entspricht dem des Winkels  $\beta$ ; daraus folgt, daß - ähnlich wie zuvor beim Kreiselkollaps beschrieben - eine einmal vorhandene Schräglage des Innenrahmens vergrößert wird.

Wenn man Reibungsmomente um alle drei Achsen eines kardatisch gelagerten Kreisels berücksichtigt, dann können noch weitere Erscheinungen, z.B. zeitweiliges Blockieren der Rahmen, auftreten.

## 2. Reibung im Rahmenlager eines 1-Rahmen-Kreisels.

Bei Kreiseln mit eingeschränkter Bewegungsmöglichkeit, von denen der 1-Rahmen-Kreisel den einfachsten Fall dar-

stellt, können die Präzessionsdrücke in den Lagern zu einer Linearisierung Coulombscher Reibungskräfte führen. Dieser Effekt läßt sich wie folgt erklären: Wenn  $\dot{\alpha}$  die Drehgeschwindigkeit des Rahmens ist, dann sind die normal gerichteten Lagerkräfte  $F^N$  dem Kreiselmoment  $H$  proportional; andererseits sind die an der Rahmenachse angreifenden tangentialen Reibungskräfte  $F^R$  zur Normalkraft  $F^N = H\dot{\alpha}/a$  proportional. Wenn nun  $r$  der Radius des Lagerzapfens und  $a$  der Abstand der beiden Rahmenlager ist, dann erhält man auf diese Weise ein Reibungsmoment für die Rahmenachse

$$M^R = -2rF^R = -2r\mu F^N = -\frac{2r\mu H}{a} \dot{\alpha} . \quad (7)$$

### 3. Reibungseffekte bei spitzengelagerten Kreiseln.

Obwohl Spitzenlagerungen nur noch selten bei Kreiselgeräten verwendet werden, sind die dabei auftretenden Reibungseffekte insbesondere am Beispiel des Spielkreisels häufig untersucht worden. Die Theorie dieser Erscheinungen konnte vor allem durch einen Reibungsansatz von Contensou [4] vereinheitlicht werden. An zwei Beispielen sollen Ergebnisse einer derartigen Theorie betrachtet werden.

3.1 Der Spielkreisel. Zwischen der "Spitze" des Kreisels und der Unterlage, auf der er sich bewegt, ist eine Kontaktfläche vorhanden, die bei abgerundeter Spitze als näherungsweise kreisförmig betrachtet werden kann. Integriert man nun die an den Flächenelementen angreifenden Coulombschen Reibungskräfte über die gesamte Kontaktfläche, so erhält man eine mittlere Reibungskraft, für die bei hinreichend schneller Drehung des Kreisels

$$F^R = \int_A dF^R \approx -k v_D \quad (8)$$

geschrieben werden kann. Die Drehbewegung verwandelt dem-



nach die Coulombschen Gleitreibungskräfte in eine quasi-viskose Reibung. Mit dem Ansatz (8) läßt sich eine lineare Theorie für die Stabilität von Spielkreiseln verschiedener Form aufstellen, deren wesentliches Ergebnis das in Abb. 3 gezeigte Stabilitätsdiagramm ist. Über dem Verhältnis  $C/A$  ( $C$  ist das Hauptträgheitsmoment für die Symmetrieachse,  $A$  das für eine Querachse durch den Schwerpunkt) ist das Verhältnis  $h/r$  ( $h$  ist die Höhe des Schwerpunktes über der Unterlage,  $r$  der Radius der als Kugelkalotte angenommenen Spitze) aufgetragen.

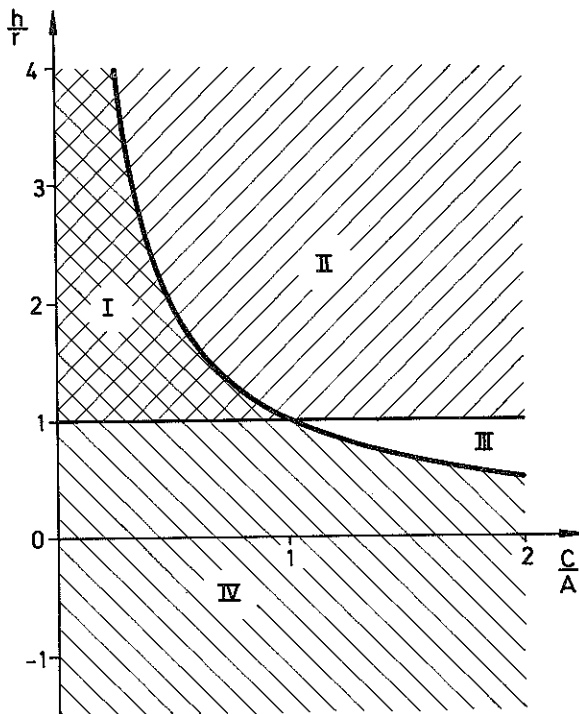


Abb. 3: Stabilitätsdiagramm für Spielkreisel

Durch die Grenzkurven  $h/r = 1$  (horizontale Gerade) und  $h/r = A/C$  (Hyperbel) wird die Ebene in vier Bereiche ein-

geteilt, für die das folgende Stabilitätsverhalten gilt:

- I: Instabilität,
- II: Stabilität nur für hinreichend schnell drehende Kreisel,
- III: Stabilität,
- IV: Stabilität nur für hinreichend langsam drehende Kreisel.

Das Diagramm erklärt u.a. das merkwürdige Verhalten des bekannten Stehauf-Kreisels (tippe-top), der aus einer statisch stabilen Lage nach dem Andrehen um die Vertikalachse umkippt (Bereich IV), um schließlich in einer um  $180^\circ$  gekippten statisch instabilen Lage "auf dem Kopf" stabil weiterzudrehen (Bereich II).

3.2 Die Wackelsteine. Läßt man die beim Spielkreisel übliche Annahme der rotationssymmetrischen Form für den Körper fallen, dann können weitere Effekte auftreten; sie sind an "keltischen Wackelsteinen" ("celts"), die auf einer horizontalen Ebene liegend angedreht werden, beobachtet und beschrieben worden. Bemerkenswert ist dabei vor allem, daß die Stabilität der Drehbewegung um die Vertikalachse vom Drehsinn abhängen kann: es gibt rechtsdrehend stabile, linksdrehend instabile Steine - und umgekehrt.

Der Wackelsteineffekt kann auftreten, wenn

der Körper drei voneinander verschiedene Hauptträgheitsmomente besitzt,

in der Umgebung des Berührungspunktes mit der Unterlage verschiedene Hauptkrümmungsrichtungen des Körpers vorhanden sind,

die Hauptkrümmungsrichtungen nicht parallel zu den Hauptträgheitsachsen durch den Schwerpunkt sind,

die bei nichtdrehendem Körper - also im Gleichgewichtsfall - vertikale Achse durch Berührungspunkt und Schwerpunkt zugleich auch Hauptachse ist.

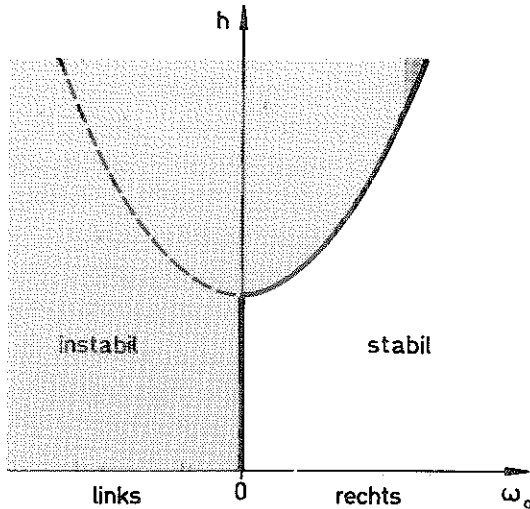


Abb. 4: Stabilitätsdiagramm für Wackelsteine

Ein typisches Stabilitätsdiagramm in einer  $h, \omega_0$ -Ebene zeigt Abb. 4 ( $h$  ist die Schwerpunktshöhe,  $\omega_0$  die Winkelgeschwindigkeit um die Vertikale). Bemerkenswert ist dabei die Tatsache, daß der Verlauf der Stabilitätsgrenzkurve nicht vom Reibungsbeiwert  $k$  nach (8) abhängt, solange  $k > 0$  angenommen wird. Setzt man dagegen von vornherein  $k = 0$ , so erhält man als Grenzkurve die durch den gestrichelt skizzierten Ast ergänzte Parabel; Instabilität ist dann nur im Bereich zwischen den Parabelästen vorhanden, so daß der Unterschied im Stabilitätsverhalten bei Rechts- und Links-Drehung fortfällt. Der Grenzübergang  $k \rightarrow 0$  erweist sich in diesem Fall als unstetig - ein Ergebnis, das vom grundsätzlichen Standpunkt aus interessiert, weil es ein Beispiel für

die später (Abs. 5) zu besprechenden "Spureneffekte" darstellt.

#### 4. Reibungseffekte beim Kurvenkreisel.

Als Kurvenkreisel wird im klassischen Kreiselschrifttum ein Spielkreisel bezeichnet, dessen verlängerte Achse an einer materiell angeführten Kurve abrollt. Die dabei auftretenden Kreiselmomente pressen die Achse gegen die Kurve, so daß die Achse fast beliebigen Krümmungen der Führungskurve zu folgen vermag. Man kann derartige Kreisel auch technisch verwenden, wovon die altbekannte Kollermühle ein Beispiel gibt. Neuerdings wurden von Mansour und Pavlov [5] weitere interessante Vorschläge für eine Nutzung des Kurvenkreiseleffektes veröffentlicht. Daher besteht ein gewisses Interesse an einer erweiterten Theorie [6], bei der vor allem die folgenden Fragen zu klären sind:

Größe der normal zur Führungskurve wirkenden Anpreßkraft  $F^N$  in Abhängigkeit von der Kurvenform und von den Kreiselparametern,

Einfluß von Zusatzmassen, die bei der Führungsbe-  
wegung mitgenommen werden müssen,

Diskussion der für den Rollzustand notwendigen Be-  
dingung  $F^R < \mu F^N$ ,

Feststellen der Bereiche, in denen ein Gleiten  
zwischen Kurve und Achse auftritt ( $F^R = \mu F^N$ ),

Feststellen der Bereiche, in denen sich die Achse  
von der Führungskurve löst ( $F^N = 0$ ).

Für einige spezielle Führungskurven sind die Bewegungen ausgerechnet und insbesondere die Kriterien für das Auftreten einer Gleitphase oder einer Bewegungsphase mit freier Nutation untersucht worden. Dabei stellt sich bemerkenswerterweise heraus, daß diese Kriterien nicht von

der Drehgeschwindigkeit des Rotors, also auch nicht von der Geschwindigkeit der Führungsbewegung abhängen. Bei Bewegungsphasen mit freier Nutation treten stets auch Stöße auf, die sich ebenfalls mit den angegebenen Gleichungen berechnen lassen.

Als Beispiel sei die Bewegung bei Umlaufen einer  $90^\circ$ -Ecke erwähnt: hier kann sich die Bewegung aus den folgenden fünf Phasen zusammensetzen: Rollen bis zur Ecke, freie Nutation nach Ablösen an der Ecke, Stoß bei Wiederauftreffen auf die Führungskurve, Gleiten mit anwachsender Führungsgeschwindigkeit, Rollen. Jedoch erfolgt die Bewegung bei Kreiseln mit stark abgeplattetem Rotor und geringen Zusatzmassen auch ohne Ablösen, Stoß und Gleiten, so daß der Rollzustand nicht verlassen wird. Roll-, Gleit- und Ablöse-Bedingungen lassen sich explizit angeben.

#### 5. Reibungseffekte bei allgemeinen Kreiselsystemen.

Bei der Übertragung der zuvor beschriebenen Effekte auf allgemeinere Kreiselsysteme ist besondere Vorsicht geboten, da in Systemen höherer Ordnung noch vielfältigere Erscheinungen möglich sind, als in den bisher betrachteten einfacheren Fällen. Einige allgemein gültige Aussagen über die Auswirkungen von Dämpfungs- oder Reibungskräften sind bisher nur für lineare Systeme bekannt geworden. Hier lassen sich aus der Struktur der Bewegungsgleichungen oder aus den Eigenschaften der drei quadratischen Formen: kinetische Energie, Dissipationsfunktion und Kräftepotential gewisse Eigenschaften für die Bewegungen des betrachteten Systems, insbesondere auch für ihre Stabilität ableiten (s. z.B. [1], Kap.5.2). Bei der Anwendung dieser Ergebnisse auf Probleme der Satellitentechnik hat sich nun herausgestellt, daß unter den extremen Bedingun-

gen des Weltraums die nach Četaev erforderliche positive Definitheit der Dissipationsfunktion nicht immer gegeben ist. Vielmehr interessiert daher auch der Fall semidefiniter Dissipationsfunktionen. Praktisch bedeutet dies, daß im System gewisse Freiheitsgrade vorhanden sind, in denen keinerlei Dämpfung wirksam ist. Dennoch kann die Gesamtbewegung des Systems asymptotisch stabil sein. Kriterien hierzu wurden von Müller [7] angegeben; er konnte zeigen, daß die Dämpfung "durchdringend" ist, wenn die Bewegungsgleichungen des Systems eine Steuerbarkeitsbedingung im Sinne der Kontrolltheorie erfüllen. So wie bei der vollständigen Steuerbarkeit eines Systems das Durchdringen der Steuerimpulse zu allen Freiheitsgraden verlangt wird, so muß auch die "durchdringende" Dämpfung auf alle Freiheitsgrade des Systems einwirken können.

Auf einen gerade auch für Reibungskräfte wichtigen Zusammenhang hat Ziegler [8] hingewiesen: es ist bei Stabilitätsuntersuchungen unter bestimmten Umständen notwendig, auch noch so kleine Reibungskräfte, also "Spureneffekte" zu berücksichtigen. Diese Aussage erscheint plausibel, wenn man an die Prandtlische Grenzschichttheorie von Flüssigkeitsbewegungen mit kleiner Reibung denkt. Durch Vernachlässigung von Reibungskräften können die Bewegungsgleichungen bei Systemen höherer Ordnung in unzulässiger Weise vereinfacht werden. Als Beispiel hierzu wurde bereits bei der Beschreibung des Wackelsteineffektes (Abschn. 3.2) erwähnt, daß das Vernachlässigen einer auch noch so kleinen Reibungskraft zu falschen Ergebnissen führt.

Offenbar hängt die Frage, ob Spureneffekte berücksichtigt werden müssen oder nicht mit der Problematik des für die theoretischen Untersuchungen verwendeten Ersatz-

modells zusammen. Ziegler empfiehlt, nur "zulässige Modelle" zu verwenden. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß die qualitativen Strukturen der Bewegungsgleichungen, d.h. die Eigenschaften der dort eingehenden Matrizen, für Er-satzmodell und vollständiges System übereinstimmen.

Für nichtlineare Systeme höherer Ordnung, die gerade bei Vorhandensein von Coulombschen Reibungskräften besonders interessieren, sind bisher nur wenige Untersuchungen bekannt geworden. Formalski [9] gelang es, einige allgemeine Aussagen über notwendige Bedingungen für die Stabilität der Gleichgewichtszustände zu machen. Dabei bediente er sich der Methoden der Kontrolltheorie, indem er die ihrem Betrage nach konstanten, aber im Vorzeichen wechselnden Coulombschen Reibungskräfte in gleicher Weise behandelte, wie dies für die Steuergrößen eines Zweipunkt-Reglers üblicherweise geschieht. Auf diese Weise gelang auch eine Abschätzung der für die Gleichgewichtszustände geltenden Einzugsgebiete, die in engem Zusammenhang mit den Bereichen der Steuerbarkeit eines Reglersystems stehen.