

Zur Theorie von Mehrkörpersystemen mit drehzahlgeregelten Rotoren*

Von K. Magnus

Übersicht: Es wird gezeigt, daß die bekannte Routhsche Methode zur Elimination von zyklischen Koordinaten dann erheblich vereinfacht werden kann, wenn die in einem System vorhandenen Rotoren durch eine Regelung auf konstanter relativer Drehzahl gehalten werden. Bewegungsgleichungen, ihre Vereinfachung für den Fall schneller Rotoren sowie zweckmäßige Verfahren zur Aufstellung linearer Gleichungen werden besprochen und am Beispiel einer Drei-Kreisel-Plattform demonstriert.

Summary: The wellknown Routh-procedure for eliminating ignorable (cyclic) coordinates can be simplified considerably if the rotors, installed in a multi-body-system, are kept on constant relative rotational velocity by control. The general equations of motion, their simplifications in the case of fast running rotors and a suitable way for deriving linear equations are discussed. As an example a three-gyro-platform is considered.

1. Aufgabenstellung

Bei seinen klassischen Arbeiten zur Theorie der Systeme starrer Körper hat Routh [1] ein Verfahren angegeben, mit dem sich die Zahl der beschreibenden Koordinaten durch Elimination der zyklischen Koordinaten reduzieren läßt. In den mit Hilfe der Routhschen Funktion abzuleitenden Bewegungsgleichungen nach Kelvin und Tait treten nur noch die nichtzyklischen Koordinaten auf. Diese Gleichungen vom Typ der Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art haben sich als ganz besonders geeignet erwiesen, wenn in Systemen mit schnelllaufenden Rotoren, also in Kreiselsystemen, die gyroskopischen Kräfte dominieren. Dann kann man sich vielfach darauf beschränken, die „verkürzte Routhsche Funktion“ zu verwenden, in der alle linear von den nichtzyklischen Koordinaten abhängigen Glieder zusammengefaßt werden (s. z. B. Merkin [2]). Auf diesem Wege gelangt man auch bei komplizierten Systemen unmittelbar zu den in der Kreiseltheorie als „Technische Kreiselgleichungen“ bekannt gewordenen Näherungen.

In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, daß man in einem technisch durchaus interessierenden Sonderfall durch eine viel einfachere Prozedur zum gleichen Ergebnis kommen kann. Wenn die im System vorkommenden Rotoren durch eine Regelung auf konstanter Drehzahl relativ zum Rotorgehäuse gehalten werden, dann sind die Drehwinkel um die Rotorachsen zwar keine zyklischen Koordinaten mehr, man kann aber dennoch ein dem Routhschen Vorgehen durchaus analoges, sogar einfacheres Verfahren verwenden. Es läßt sich zeigen, daß bereits die kinetische Energie des Systems so formuliert werden kann, daß Bewegungsgleichungen vom Typ der von Kelvin und Tait abgeleiteten erhalten werden. Die Einführung der Routhschen Funktion erübrigt sich dabei.

Weiterhin soll gezeigt werden, daß auf dem angedeuteten Wege auch die Näherungsgleichungen für Systeme mit dominierenden gyroskopischen Kräften sowie die linearisierten Bewegungsgleichungen für „Kleine Schwingungen“ unmittelbar gewonnen werden können, ohne daß zuvor die nichtlinearen Gleichungen ausgerechnet werden müssen. Man kann dieses Vorgehen auch als eine Verallgemeinerung der von Föppl [3] angegebenen und seither in der Kreiseltheorie allgemein verwendeten Methode betrachten.

Am Beispiel einer Drei-Kreisel-Plattform soll das Verfahren demonstriert werden.

* Heinz Neuber zum 70. Geburtstag gewidmet.

2. Modifikation des Kelvin-Tait-Verfahrens bei Vorhandensein von drehzahleregelten Rotoren

Bei der Behandlung von Kreiselsystemen hat es sich als zweckmäßig erwiesen, im Ausdruck für die kinetische Energie T den Anteil der Rotoren abzuspalten:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{A}_R \boldsymbol{\omega} . \quad (1)$$

Darin ist $\dot{\mathbf{q}}$ der n -Vektor der nicht-zyklischen Geschwindigkeiten, \mathbf{A} ist die $n \times n$ -Massenmatrix des Systems für die nichtzyklischen Koordinaten und \mathbf{A}_R die $m \times m$ -Diagonalmatrix der Trägheitsmomente C_i bezüglich der Symmetrieachsen für die m im System vorhandenen Rotoren. Der m -Vektor $\boldsymbol{\omega}$ der absoluten Winkelgeschwindigkeiten bezüglich der Rotorachsen setzt sich aus dem Vektor $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ der entsprechenden relativen Winkelgeschwindigkeiten sowie aus Führungsanteilen zusammen:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} . \quad (2)$$

Darin hat die Matrix \mathbf{B} die Dimension $m \times n$; ihre Elemente B_{ij} sind gleich den Richtungs-cosinus zwischen der Symmetrieachse des i -ten Rotors und der Richtung derjenigen verallgemeinerten Geschwindigkeit \dot{q}_j , die Führungsdrehung für den i -ten Rotor ist:

$$B_{ij} = [\cos(\gamma_{ij})]_F . \quad (3)$$

Die für die folgenden Untersuchungen wichtige Matrix \mathbf{B} ist daher zugleich Strukturmatrix — weil sie den topologischen Aufbau des Systems widerspiegelt — und Einbaumatrix — weil die räumliche Orientierung der Rotorachsen im System daraus abzulesen ist.

Bei antriebs- und reibungslos laufenden Rotoren sind die φ_i zyklische Koordinaten, durch deren Elimination man wie folgt zu den Kelvin-Taitschen Bewegungsgleichungen geführt wird. Die zu den φ_i gehörenden konstanten zyklischen Impulse p_i können zu einem Impulsvektor \mathbf{p} zusammengefaßt werden; es gilt

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\varphi}}} = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} = [\mathbf{A}_R \boldsymbol{\omega}]^T = \mathbf{p}^T = \text{const} . \quad (4)$$

Damit wird die Routhsche Funktion R gebildet

$$\left. \begin{aligned} R &= T - \mathbf{p}^T \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \underbrace{\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}}_{R_2} + \underbrace{\mathbf{p}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}}_{R_1} - \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{p}^T (\mathbf{A}_R)^{-1} \mathbf{p}}_{R_0} , \\ &= R_2 + R_1 - R_0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

dann werden mit den gyroskopischen Kräften

$$\mathbf{F}^G = \left[\frac{\partial R_1}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \right]^T = \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}} , \quad (6)$$

aus dem Lagrangeschen Ansatz die Kelvin-Tait-Gleichungen in der Form

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R_2}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial R_2}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}^T + (\mathbf{F}^G)^T \quad (7)$$

erhalten. Darin ist \mathbf{Q} der Vektor der verallgemeinerten Kräfte. Eine Näherung für Systeme mit dominierenden gyroskopischen Kräften erhält man aus (7) durch Vernachlässigung der linken Seite, also Nullsetzen der rechten Seite.

Sind nun die Rotoren mit einem geregelten Antrieb versehen, durch den die relativen Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_i$ konstant gehalten werden, dann läßt sich die beschriebene Prozedur nicht durchführen, weil die φ_i nicht mehr zyklisch sind. Es müßten ja die die Regelung bewirkenden, von den φ_i abhängigen Kräfte in den Q_i berücksichtigt werden. Dennoch können völlig analoge Bewegungsgleichungen abgeleitet werden, wenn anstelle der zyklischen Impulse p_i die jetzt als konstant vorausgesetzten Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_i$ oder die zugeordneten Drehimpulse $L_i = C_i \dot{\varphi}_i$ verwendet werden. Die genauere Funktion der Regelung ist dabei völlig ohne Einfluß, sie wird hier als ideal funktionierend vorausgesetzt.

Mit dem Vektor \mathbf{L} des konstanten Relativdralls

$$\mathbf{L} = \mathbf{A}_R \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \text{const.} \quad (8)$$

kann man mit (2) den Ausdruck (1) für die kinetische Energie wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^T (\mathbf{A} + \mathbf{B}^T \mathbf{A}_R \mathbf{B}) \dot{\boldsymbol{q}} + \mathbf{L}^T \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2} \mathbf{L}^T (\mathbf{A}_R)^{-1} \mathbf{L}. \\ &= \underbrace{\quad}_{T_2} + \underbrace{\quad}_{T_1} + \underbrace{\quad}_{T_0}. \end{aligned} \quad (9)$$

Wie zuvor die Routhsche Funktion R nach (5) ist nunmehr T selbst in drei Anteile T_2 , T_1 und T_0 aufgespalten, die quadratisch, linear bzw. unabhängig von $\dot{\boldsymbol{q}}$ sind. Da T_0 außerdem auch nicht von \boldsymbol{q} abhängt, hat man als Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} (T_2 + T_1) \right] - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}} (T_2 + T_1) = \mathbf{Q}^T. \quad (10)$$

Ausgerechnet und transponiert erhält man daraus:

$$\mathbf{A}^* \ddot{\boldsymbol{q}} + \mathbf{G}_A \dot{\boldsymbol{q}} + \mathbf{G}_R \dot{\boldsymbol{q}} = \mathbf{Q} \quad (11)$$

mit

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \mathbf{A}_R \mathbf{B}, \quad (12)$$

$$\mathbf{G}_A = \frac{\partial (\mathbf{A}^* \dot{\boldsymbol{q}})}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (\mathbf{A}^* \dot{\boldsymbol{q}})}{\partial \boldsymbol{q}} \right]^T, \quad (13)$$

$$\mathbf{G}_R = \frac{\partial (\mathbf{B}^T \mathbf{L})}{\partial \boldsymbol{q}} - \left[\frac{\partial (\mathbf{B}^T \mathbf{L})}{\partial \boldsymbol{q}} \right]^T = -\mathbf{G}_R^T. \quad (14)$$

Bei der Ableitung von (11) wurde der meist vorliegende Fall angenommen, daß \mathbf{A}^* und $\mathbf{B}^T \mathbf{L}$ nicht explizit von der Zeit abhängen. Die Massenmatrix \mathbf{A}^* wird aus \mathbf{A} erhalten, indem man die Anteile der Rotorträgheitsmomente C_i hinzufügt, also das System mit eingefrorenen Rotoren betrachtet. Dieses physikalisch einleuchtende Ergebnis ist bereits früher bei Untersuchungen am Kardankreisel gefunden worden [4]. Die als ideal angenommene Drehzahlregelung wirkt sich so aus, als ob die Rotoren — ohne Verlust ihres Relativdralls — im System arretiert wären. Die gyroskopische Matrix \mathbf{G}_R ist schiefsymmetrisch; \mathbf{G}_R gibt die Kreiselkräfte infolge der Rotoren wieder, während \mathbf{G}_A durch die Coriolisanteile des sonstigen Systems entsteht. In Systemen mit schnellaufenden Rotoren sind die Kräfte $\mathbf{G}_R \dot{\boldsymbol{q}}$ meist erheblich größer als die Corioliskräfte $\mathbf{G}_A \dot{\boldsymbol{q}}$, so daß man diese oft vernachlässigen kann. Bei der Untersuchung der Präzessionsbewegungen kann man außerdem die Beschleunigungsglieder fortlassen, so daß dann als Gleichung einer technischen Näherungstheorie

$$\mathbf{G}_R \dot{\boldsymbol{q}} = \left\{ \frac{\partial (\mathbf{B}^T \mathbf{L})}{\partial \boldsymbol{q}} - \left[\frac{\partial (\mathbf{B}^T \mathbf{L})}{\partial \boldsymbol{q}} \right]^T \right\} \dot{\boldsymbol{q}} = \mathbf{Q} \quad (15)$$

verwendet werden kann. Damit ist ein Rezept gewonnen, das vollkommen dem bekannten Vorgehen über die Kelvin-Tait-Gleichungen entspricht. Man hat lediglich anstelle der verkürzten Routhschen Funktion $R_1 = \mathbf{p}^T \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{q}}$ jetzt die verkürzte kinetische Energie $T_1 = \mathbf{L}^T \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{q}} = \dot{\boldsymbol{q}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{L}$ in die Lagrangeschen Gleichungen einzusetzen oder aber (15) unmittelbar zu verwenden.

3. Lineare Näherungen

Obwohl die linke Seite der in (11) angegebenen Bewegungsgleichung linear in $\ddot{\boldsymbol{q}}$ und $\dot{\boldsymbol{q}}$ ist, hängen im allgemeinen \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{G}_R selbst noch von \boldsymbol{q} , \mathbf{G}_A außerdem von $\dot{\boldsymbol{q}}$ ab. Ferner können die verallgemeinerten Kräfte \mathbf{Q} in nichtlinearer Weise von $\dot{\boldsymbol{q}}$ und \boldsymbol{q} abhängen. Die Bewegungsgleichungen sind daher bereits bei relativ einfachen Systemen so kompliziert, daß exakte Lösungen kaum, numerische oder analytische Näherungen oft nur mit großem Aufwand gewonnen werden können. Deshalb haben lineare Näherungen z. B. für die Bestimmung der Eigenwerte und der Eigenvektoren nach wie vor große Bedeutung. Es wäre allerdings nicht zweckmäßig, wollte man den Linearisierungsprozeß erst an den Bewegungsgleichungen selbst

vornehmen. Vielmehr läßt sich das Rechenverfahren so einrichten, daß man mit weniger Aufwand zu den gewünschten Gleichungen gelangt. Vorbilder für diese Art von Linearisierungsprozessen sind bekannt: außer der bereits eingangs erwähnten Methode von Föppl [3] haben Roberson und Likins [5] ein Verfahren angegeben, das für Bewegungsgleichungen vom Euler-schen Typ geeignet ist. Hier sollen demgegenüber die in Abschnitt 2 untersuchten Gleichungen vom Lagrange-Typ als Ausgangspunkt verwendet werden.

In sehr vielen in der Praxis realisierten Fällen weichen die Symmetrieachsen der Rotoren nur wenig von bestimmten Normrichtungen ab, die in einem meist fahrzeugfesten Bezugssystem (Schiff, Flugzeug, Raumflugkörper) definiert sind. Das gilt zum Beispiel für die meisten Meßkreisel, für viele Plattformtypen sowie für Drallräder oder Stellkreisel zur Lageregelung. In diesen Fällen kann man neben dem fahrzeugfesten Bezugssystem 1, 2, 3 für jeden der Rotoren ein weiteres, ebenfalls fahrzeugfestes System $1^i, 2^i, 3^i$ verwenden, dessen 3^i -Achse mit der normalen Arbeitsrichtung der Rotor-Symmetrieachse zusammenfällt. Die Abweichungen der Rotorachse von der Normrichtung können durch zwei Winkel α_i, β_i beschrieben werden, die zum Beispiel als Kardanwinkel definiert werden. Bei Wendekreiseln würde bereits einer dieser Winkel zur Beschreibung der Rotorachslage im Bezugssystem ausreichen.

Wenn m Rotoren vorhanden sind, dann kann der Bewegungszustand des Systems durch den n -Vektor

$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-2m}, \dot{\alpha}_1, \dot{\beta}_1, \dots, \dot{\alpha}_m, \dot{\beta}_m]^T \tag{16}$$

beschrieben werden. Die Matrix \mathbf{B} von (2) mit den Elementen (3) läßt sich nun aufspalten

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_A \quad \text{mit} \quad \mathbf{B}_0 = \text{const.}, \quad \mathbf{B}_A = \mathbf{B}_A(\alpha, \beta). \tag{17}$$

Darin wird die Normstellung der Rotoren, also die Richtung der 3^i -Achsen durch die konstante Matrix \mathbf{B}_0 beschrieben, während in \mathbf{B}_A die Abweichungen von der Normstellung ausgedrückt werden. Wenn α_i und β_i in üblicher Weise als Kardanwinkel definiert werden, dann sind die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\alpha}_i$ und $\dot{\beta}_i$ zugleich auch Führungsgeschwindigkeiten für den i -ten Rotor. Man erhält deshalb für die zugeordneten Elemente (3) der Matrix \mathbf{B}

$$\begin{aligned} \cos(\dot{\alpha}_i, 3^i) &= \sin \beta_i \approx \beta_i & \text{wegen} & \quad \sphericalangle(\dot{\alpha}_i, 3^i) = \frac{\pi}{2} - \beta, \\ \cos(\dot{\beta}_i, 3^i) &= 0 & \text{wegen} & \quad \sphericalangle(\dot{\beta}_i, 3^i) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

In einem System mit m Rotoren von je zwei Freiheitsgraden der Rotorachsen gegenüber dem Bezugssystem hat dann \mathbf{B} die allgemeine Gestalt:

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \beta_1 & 0 & - & - \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \beta_2 & 0 \\ i = 1(1) & (n - 2m) & | & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ j = 1(1) & m & | & \vdots & \dots & \dots & - & - \\ \dots & \dots & | & \vdots & \dots & \dots & - & \beta_m & 0 \end{array} \right]. \tag{18}$$

Die Elemente der ersten $n - 2m$ Spalten bestimmen die Struktur des Systems und damit zugleich den konstanten Anteil \mathbf{B}_0 ; sie können aber auch Anteile der Abweichungs-Matrix \mathbf{B}_A enthalten. In der rechten Teilmatrix von (18) (Spalten $n - 2m + 1$ bis n) ist eine Schrägspalte mit den β_i , die Nachbarspalte mit Nullen besetzt; die anderen Stellen bleiben unbesetzt, weil die \dot{q}_i hier nicht Führungsdrehungen für die 3^i -Achsen sind. Bei der numerischen Ausrechnung muß hier natürlich jeweils „Null“ eingesetzt werden.

Bei Beschränkung auf lineare Glieder in den Bewegungsgleichungen (11) genügt es, in \mathbf{B}_A nur die linear von α_i, β_i abhängigen Glieder zu berücksichtigen. Da außerdem der Coriolisanteil $G_A \dot{\mathbf{q}}$ in (11) quadratisch in den $\dot{\mathbf{q}}$ ist, erhält man als linearisierte Bewegungsgleichungen:

$$(\mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0^T \mathbf{A}_R \mathbf{B}_0) \ddot{\mathbf{q}} + \left\{ \frac{\partial(\mathbf{B}_A^T \mathbf{L})}{\partial \mathbf{q}} - \left[\frac{\partial(\mathbf{B}_A^T \mathbf{L})}{\partial \mathbf{q}} \right]^T - \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)_0 \right\} \dot{\mathbf{q}} - \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} \right)_0 \mathbf{q} = \mathbf{Q}_0. \tag{19}$$

Die hier vorkommenden, durch den Index „Null“ gekennzeichneten Größen entstehen aus den nicht indizierten Ausdrücken durch Nullsetzen der q_i bzw. \dot{q}_i . Für Näherungen im Sinne der Präzessionstheorie kann noch das Beschleunigungsglied vernachlässigt werden. Die Zulässigkeit einer derartigen Näherung muß jedoch in jedem Fall gesondert geprüft werden, da ein Dominieren der gyroskopischen Anteile allein hierfür nicht ausreicht; es muß vielmehr noch $\det \mathbf{G}_R = 0$ gefordert werden und es dürfen keine Mehrfachwurzeln auftreten (s. z. B. [2], § 18).

In Sonderfällen kann es notwendig sein, die Linearisierung nicht für alle, sondern nur für einige der Koordinaten q_i durchzuführen. Ein Beispiel hierzu wird im Abschnitt 4 behandelt werden.

Aus (19) ist zu erkennen, daß zur Aufstellung der Präzessionsgleichungen lediglich der Anteil \mathbf{B}_A der Struktur- und Einbau-Matrix sowie die verallgemeinerten Kräfte \mathbf{Q} bestimmt werden müssen. Wenn die vollständigen Gleichungen benötigt werden, dann sind zusätzlich auch noch \mathbf{A} und \mathbf{B}_0 und daraus $\mathbf{A}_0^* = \mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0^T \mathbf{A}_R \mathbf{B}_0$ auszurechnen.

4. Beispiel: Eine Drei-Kreisel-Plattform

Es sollen die Bewegungsgleichungen für die in Abb. 1 skizzierte, allseitig drehbar gelagerte Plattform diskutiert werden, auf der sich drei rahmengelagerte Lagekreisel befinden. Die notwendigen Momentegeber, Abgriffe, Fesselungen und Beschleunigungsmesser sind hier fortgelassen worden. Die vorhandenen Achsen werden von 1 bis 11 durchnummeriert, wobei 1, 2, 3 die Achsen des plattformfesten Referenzsystems sein sollen. Es liegt ein 9-Körper-System mit 3 Rotoren vor, das 8 Freiheitsgrade besitzt, wenn man die Drehungen der Rotoren um die Achsen 6, 8 und 11 nicht mitzählt. Hierfür sollen vielmehr konstante relative Drehgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_6, \dot{\varphi}_8, \dot{\varphi}_{11}$, also ideal arbeitende Drehzahlregelungen vorausgesetzt werden. Mit den Winkelgeschwindigkeitskomponenten $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ der Plattform wird der Bewegungszustand des Systems durch

$$\dot{\mathbf{q}} = [\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dot{\alpha}_4, \dot{\beta}_5, \dot{\beta}_7, \dot{\alpha}_9, \dot{\beta}_{10}]^T \quad (20)$$

beschrieben, wobei die Indizes sinngemäß die jeweiligen Achsen bezeichnen. Die Führungsdrehungen für die Rotorachsen 6, 8, 11 können aus der in Abb. 2 skizzierten Baumstruktur des

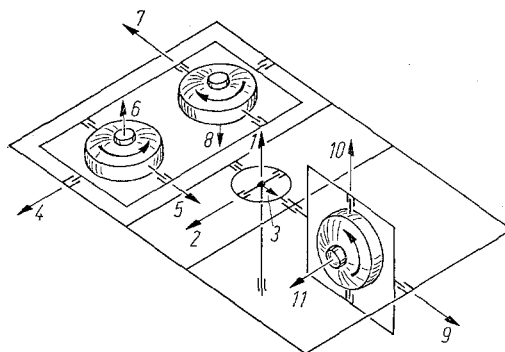


Abb. 1. Drei-Kreisel-Plattform

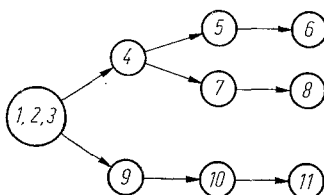


Abb. 2. Strukturschema für die Plattform von Abb. 1

Systems entnommen werden. Daraus ergibt sich die Besetzung der \mathbf{B} -Matrix. Wenn — aus einem später zu erklärenden Grund — zunächst auch die in den α und β quadratischen Glieder mit berücksichtigt werden, dann hat man

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & - & - \\ -1 & 0 & 0 & 0 & - & 0 & - & - \\ 0 & 1 & 0 & - & - & - & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\mathbf{B}_A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(\alpha_4^2 + \beta_5^2) & \beta_5 & -\alpha_4 & \beta_5 & 0 & - & - & - \\ \frac{1}{2}(\alpha_4^2 + \beta_7^2) & \beta_7 & \alpha_4 & \beta_7 & - & 0 & - & - \\ -\alpha_9 & -\frac{1}{2}(\alpha_9^2 + \beta_{10}^2) & \beta_{10} & - & - & - & \beta_{10} & 0 \end{bmatrix}.$$

Die hier durch Striche gekennzeichneten, strukturell unbesetzten Stellen sind für die Ausrechnung jeweils durch „Null“ zu besetzen. Die einfache Form für \mathbf{B}_0 ist auf die Tatsache zurückzuführen, daß die Rotorachsen parallel zu den Bezugsachsen 1 bzw. 2 angenommen werden. Für das Weitere sei angenommen, daß die Rotoren bezüglich der 6, 8, 11-Achsen symmetrisch sind und daß alle Hauptachsen von Rotoren, Rahmen und Gehäusen in der Normalstellung zu den Bezugsachsen 1, 2, 3 parallel sind. Trägheitsmomente J_i werden durch die den jeweiligen Achsen entsprechenden Indizes gekennzeichnet, die Deviationsmomente der Plattform bezüglich des 1, 2, 3-Bezugssystems seien J_{12} , J_{13} , J_{23} . Die Trägheitsmomente J_i sollen jeweils auch die Anteile aller zwangsläufig mitdrehenden Teilkörper enthalten, wobei diese in den Normallagen angenommen werden. So enthält z. B. J_4 zugleich auch Anteile von den beiden um die Achsen 5 bzw. 7 drehenden Rotorgehäuse sowie von den um 6 bzw. 8 drehenden Rotoren. Die Trägheitsmomente C_6 , C_8 , C_{11} der Rotoren um ihre Symmetrieachsen sind in den J_i nicht enthalten. Damit erhält man mit (21) und

$$\mathbf{L} = \mathbf{A}_R \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \begin{bmatrix} C_6 & 0 & 0 \\ 0 & C_8 & 0 \\ 0 & 0 & C_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_6 \\ \dot{\varphi}_8 \\ \dot{\varphi}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_6 \dot{\varphi}_6 \\ C_8 \dot{\varphi}_8 \\ C_{11} \dot{\varphi}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_6 \\ L_8 \\ L_{11} \end{bmatrix} \quad (22)$$

aus dem Ausdruck für die kinetische Energie die Massenmatrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} J_1 & J_{12} & J_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{10} \\ J_{12} & J_2 & J_{23} & J_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_{13} & J_{23} & J_3 & 0 & J_5 & -J_7 & J_9 & 0 \\ 0 & J_4 & 0 & J_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_5 & 0 & J_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_7 & 0 & 0 & J_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_9 & 0 & 0 & 0 & J_9 & 0 \\ J_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{10} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

mit (21) die zusätzliche Massenmatrix (bis zu Gliedern erster Ordnung):

$$\mathbf{B}^T \mathbf{A}_R \mathbf{B} = \begin{bmatrix} J_6 + J_8 & 0 & 0 & J_6 \beta_5 - J_8 \beta_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{11} \beta_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_6 \beta_5 - J_8 \beta_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{11} \beta_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

aus (13) die Matrix der Corioliskräfte (bis zu Gliedern erster Ordnung):

$$G_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & J_6 \dot{\alpha}_4 & -J_8 \dot{\alpha}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{11} \dot{\alpha}_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_6 \dot{\Omega}_1 & -J_8 \dot{\Omega}_1 & 0 & 0 \\ -J_6 \dot{\alpha}_4 & 0 & 0 & -J_6 \dot{\Omega}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_8 \dot{\alpha}_4 & 0 & 0 & J_8 \dot{\Omega}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{11} \dot{\Omega}_2 \\ 0 & -J_{11} \dot{\alpha}_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J_{11} \dot{\Omega}_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

und aus (14) die gyroskopische Matrix (bis zu Gliedern erster Ordnung):

$$G_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (L_8 - L_6) \alpha_4 & -L_6 \beta_5 & L_8 \beta_7 & -L_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_6 & L_8 & -L_{11} \alpha_9 & -L_{11} \beta_{10} \\ 0 & 0 & 0 & L_8 - L_6 & 0 & 0 & 0 & L_{11} \\ (L_6 - L_8) \alpha_4 & 0 & L_6 - L_8 & 0 & L_6 & L_8 & 0 & 0 \\ L_6 \beta_5 & -L_6 & 0 & -L_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -L_8 \beta_7 & -L_8 & 0 & -L_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{11} & L_{11} \alpha_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{11} \\ 0 & L_{11} \beta_{10} & -L_{11} & 0 & 0 & 0 & -L_{11} & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Mit diesen Matrizen können nun die 8 Bewegungsgleichungen (11) für die in Abb. 1 skizzierte Plattform leicht angeschrieben werden. Das soll hier nicht in allgemeiner Form geschehen. Jedoch sollen, da in (24), (25), (26) Glieder bis zur ersten Ordnung in α , β mitgenommen wurden, also in den Bewegungsgleichungen (11) auch Glieder zweiter Ordnung auftreten, Überlegungen zur gegenseitigen Abschätzung der vorkommenden Glieder für den Fall schnelllaufender Rotoren angestellt werden. Bei diesen Rotoren sind die Drallkomponenten L_6 , L_8 , L_{11} so groß, daß — wie die Erfahrung zeigt — bei Abschätzungen der mit L multiplizierten Glieder auch quadratische Glieder berücksichtigt werden müssen, wenn die gyroskopischen Effekte hinreichend genau erfaßt werden sollen. Das ist insbesondere dann der Fall, wenn die Winkelgeschwindigkeiten Ω_i des Bezugssystems als Führungsbewegungen für die Rotoren nicht als beliebig klein im Sinne einer Theorie kleiner Schwingungen angenommen werden können. Dann kann zwar bezüglich der α und β , nicht aber bezüglich der Ω linearisiert werden. Um das zu ermöglichen, sind bei der vorausgegangenen Durchrechnung auch quadratische Anteile mitgezogen worden.

Wenn nun eine Linearisierung bezüglich der α und β vorgenommen wird, dann stellt man zunächst fest, daß zu allen aus $G_A \dot{q}$ von (11) folgen Gliedern vom Typ $J \Omega \dot{\alpha}$ bzw. $J \Omega \dot{\beta}$ entsprechende Glieder aus $G_R \dot{q}$ vom Typ $L \dot{\alpha}$ bzw. $L \dot{\beta}$ gefunden werden. Da nun bei schnellen Rotoren stets $L \gg J \Omega$ gilt und außerdem alle weiteren in $G_A \dot{q}$ vorkommenden Glieder quadratisch bezüglich α , β sind, kann das Coriolisglied $G_A \dot{q}$ in (11) fortgelassen werden. Wenn man nun — im Sinne des oben Gesagten — die Ω_i als Führungsdrehungen betrachtet und in den Gleichungen für die Rahmensysteme auf die rechten Seiten bringt, dann ergeben sich für die um die fünf Rahmenachsen drehbaren Teilsysteme die folgenden in α und β linearen Bewegungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} 4: & J_4 \dot{\alpha}_4 + L_6 \dot{\beta}_5 + L_8 \dot{\beta}_7 + (L_6 - L_8) \Omega_1 \alpha_4 + J_6 \Omega_1 \dot{\beta}_5 - J_8 \Omega_1 \dot{\beta}_7 = Q_4 - J_4 \dot{\Omega}_2 - (L_6 - L_8) \Omega_3, \\ 5: & J_5 \dot{\beta}_5 - L_6 \dot{\alpha}_4 + L_6 \Omega_1 \dot{\beta}_5 = Q_5 - J_5 \dot{\Omega}_3 - L_6 \Omega_2, \\ 7: & J_7 \dot{\beta}_7 - L_8 \dot{\alpha}_4 - L_8 \Omega_1 \dot{\beta}_7 = Q_7 + J_7 \dot{\Omega}_3 + L_8 \Omega_2, \\ 9: & J_9 \dot{\alpha}_9 + L_{11} \dot{\beta}_{10} + L_{11} \Omega_2 \alpha_9 + J_{11} \dot{\Omega}_2 \dot{\beta}_{10} = Q_9 - J_9 \dot{\Omega}_3 - L_{11} \Omega_1, \\ 10: & J_{10} \dot{\beta}_{10} - L_{11} \dot{\alpha}_9 + L_{11} \Omega_2 \dot{\beta}_{10} = Q_{10} - J_{10} \dot{\Omega}_1 + L_{11} \Omega_3. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Die einzelnen Glieder dieser Gleichungen können anschaulich gedeutet werden:

- die Beschleunigungsglieder vom Typ $J\ddot{\alpha}$ bzw. $J\ddot{\beta}$ brauchen nur bei der Untersuchung von Nutations- oder schnellen Pendel-Schwingungen berücksichtigt zu werden. Bei der Berechnung der wichtigeren Präzisionsbewegungen können sie fortgelassen werden;

- die Glieder vom Typ $L\dot{\alpha}$ bzw. $L\dot{\beta}$ kennzeichnen die Kreiselwirkung der Rotoren; meist sind dies die dominierenden Anteile;

- Glieder vom Typ $L\Omega\alpha$ bzw. $L\Omega\beta$ sind Ausdruck einer gyroskopischen Fesselung, die durch die Führungsdrehung Ω hervorgerufen wird. Die Fesselung ist statisch stabil (instabil), wenn die Drehrichtungen für Rotor und Führungsdrehung gleich (verschieden) sind. Darin kommt die Tendenz zum gleichsinnigen Parallelismus zum Ausdruck. Glieder dieses Typs haben entscheidenden Einfluß zum Beispiel bei der Berechnung des Kurvenflugverhaltens von Kreiselhorizonten oder Stellkreiseln; sie spielen auch bei Satelliten mit Drallrädern eine große Rolle;

- die Glieder vom Typ $J\Omega\beta$ geben den Einfluß von Änderungen der Führungsgeschwindigkeiten an. Dieser Einfluß ist im allgemeinen gering;

- auch die Glieder vom Typ $J\dot{\Omega}$ auf den rechten Seiten sind von Führungs-Beschleunigungen (-Verzögerungen) abhängig. Sie müssen im Zusammenhang mit den auf den linken Seiten stehenden Gliedern vom Typ $J\ddot{\alpha}$ bzw. $J\ddot{\beta}$ gesehen werden;

- sehr wichtig sind wieder die Glieder vom Typ $L\Omega$. Sie geben die infolge der Führungsdrehungen entstehenden Kreiselkräfte wieder, die hier als Störungen zu betrachten sind.

Bemerkenswert ist, daß alle drei Komponenten Ω_i der Führungsdrehung in jede der fünf Gleichungen von (27) eingehen. Das Gesamtsystem der Plattform ist also stark verkoppelt. Wenn dagegen die Ω_i als Zeitfunktionen vorgegeben sind und keine Rückwirkung der Rotoren auf die Plattform stattfindet, dann zerfällt das Gleichungssystem (27) in die voneinander unabhängigen Teilsysteme 4, 5, 7 sowie 9, 10.

In völlig analoger Weise, wie es hier für das Beispiel einer Plattform gezeigt wurde, lassen sich auch die Gleichungen für Satelliten oder Raumflugkörper mit schwenkbar eingebauten Drallrädern in zielstrebigere Weise aufstellen. Dabei können freilich bei der Beurteilung von Vernachlässigungen andere Gesichtspunkte als die hier beschriebenen maßgebend sein.

Literatur

1. Routh, E. I.: Stability of a given state of motion. London 1877, Kap. IV, 20
2. Merkin, D. R.: Kreiselssysteme (russisch). Moskau 1956, § 28
3. Schuler, M.: Die Föpplsche Methode zur Lösung von Kreiselproblemen. Z. Angew. Math. Mech. 15 (1935) S. 88—91
4. Magnus, K.: Beiträge zur Dynamik des kräftefreien, kardanisch gelagerten Kreisels. Z. Angew. Math. Mech. 35 (1955) S. 23—34
5. Roberson, R. E.; Likins, P. W.: A Linearization Tool for Use with Matrix Formalisms of Rotational Dynamics. Ing.-Arch. 37 (1969) S. 388—392

Eingegangen am 24. März 1976

Prof. Dr. rer. nat. Kurt Magnus
 Germeringer Str. 13
 D-8035 Gauting
 Bundesrepublik Deutschland