

Deutsche Luft- und Raumfahrt

Forschungsbericht 75-32

Beiträge zur Mechanik und Systemtheorie

Peter Sagirow zum 60. Geburtstag gewidmet

Universität Stuttgart
Institut A für Mechanik

<p>312 Seiten mit 87 Bildern 19 Tabellen 177 Literaturstellen</p>

1975

Beiträge zur Mechanik und Systemtheorie
- Peter Sagirow zum 60. Geburtstag gewidmet -

Universität Stuttgart
Institut A für Mechanik

Stuttgart, im März 1975

Zusammengestellt von M. HILLER und H. SORG

Selbsterregte Reibungsschwingungen des Kardankreisels

K. Magnus

Institut B für Mechanik
Technische Universität München

Übersicht

Mit Hilfe der Ljapunovschen Methode 2. Art und einer Analyse des Phasenporträts werden drei Ergebnisse über die Auswirkungen von Reibungsmomenten auf die Bewegungen eines kardanisch gelagerten Kreisels abgeleitet. Diese Ergebnisse betreffen 1) die Stabilität der Nutationsschwingungen bei beliebiger Reibungskennlinie, 2) die Stabilität der Bewegungen statisch stabil gefesselter Kardankreisel und 3) die Entstehung von selbsterregten Nutationsschwingungen als Folge von Reibungskennlinien mit rückläufigem Teilbereich.

Summary

By Ljapunov's second method and phase-plane analysis some results are obtained on the motions of a double gimbal gyro under the influence of frictional torques. The results refer to 1) the stability of nutational motions for arbitrary frictional characteristics, 2) the stability of motion of statically stable gyros and 3) the existence of selfexcited nutational vibrations for frictional torques with partial decreasing characteristics.

1. Einführendes

Die Auswirkungen von Reibungskräften in den Rahmenlagern eines kardanisch gelagerten Kreisels auf dessen Bewegungsverhalten ist von zahlreichen Autoren untersucht worden. Es ist bekannt (s. z.B. [1]), daß Nutationsschwingungen in jedem Falle gedämpft werden, Präzessionsschwingungen jedoch nur bei statisch stabiler Fesselung des Kreisels gedämpft, bei statisch instabiler Fesselung aber aufgeschaukelt werden. Dieses Ergebnis ist bisher für idealisierte Coulombsche Reibung sowie für viskose Dämpfung bei Vorhandensein linearer oder linearisierter Fesselungen abgeleitet worden. In den Abschnitten 2 und 3 soll gezeigt werden, daß weitgehende Verallgemeinerungen möglich sind. Wenn

außer den Coulombschen Reibungsmomenten auch noch konstante Zusatzmomente um die Rahmenachsen auftreten, wie dies z.B. bei Führen oder Stützen von Kreiselgeräten geschieht, dann sind trotz der Anwesenheit von Reibung ungedämpfte Restschwingungen möglich (Butenin [2]); sie können bei geeigneter Auftragung in einer "Phasenebene" als Grenzykel dargestellt werden. Bei idealer Coulombscher Reibung ist das Innere des Grenzykels ein indifferentes Gebiet, d.h. weder Anfachungs- noch Dämpfungs-Gebiet. Geht man jedoch zu realistischeren Reibungsgesetzen über (im folgenden kurz "reale Coulomb-Reibung" genannt), dann sind selbsterregte Schwingungen möglich, die völlig analog zu den bekannten Reibungsschwingungen des Froudeschen Pendels (s. z.B. [3]) entstehen und berechnet werden können. Das soll im Abschnitt 4 gezeigt werden. Wie bei dem Froudeschen Pendel ist die Existenz eines rückläufigen Teiles der Reibungskennlinie notwendige Voraussetzung für das Entstehen selbsterregter Reibungsschwingungen am Kardankreisel.

Bei den folgenden Untersuchungen wird vorausgesetzt, daß der Rotor selbst mit konstanter Winkelgeschwindigkeit umläuft, daß also der Drall $\vec{L} = \vec{L}_0$ konstant ist. Weiterhin werden die bekannten, für kleine Auslenkungen α und β der Kardanrahmen aus der Normlage linearisierten Kreiselgleichungen zugrundegelegt:

$$(1) \quad \begin{aligned} A \ddot{\alpha} + L \dot{\beta} &= M_1, \\ B \ddot{\beta} - L \dot{\alpha} &= M_2. \end{aligned}$$

Darin sind A und B die effektiven, bei $\alpha, \beta \ll 1$ in erster Näherung konstanten Trägheitsmomente, M_1 und M_2 die entsprechenden äußeren Momente bezüglich der äußeren und inneren Rahmenachse. Für den momentenfreien Fall $M_1 = M_2 = 0$ hat (1) die Lösung

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{\alpha} &= \phi_1 \cos \omega_N t, \\ \dot{\beta} &= \phi_2 \sin \omega_N t \end{aligned}$$

mit der Nutationsfrequenz

$$(3) \quad \omega_N = \frac{L}{\sqrt{AB}} \quad \text{und} \quad \frac{\phi_2}{\phi_1} = \frac{A}{B}.$$

In einer $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ -Ebene aufgetragen, ergibt die Lösung (2) Ellipsen, die durch

$$(4) \quad V(\dot{\alpha}, \dot{\beta}) = A \dot{\alpha}^2 + B \dot{\beta}^2 = \text{const}$$

beschrieben werden.

2. Beliebige Reibungsmomente in den Rahmenachsen

Wir wollen nun

$$(5) \quad M_1 = R_1(\dot{\alpha}) ; \quad M_2 = R_2(\dot{\beta})$$

annehmen und dabei von den Reibungsfunktionen R lediglich voraussetzen, daß ihre Vorzeichen stets den Vorzeichen der entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten entgegengesetzt sind:

$$(6) \quad \text{sgn } R_1(\dot{\alpha}) = - \text{sgn } \dot{\alpha} ; \quad \text{sgn } R_2(\dot{\beta}) = - \text{sgn } \dot{\beta} .$$

Die Reibung soll also stets der Bewegung entgegenwirken. Unabhängig von der sonstigen Gestalt der Funktionen $R_1(\dot{\alpha})$ und $R_2(\dot{\beta})$ läßt sich nun leicht zeigen, daß Nutationen des Kreisels stets asymptotisch stabil im Sinne Ljapunovs sind. Hierzu verwenden wir die positiv definite quadratische Form $V(\dot{\alpha}, \dot{\beta})$ nach (4) als Ljapunovsche Testfunktion. Ihre totale Ableitung nach der Zeit

$$\frac{dV}{dt} = 2(A \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + B \dot{\beta} \ddot{\beta})$$

geht mit (1) und (5) über in:

$$(7) \quad \frac{dV}{dt} = 2 \left[\dot{\alpha} R_1(\dot{\alpha}) + \dot{\beta} R_2(\dot{\beta}) \right] < 0 .$$

Wegen (6) ist dieser Ausdruck stets negativ, so daß nach einem der Ljapunov-Sätze die asymptotische Stabilität bezüglich der Winkelgeschwindigkeiten nachgewiesen ist. Das klingt zwar plausibel, ist aber keineswegs selbstverständlich, da ja z.B. auch rückläufige Teile der Reibungskennlinien zugelassen sind - sofern nur (6) nicht verletzt wird.

In geometrischer Deutung besagt das Ergebnis, daß beliebige Lösungskurven von (1) mit (5) unabhängig von der Art der Reibungsfunktionen in einer $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ -Ebene nur so verlaufen können, daß sie die durch (2) definierten Ellipsen bei wechselndem t nur von außen nach innen durchdringen können. Die Bewegung ist

stets gedämpft.

3. Beliebige Reibungs- und Fessel-Momente

Das in Abschnitt 2 angewendete Verfahren kann auch auf den Fall übertragen werden, daß außer den Reibungs- auch Fesselmomente $F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ wirksam sind. Die Bewegungsgleichungen können dann in der Form

$$(8) \quad \begin{aligned} A \ddot{\alpha} + L \dot{\beta} &= R_1(\dot{\alpha}) + F_1(\alpha) , \\ B \ddot{\beta} - L \dot{\alpha} &= R_2(\dot{\beta}) + F_2(\beta) \end{aligned}$$

geschrieben werden. Wenn $F_1(0) = F_2(0) = 0$ gilt und die Fesselfunktionen eine statisch stabile Fesselung an die Gleichgewichtslage $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ kennzeichnen, dann ist

$$(9) \quad \text{sgn } F_1(\alpha) = - \text{sgn } \alpha \quad \text{und} \quad \text{sgn } F_2(\beta) = - \text{sgn } \beta .$$

Damit folgt

$$(10) \quad \begin{aligned} \int_0^{\alpha} F_1(\alpha) d\alpha &= \int_0^t F_1(\alpha) \dot{\alpha} dt < 0 , \\ \int_0^{\beta} F_2(\beta) d\beta &= \int_0^t F_2(\beta) \dot{\beta} dt < 0 . \end{aligned}$$

Als Ljapunovsche Testfunktion wird jetzt der positiv definite Ausdruck

$$(11) \quad V = A \dot{\alpha}^2 + B \dot{\beta}^2 - 2 \int_0^{\alpha} F_1(\alpha) d\alpha - 2 \int_0^{\beta} F_2(\beta) d\beta$$

verwendet. Daraus erhält man unter Berücksichtigung von (8) und (10)

$$\frac{dV}{dt} = 2 \left[\dot{\alpha} R_1(\dot{\alpha}) + \dot{\beta} R_2(\dot{\beta}) \right] < 0 .$$

Damit ist gezeigt, daß die Lösungen von (8) bezüglich $\dot{\alpha}$ und $\dot{\beta}$ stets asymptotisch stabil sind, sofern die Reibungsmomente der Bewegungsrichtung entgegengesetzt sind und die Fesselmomente einer statisch stabilen Fesselung entsprechen. Außer den Bedingungen (6) und (9) brauchen die Funktionen R und F jedoch keinen weiteren Bedingungen zu genügen.

Eine Übertragung des hier verwendeten Verfahrens zur Stabilitätsbestimmung

auf Kreisel mit statisch instabilen oder gemischten Fesselfunktionen ist nicht gelungen, weil dafür keine geeigneten Ljapunov-Funktionen V gefunden werden konnten.

4. Überlagerung von konstanten Führungsmomenten und Reibungsmomenten

Wenn außer beliebigen Reibungsmomenten noch konstante Führungs- oder Stützmomente M_{10} und M_{20} vorhanden sind, dann hat man die Bewegungsgleichungen:

$$(12) \quad \begin{aligned} A \ddot{\alpha} + L \dot{\beta} &= M_{10} + R_1(\dot{\alpha}) , \\ B \ddot{\beta} - L \dot{\alpha} &= M_{20} + R_2(\dot{\beta}) . \end{aligned}$$

Aus ihnen findet man zunächst die Gleichgewichtslösungen $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0$, $\dot{\beta} = \dot{\beta}_0$ mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten als Lösung des im allgemeinen nichtlinearen Systems algebraischer Gleichungen

$$(13) \quad \begin{aligned} L \dot{\beta} - R_1(\dot{\alpha}) &= M_{10} , \\ -L \dot{\alpha} - R_2(\dot{\beta}) &= M_{20} . \end{aligned}$$

Die Lösung kann bei bekannten Reibungsfunktionen grafisch geschehen, indem man die Funktionen

$$(14) \quad \begin{aligned} \dot{\beta}^*(\dot{\alpha}) &= \frac{1}{L} [M_{10} + R_1(\dot{\alpha})] , \\ \dot{\alpha}^*(\dot{\beta}) &= -\frac{1}{L} [M_{20} + R_2(\dot{\beta})] \end{aligned}$$

in einer $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ -Ebene aufträgt und die Schnittpunkte der erhaltenen Kurven bestimmt. In Bild 1 ist ein Beispiel dieser Art skizziert. Da $\dot{\beta}^*(\dot{\alpha})$ für alle Werte von $\dot{\alpha}$ und $\dot{\alpha}^*(\dot{\beta})$ für alle Werte von $\dot{\beta}$ definiert ist, gibt es stets mindestens einen Schnittpunkt $\dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0$ beider Kurven. Je nach der Größe von M_{10} und M_{20} und dem Verlauf der Reibungskennlinien sind aber auch mehrere Schnittpunkte - also Gleichgewichtsbewegungen $\dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0$ - möglich, (s. z.B. Bild 2).

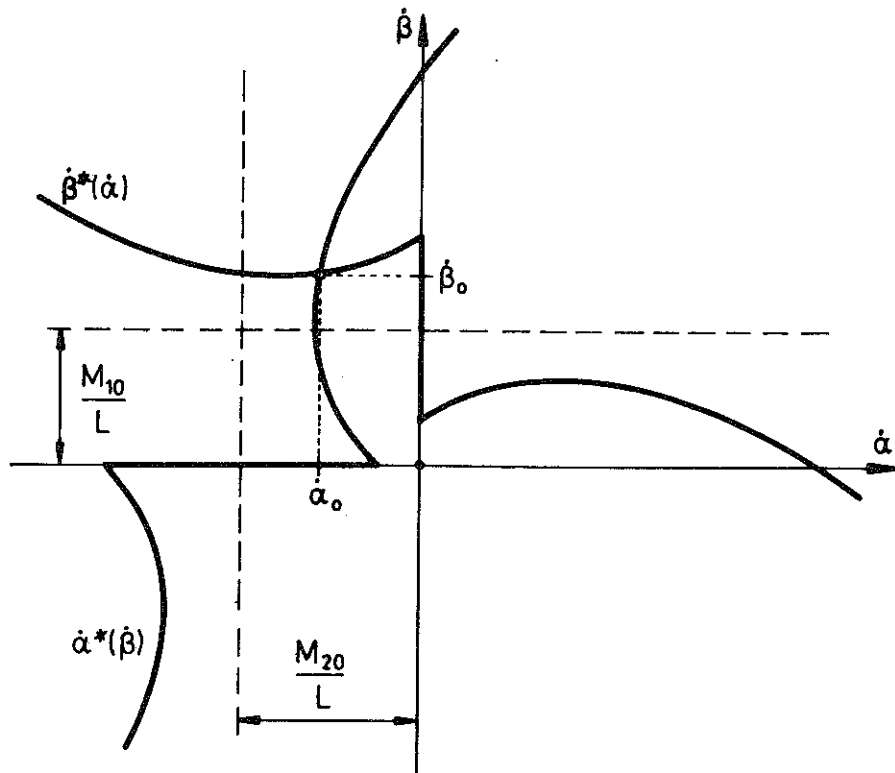


Bild 1 Auffinden des Gleichgewichtszustandes $\dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0$ aus den Kurven $\dot{\beta}^*(\dot{\alpha})$ und $\dot{\alpha}^*(\dot{\beta})$.

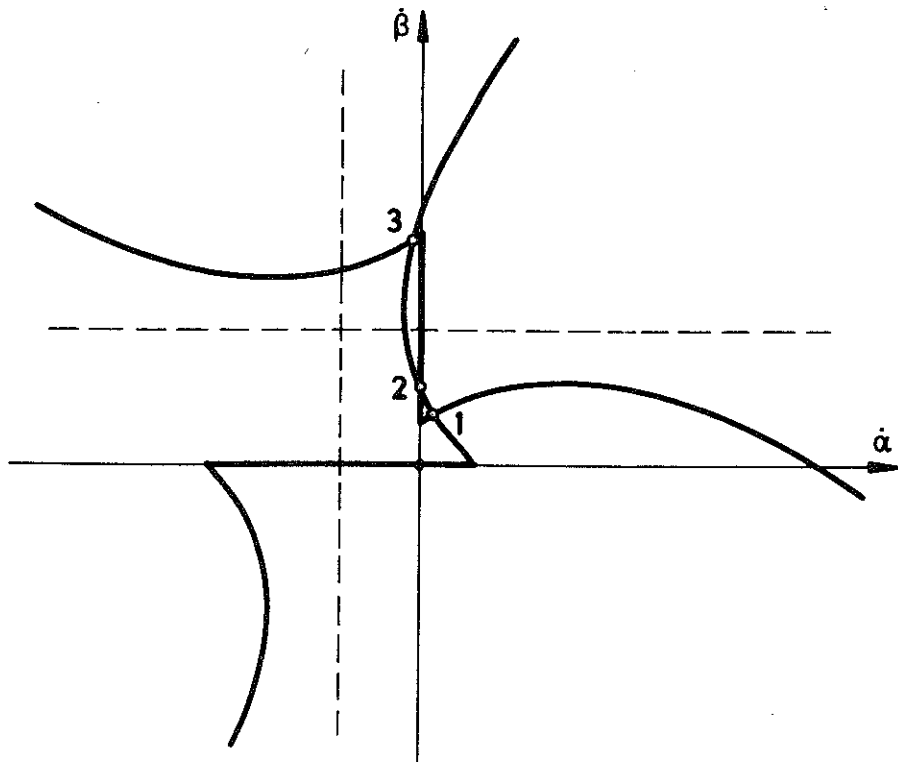


Bild 2 Sonderfall mit drei Gleichgewichtszuständen.

4.1 Die Selbsterregungsbedingung

Selbsterregung tritt auf, wenn sich eine Gleichgewichtslösung $\dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0$ als instabil erweist. Das kann aus den für die Umgebung der Gleichgewichtslösungen linearisierten Bewegungsgleichungen (12) festgestellt werden. Mit

$$(15) \quad \dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0 + x \quad ; \quad \dot{\beta} = \dot{\beta}_0 + y$$

und Taylor-Entwicklung der Reibungsfunktionen

$$R_1(\dot{\alpha}) = R_1(\dot{\alpha}_0) + \left(\frac{dR_1}{d\dot{\alpha}}\right)_0 x + \dots$$

$$R_2(\dot{\beta}) = R_2(\dot{\beta}_0) + \left(\frac{dR_2}{d\dot{\beta}}\right)_0 y + \dots$$

erhält man aus (12) unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbedingung als linearisiertes Gleichungssystem für die Nachbarbewegung

$$(16) \quad \begin{aligned} A \dot{x} + L y - \left(\frac{dR_1}{d\dot{\beta}}\right)_0 x &= 0 \quad , \\ B \dot{y} - L x - \left(\frac{dR_2}{d\dot{\beta}}\right)_0 y &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Aus der charakteristischen Gleichung

$$(17) \quad \lambda^2 \cdot AB - \lambda \left[A \left(\frac{dR_2}{d\dot{\beta}}\right)_0 + B \left(\frac{dR_1}{d\dot{\alpha}}\right)_0 \right] + \left[L^2 + \left(\frac{dR_1}{d\dot{\alpha}}\right)_0 \left(\frac{dR_2}{d\dot{\beta}}\right)_0 \right] = 0$$

erkennt man, daß stets Selbsterregung für

$$(18) \quad A \left(\frac{dR_2}{d\dot{\beta}}\right)_0 + B \left(\frac{dR_1}{d\dot{\alpha}}\right)_0 > 0$$

vorhanden ist. Wegen $A > 0$, $B > 0$ bedeutet dies, daß mindestens eine der beiden Reibungskennlinien im Gleichgewichtspunkt $\dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0$ rückläufig sein muß, so daß steigender Winkelgeschwindigkeit ein verringertes Reibungsmoment entspricht. Genau dies aber ist die Anfachungsbedingung für das bekannte Froudesche Pendel. Die Bedingung (18) ist demgegenüber allgemeiner, weil zwei Reibungskennlinien ins Spiel kommen.

4.2 Die Gleichung des Phasenporträts

Das dynamische Verhalten des Systems kann aus dem Verlauf der Zustandskurven in der $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ -Ebene abgelesen werden, die einen reduzierten Zustandsraum bildet. Die Zustandskurven werden durch Integration der Gleichung des Phasenporträts erhalten. Hierfür erhält man aus (12) sowie unter Berücksichtigung von (14)

$$(19) \quad \frac{d\dot{\beta}}{d\dot{\alpha}} = \frac{A \left[L\dot{\alpha} + M_{20} + R_2(\dot{\beta}) \right]}{B \left[-L\dot{\beta} + M_{10} + R_1(\dot{\beta}) \right]} = \\ = \frac{A(\dot{\alpha} - \dot{\alpha}^*)}{B(\dot{\beta}^* - \dot{\beta})} = f(\dot{\alpha}, \dot{\beta}) .$$

Singuläre Punkte in der $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ -Ebene sind die durch (13) gekennzeichneten Gleichgewichtsbewegungen. Der Charakter der singulären Punkte kann aus den Betrachtungen des Abschnitts 4.1 erkannt werden. Bei Erfüllung der Anfangsbedingung (18) liegt ein instabiler Strudelpunkt vor. Man kann zeigen, daß in diesem Fall stets auch mindestens ein Grenzyklus vorhanden sein muß. Das System ist nämlich stabil im Großen, da bei großen Werten von $\dot{\alpha}$ und $\dot{\beta}$, unabhängig von den als konstant angenommenen Momenten M_{10} und M_{20} , stets die Reibungskräfte dominieren. Man kann dann das in Abschnitt 2 erhaltene Ergebnis sinngemäß übertragen.

Aus (19) kann das Feld der Richtungselemente konstruiert, und daraus ein Überblick über die Struktur des Phasenporträts gewonnen werden. Man erkennt, daß die Kurve $\dot{\alpha}^*(\dot{\beta})$ nach (14) in der $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ -Ebene Isokline für Richtungselemente mit $d\dot{\beta}/d\dot{\alpha} = 0$ ist; alle Phasenkurven durchschneiden diese Isokline horizontal. Umgekehrt ist $\dot{\beta}^*(\dot{\alpha})$ Isokline mit $d\dot{\beta}/d\dot{\alpha} \rightarrow \infty$; sie wird demnach von allen Phasenkurven vertikal geschnitten. Der sonstige Verlauf der Richtungselemente - und damit der Phasenkurven - kann aus (19) qualitativ abgeschätzt oder mit Hilfe bekannter Methoden auch quantitativ konstruiert werden.

4.3 Beispiele

Die Zahl der möglichen Bewegungsformen ist außerordentlich groß. Deshalb sollen hier nur einige typische Fälle herausgegriffen und anhand ihres Phasenporträts erläutert werden.

Für die Anwendung auf kardanisch gelagerte Lagekreisel hat der Fall $R_2 \approx 0$

ein gewisses Interesse, weil man sich bemüht, die Reibung um die innere Rahmenachse so gering wie möglich zu machen. Mit $R_2 \equiv 0$ läßt sich das entstehende Phasenporträt noch einigermaßen anschaulich interpretieren. Bild 3 zeigt ein Beispiel dafür.

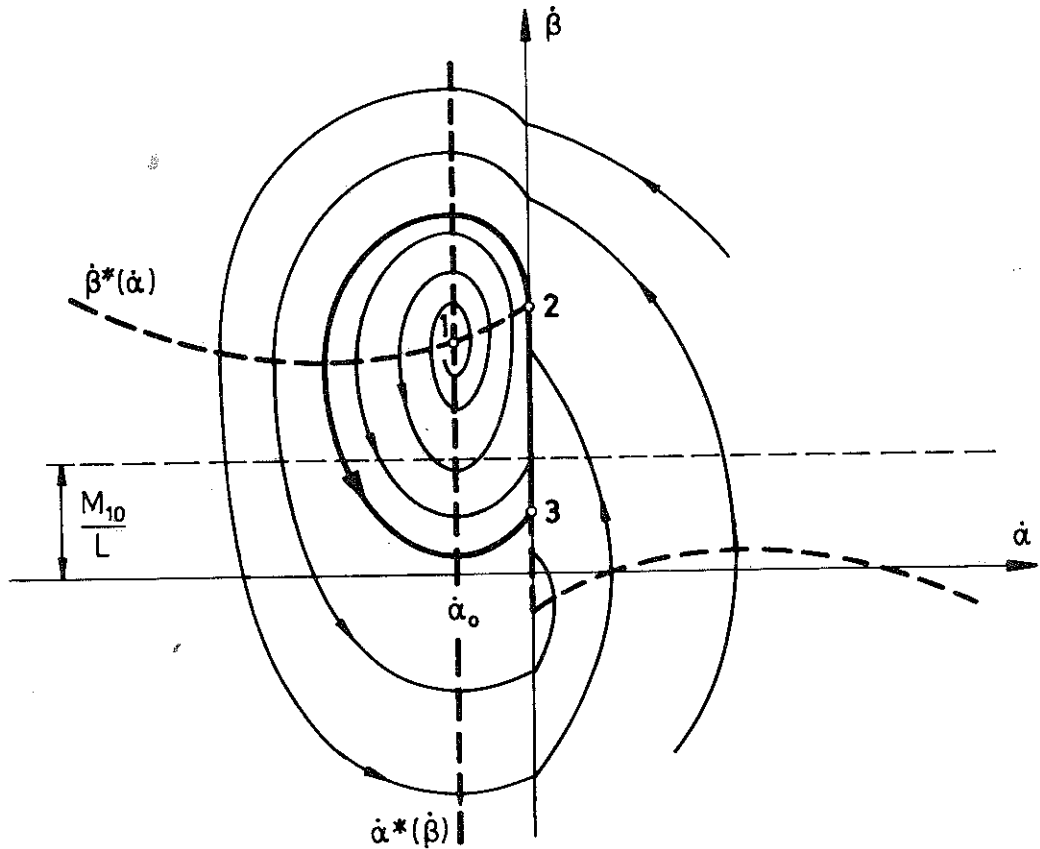


Bild 3 Phasenporträt für die Bewegungen eines Kardankreisels mit reibungsfreier innerer Rahmenachse.

Wegen (14) erhält man jetzt als Isokline für die horizontalen Richtungselemente die vertikale Gerade $\dot{\alpha}^* = -M_{20}/L = \dot{\alpha}_0$. Für $\dot{\beta}^*(\dot{\alpha})$ ist eine wegen M_{10} verschobene und reale Coulomb-Kennlinie mit rückläufigen Teilbereichen angenommen worden. Das Phasenporträt zeigt einen instabilen Strudelpunkt 1 im Innern eines Anfachungsbereiches, der von einem stabilen Grenzzyklus berandet wird. Der Teil 3 - 2 des Grenzzyklus wird durch eine Strecke der vertikalen Geraden gebildet, die den Sprung der Reibungskennlinie bei $\dot{\alpha} = 0$ kennzeichnet. Den Rest des Grenzzyklus bildet die vom Punkte 2 ausgehende und im Punkte 3 endende Phasenkurve. Das Äußere des Grenzzyklus ist Dämpfungsgebiet; zwei Phasenkurven darin sind skizziert worden. Bild 4 zeigt die Veränderung von Gleichgewichtspunkt und Grenzzyklus bei Variation von M_{20} bzw. $\dot{\alpha}_0$. Zu den Gleichgewichtswerten $(\dot{\alpha}_0)_1, (\dot{\alpha}_0)_2, (\dot{\alpha}_0)_3$ gehören die Grenzzyklen

1, 2, 3 . Bei weiterer Vergrößerung von M_{20} zieht sich der Grenzzyklus schließlich zu einem Punkt zusammen, so daß das Anfachungsgebiet verschwindet. Der zu $(\dot{\alpha}_0)_4$ gehörende singuläre Punkt ist ein stabiler Strudelpunkt.

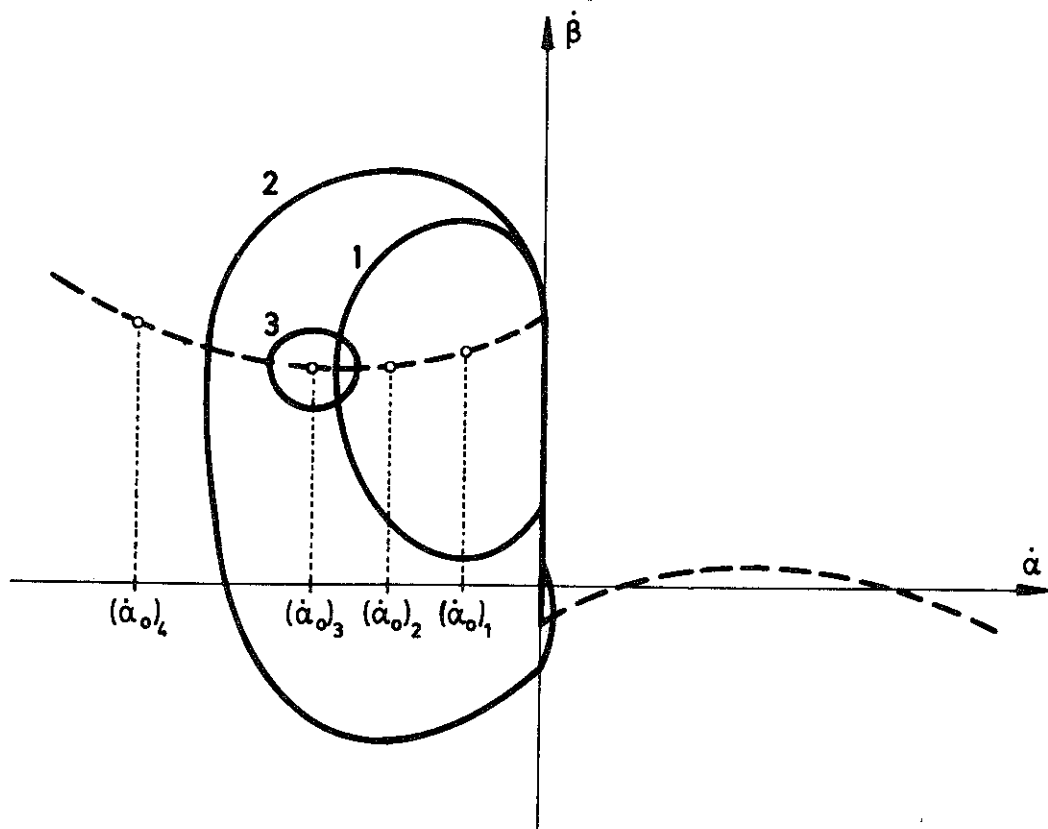


Bild 4 Veränderung des Grenzzykels mit der Größe des konstanten Momentes M_{20} um die innere Rahmenachse.

Einen interessanten, aber bereits bekannten Sonderfall (s. z.B. [1], S.354/55 oder [2]) erhält man, wenn eine ideale Coulombsche Reibungskennlinie angenommen wird. Dann ergibt sich das Phasenporträt von Bild 5 . Alle darin auftretenden Phasenkurven sind Kreisbögen, die für die linke Halbebene den Punkt 1, für die rechte Halbebene den Punkt 3 als Mittelpunkt haben. Als Grenzzyklus ergibt sich der durch den Punkt 2 laufende Kreis um 1 . Er ist durch die Besonderheit ausgezeichnet, daß nur die von außen kommenden Phasenkurven in ihm enden, während das Innere des Kreises ein Indifferenzgebiet ist, in dem die Phasenkurven selbst Kreise um 1, also konzentrisch zum Grenzzyklus sind. Man erkennt unmittelbar, daß das vertikale Stück der Kurve $\dot{\beta}^*(\dot{\alpha})$ einem Gleitzustand entspricht, bei dem der Bildpunkt entlang der Grenze zwischen rechter und linker Halbebene in den Punkt 2 hereingleitet. Die Phasenkurven können von beiden Seiten in die Gleitzzone einmünden. Jede dieser Phasenkurven

läuft so unmittelbar in den Grenzzyklus ein. Für den hier betrachteten Sonderfall können die Bewegungsgleichungen (16) bereichsweise exakt integriert werden.

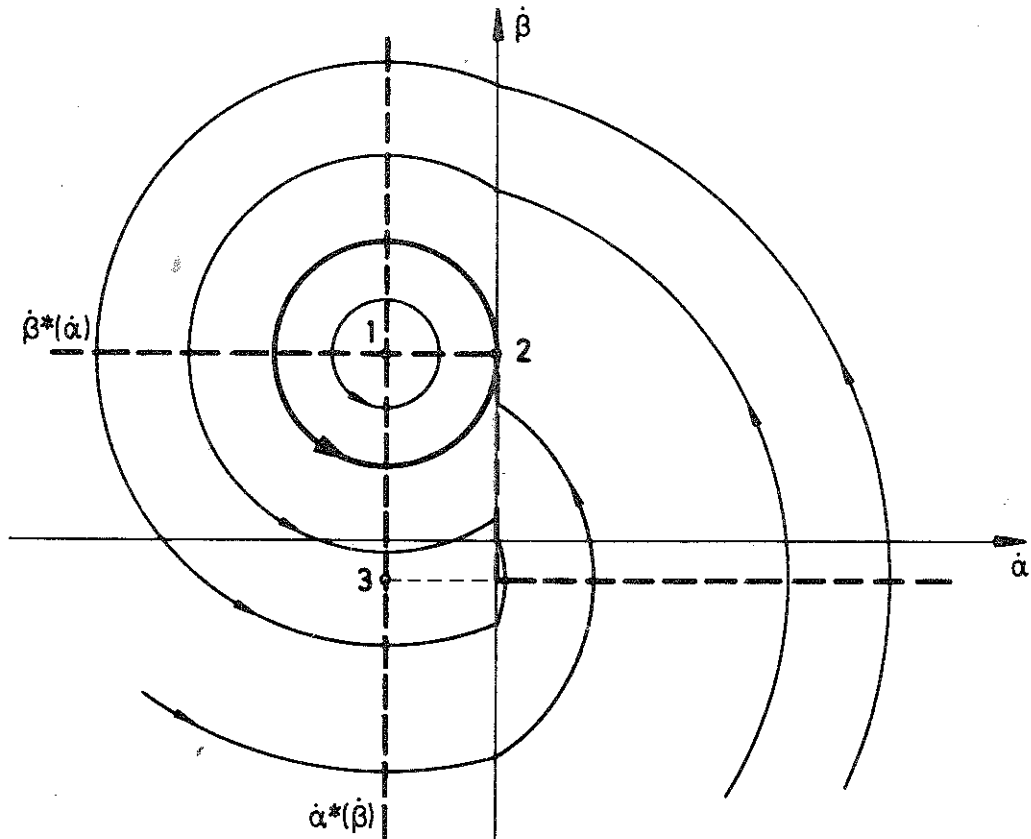


Bild 5 Phasenporträt für den Sonderfall idealer Coulomb-Reibung um die äußere und verschwindender Reibung um die innere Rahmenachse.

In den Bildern 6 und 7 sind drei Fälle skizziert worden, die bei Vorhandensein von realer Coulomb-Reibung in beiden Rahmenachsen möglich sind. Je nach der Größe der Momente M_{10} und M_{20} , die für die Parallelverschiebung der Reibungskennlinien verantwortlich sind, und je nach der Form dieser Kennlinien gibt es Grenzzyklen der verschiedensten Formen. In Bild 6a liegt ein Grenzzyklus vor, der den instabilen Strudelpunkt 1 umschließt und aus zwei Gleitgeraden, sowie den von den Eckpunkten 2 und 3 ausgehenden Phasenkurven gebildet wird. Einfacher noch ist der in Bild 6b skizzierte Fall: Hier ist nur eine Gleitgerade vorhanden. Wegen der Größe von M_{10} , das im vorliegenden Fall negativ ist, liegen Verhältnisse vor, die denen von Bild 3 ähneln.

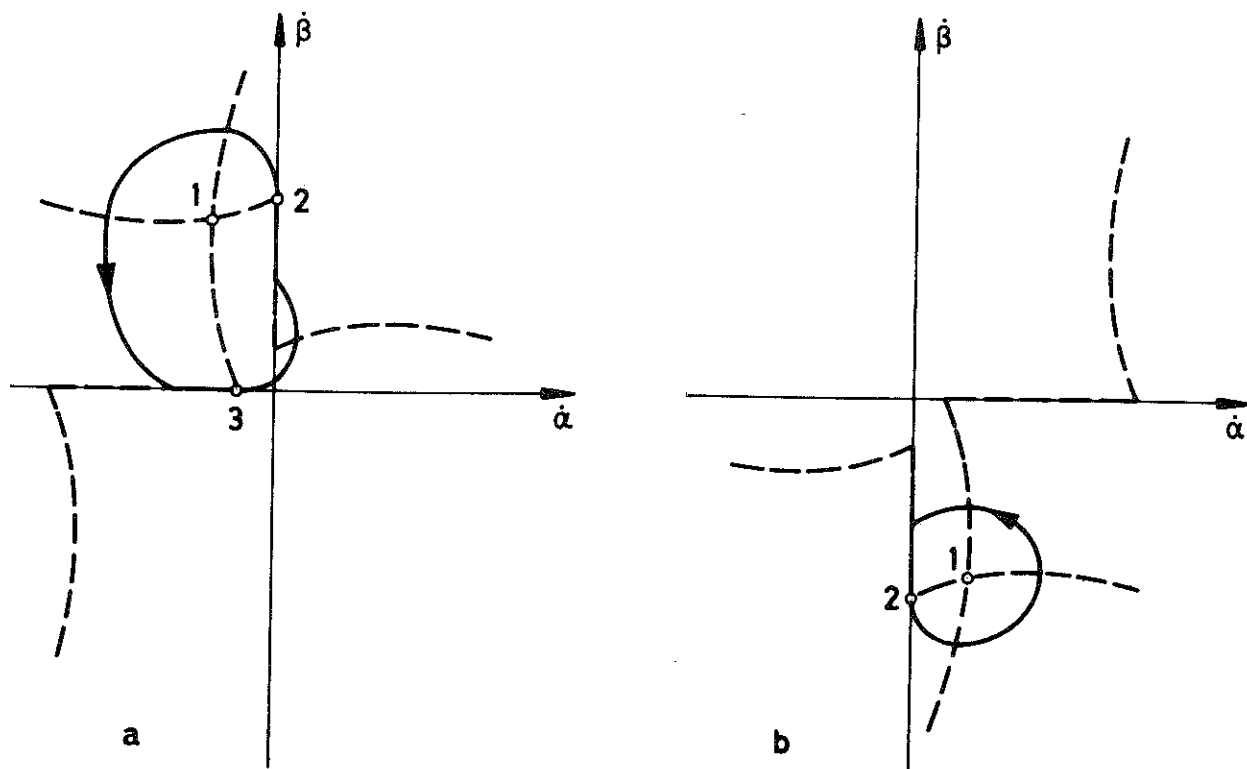


Bild 6 Grenzyklen für den Fall realer Coulomb-Reibung um beide Rahmenachsen.

In Bild 7 ist ein Grenzyklus für den Sonderfall skizziert worden, daß sich die Kurven $\dot{\alpha}^*(\beta)$ und $\dot{\beta}^*(\alpha)$ in drei Punkten schneiden. Man überzeugt sich leicht anhand der Richtungselemente, daß die Punkte 1 und 2 instabile Strudelpunkte sind. Der dazwischen liegende Punkt 3 bildet einen ausgearteten Sattelpunkt. Der Grenzyklus enthält im vorliegenden Fall drei Gleitgeraden und drei, von den Endpunkten 4, 5 und 6 ausgehende Teile von Phasenkurven. Wenn die von 4 und 6 ausgehenden Phasenkurven "vor" dem Schnittpunkt 3 auf der Ordinate enden, dann zerfällt der gezeichnete Grenzyklus in zwei unabhängige Teilzyklen um die Strudelpunkte 1 und 2, während der Sattelpunkt 3 außerhalb dieser Zyklen verbleibt. Eine nähere Untersuchung der hierbei möglichen Spezialfälle dürfte nur akademisches Interesse finden.

Bei den hier angenommenen Reibungskennlinien kann übrigens der Fall eintreten, daß der Schnittpunkt der Kurven $\dot{\alpha}^*(\beta)$ und $\dot{\beta}^*(\alpha)$ in den Nullpunkt $\dot{\alpha}_0 = \dot{\beta}_0 = 0$ fällt. Dann schneiden sich beide Kurven in den Sprung-Geraden der Reibungskennlinien. In diesem Fall tritt keine Selbsterregung auf, der singuläre Schnittpunkt wird vielmehr zu einem stabilen Knotenpunkt. Die Bewegung der Rahmen hört auch dann vollständig auf, wenn gewisse Zusatzmomente

M_{10} und M_{20} vorhanden sind. Sie dürfen jedoch auf keinen Fall die möglichen Größtwerte der Reibungsmomente überschreiten.

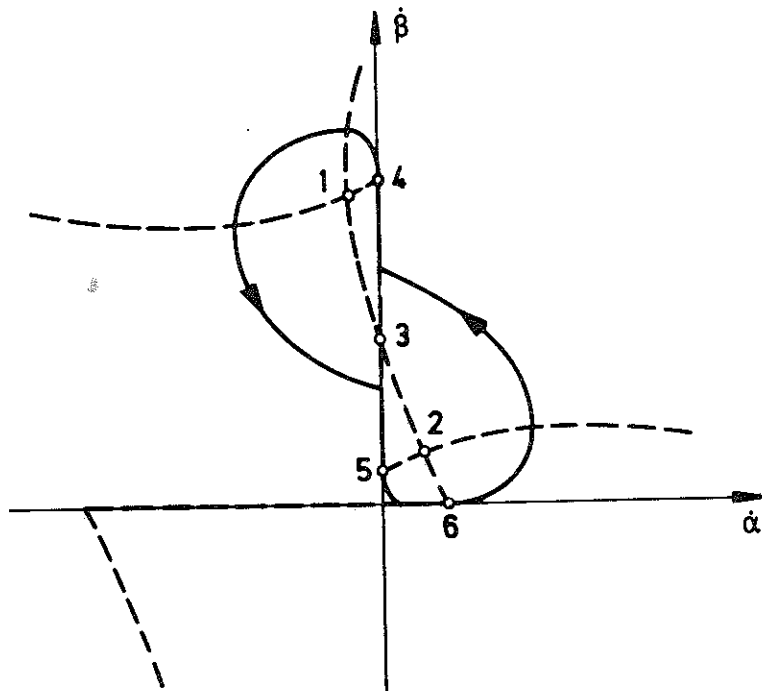


Bild 7 Sonderfall eines stabilen Grenzzyklus, der zwei instabile Strudelpunkte 1 und 2 sowie den Sattelpunkt 3 einschließt.

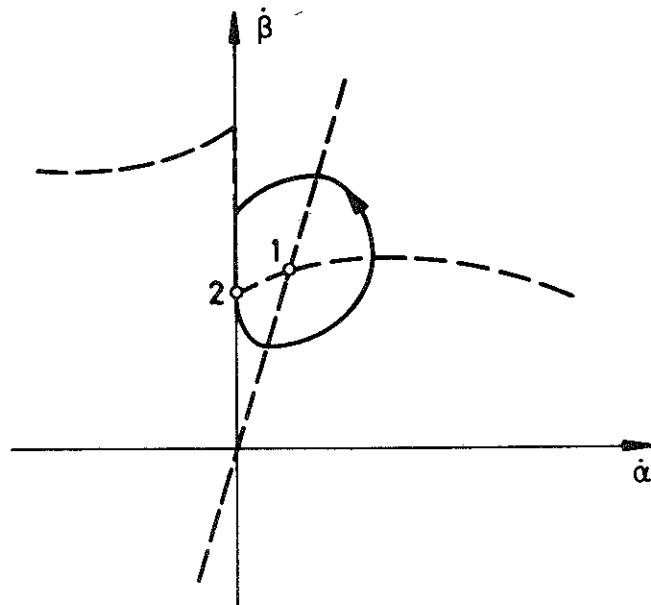


Bild 8 Grenzzyklus für viskose Reibung um die innere und reale Coulomb-Reibung um die äußere Rahmenachse.

Als letztes Beispiel ist in Bild 8 ein Fall skizziert, bei dem das Reibungsmoment um die innere Rahmenachse geschwindigkeitsproportional (viskos) und $M_{20} = 0$ angenommen wurde. Die Kurve $\alpha^*(\beta)$ artet dabei in eine durch den Nullpunkt laufende Gerade aus. Der Gleichgewichtspunkt 1 wird zum instabilen Strudelpunkt, wenn die Anfachungsbedingung (18) erfüllt ist. Das Anfachungsgebiet wird von einem stabilen Grenzzyklus eingeschlossen.

5. Zusammenfassung

Unter der Voraussetzung, daß der Drall eines kardanisch gelagerten Rotors konstant bleibt, wurden die kleinen Schwingungen des Systems bei reibungsbehafteter Lagerung für die Rahmenachsen untersucht. Für einen sonst momentenfreien Kreisel läßt sich zeigen, daß Nutationsschwingungen stets gedämpft verlaufen, unabhängig davon, welchen speziellen Verlauf die Reibungskennlinien besitzen. Es muß lediglich vorausgesetzt werden, daß die Reibungskräfte den Bewegungsgeschwindigkeiten entgegengerichtet sind. Dieses Ergebnis läßt sich auch noch auf den Fall statisch stabil gefesselter Rahmen erweitern.

Wenn außer den Reibungsmomenten weitere Zusatzmomente um die Rahmenachsen wirken, dann können selbsterregte Nutationsbewegungen entstehen. Voraussetzung dafür ist das Vorhandensein eines rückläufigen Astes der Reibungskennlinie. Die Bedingung für Selbsterregung wurde abgeleitet (Gl. 18). Das Verhalten des Systems kann aus einem Phasenporträt abgelesen werden, das sich in einer reduzierten Zustandsebene konstruieren läßt. Singuläre Punkte kennzeichnen Gleichgewichtszustände, Grenzzyklen geben die Existenz von stationären Schwingungen endlicher Amplitude an. Das Innere des Grenzzyklus (oder der Grenzzyklen) ist - von einem Sonderfall abgesehen - Anfachungsgebiet, das Äußere stets Dämpfungsgebiet. Aus der Vielzahl der möglichen Fälle wurden einige typische herausgegriffen und die zugehörigen Phasenporträts konstruiert und diskutiert.

6. Schrifttum

[1] MAGNUS, K.

Kreisel, Theorie und Anwendungen.
Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1971, Kap. 11.2 .

[2] BUTENIN, N.V.

Über den Einfluß der trockenen Reibung
auf die Bewegung eines freien Krei-
sels, der erdfest aufgestellt ist.

Priborostroenije III (1960), S.29-36.

[3] MAGNUS, K.

Schwingungen.

Stuttgart: B.G. Teubner, 1969,
Kap. 3.33 .