

## Der Gyrostat mit elastischer Welle

### Ein Beitrag zur Theorie von Zentrifugen \*

K. Magnus, München

**Übersicht:** Um die Bewegungsverhältnisse bestimmter Zentrifugentypen zu klären, wird das dynamische Verhalten eines Gyrostaten mit elastischer Welle untersucht. Das betrachtete System hat außer der Eigendrehung des Rotors 6 Freiheitsgrade: Gehäuse-Verdrehung, Rotor-Translation und Rotor-Verdrehung in den beiden Querebenen. Eigenfrequenzen und Eigenformen werden ausgerechnet. Das Dämpfungsverhalten hängt stark von der Rotordrehzahl  $\omega$  ab. Für bestimmte Werte von  $\omega$  kann die Wirksamkeit der Dämpfungen verloren gehen, weil diese nicht mehr zu allen Freiheitsgraden des Systems durchdringen.

**Summary:** In order to evaluate the dynamical behaviour of certain types of centrifuges a gyrostat with an elastic rotor shaft is investigated. The system under consideration has 6 degrees of freedom besides the rotor rotational freedom itself: rotation of cage and rotor about and rotor shift along the two perpendicular axes. Eigen-frequencies and -modes are determined. The damping depends upon the rotor velocity  $\omega$ . It is possible that the effectivity of damping becomes extremely small for certain values of  $\omega$ , as the damping does not always pervade to all degrees of freedom of the system.

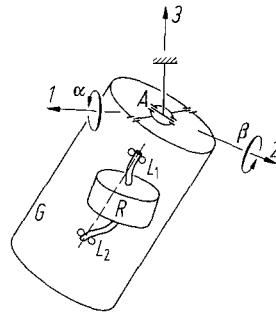
### 1 Aufgabenstellung

An einem, in verschiedenen Varianten verbreiteten Typ von Zentrifugen können Erscheinungen beobachtet werden, deren Deutung genauere Untersuchungen zum dynamischen Verhalten des hier vorliegenden, verhältnismäßig einfachen Rotorsystems erfordert. So können bei An- und Auslaufen kritische Drehzahlbereiche festgestellt werden, die nicht den üblichen Resonanzen entsprechen. Andererseits treten bei der Arbeitsdrehzahl ungedämpfte, drehzahlfremde Eigenbewegungen auf, die nach Frequenz und Schwingungsform nicht als erzwungene Schwingung angesehen werden können. Zur Klärung dieser Phänomene soll hier als vereinfachtes Modell einer Zentrifuge der Gyrostat mit elastischer Welle analysiert werden.

Die beobachtete Zentrifuge entspricht dem Typ der bekannten Wäscheschleuder: In einem auf Gummipuffern elastisch gelagerten Gehäuse befindet sich ein gegenüber dem Gehäuse elastisch aufgehängter Antriebsmotor, auf dessen Welle die Zentrifugentrommel starr befestigt ist. Der Stator hat zwar gegenüber dem Gehäuse 6 Freiheitsgrade, jedoch werden im allgemeinen nur Translationsschwingungen in der Horizontalebene und Taumelschwingungen, also Drehschwingungen um horizontale Achsen beobachtet. Hinzu kommt der Drehfreiheitsgrad von Trommel und Anker, also des Rotors, gegenüber dem Stator. Das Gehäuse führt im wesentlichen Taumelbewegungen aus, die als Drehschwingungen um horizontale Achsen aufgefaßt werden können. Insgesamt sind also 7 Freiheitsgrade an den beobachteten Bewegungen beteiligt.

Als vereinfachtes Ersatzmodell, das die erwähnten 7 Freiheitsgrade zeigt, soll hier der in Bild 1 skizzierte Gyrostat mit elastischer Welle betrachtet werden. Das Gehäuse  $G$  sei in einem Punkt  $A$  so gelagert, daß es Drehbewegungen um die beiden horizontalen Achsen ausführen kann. Das kann z. B. durch ein Kardangelenk geschehen. Die Symmetrieachse des Gehäuses ist an die vertikale Gleichgewichtslage durch Schweremoment oder elastische Fesselungen

\* Henry Görtler zum 70. Geburtstag gewidmet



**Bild 1.** Der Gyrostat mit elastischer Welle als Ersatzmodell einer Zentrifuge

gebunden. Der Aufhängepunkt  $A$  kann über oder unter dem Gesamtschwerpunkt des Systems liegen. In jedem Falle ist jedoch die Gesamtfesselung des Gehäuses statisch stabil.

In gehäusefesten Lagern  $L_1$  und  $L_2$ , deren Verbindungslinie parallel zur Symmetrieachse des Gehäuses sein soll, ist der Rotor  $R$  mit elastischer Welle gelagert. Auf diese Weise kann der Rotor gegenüber dem Gehäuse sowohl Translations- als auch Rotations-Bewegungen ausführen. Bei geeigneter Konstruktion sind beide Bewegungsformen voneinander unabhängig. Infolge von Werkstoffdämpfung sowie durch Relativbewegungen der Trommelfüllung sind beide Bewegungen — Rotor-Translation und Rotor-Drehung — sowie auch die Gehäuse-Drehbewegung im allgemeinen gedämpft.

Ziel der Untersuchungen soll es sein, einerseits die dynamischen Kennwerte des Systems, also Eigenfrequenzen und Eigenformen in Abhängigkeit von der Drehzahl  $\omega$  des Rotors zu bestimmen; andererseits interessiert die Auswirkung der verschiedenen Dämpfungsarten auf das Verhalten des Gesamtsystems. Die Beobachtungsergebnisse lassen nämlich vermuten, daß der Grad des Durchdringens von Gehäuse-Dämpfung  $d_G$ , Rotor-Translations-Dämpfung  $d_T$  bzw. Rotor-Drehdämpfung  $d_R$  auf die verschiedenen Teilbewegungen stark von der Drehzahl abhängt, so daß resonanzähnliche Erscheinungen ausgelöst werden können.

Die Untersuchungen werden im Rahmen einer linearisierten Theorie durchgeführt. Weitere Vernachlässigungen oder vereinfachende Annahmen beziehen sich auf die folgenden Punkte:

1. Weder Gehäuse noch der Rotor sollen Vertikalbewegungen ausführen. Es ist bekannt [1], daß bei Berücksichtigung auch dieser Freiheitsgrade parametererregte Schwingungen ausgerechnet werden können. Sie sollen nicht berücksichtigt werden.

2. Für das Gehäuse werden auch Translationsbewegungen in horizontaler Richtung ausgeschlossen.

3. Die Lagermassen sollen keine Bewegungsmöglichkeit gegenüber dem Gehäuse haben, so daß sie einfach als Teil der Gehäusemasse erscheinen.

4. Die Statormasse wird vernachlässigt; ihre Berücksichtigung würde ein komplizierteres 3-Körper-Ersatzsystem voraussetzen.

5. Die Rotorwelle wird als masseloses Federungselement angesehen. Eventuelle Eigenschwingungen der Welle (Stab-Kontinuum) werden damit vernachlässigt.

6. Der Einfluß des Trommelinhaltes soll einerseits durch einen Zuschlag zur Trommelmasse, andererseits durch entsprechende Dämpfungsanteile für die Translations- und für die Drehbewegung des Rotors erfaßt werden.

7. Im interessierenden Arbeitsbereich soll Gleichgewicht zwischen Antriebs- und Bremsmomenten für die Rotorachse bestehen. An- und Auslauf werden also als quasistationär angesehen.

8. Der Rotor wird als symmetrisch angenommen:  $A_R = B_R$ . Er soll in der Mitte der ebenfalls symmetrischen Welle befestigt sein.

9. Als Erregung wird nur statische Unwucht in der Mittelebene des Rotors angenommen.

10. Das System soll linearisierbar bezüglich Fesselungen und Dämpfungen sein; durch Annahme kleiner Drehwinkel für Gehäuse und Rotor-Querbewegung werden auch kinematische Nichtlinearitäten vermieden.

## 2 Bewegungsgleichungen

### 2.1 Fesselungsbeiwerte

Die Fesselung des Gehäuses entsteht durch das Schweremoment sowie durch die federnde Aufstellung (Gummipuffer oder Federelemente). Wegen der vorausgesetzten Linearität können beide Anteile gemeinsam durch einen Dreh-Fesselungsbeiwert  $c_G = M_1/\alpha = M_2/\beta$  erfaßt werden. Diese Fesselung wird als in beiden Querachsen gleichartig vorausgesetzt.

Die Fesselung des Rotors gegenüber dem Gehäuse kann aus den geometrischen Abmessungen der elastischen Welle in bekannter Weise errechnet werden. Translations- und Rotationsfesselung sind voneinander abhängig; ihr Verhältnis läßt sich jedoch durch geeignete Wahl des Schlankheitsgrades der Welle beeinflussen. Für den Fall einer Welle mit konstantem Querschnitt mit der halben Länge  $a$ , dem Flächenträgheitsmoment  $I$  für den Wellenquerschnitt und dem Elastizitätsmodul  $E$  (Bild 2) ergeben sich aus der elementaren Biegetheorie die Beiwerte:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Translationsfesselung: } c_T = \frac{F_1}{x} = \frac{F_2}{y} = \frac{6EI}{a^3}, \\ \text{Rotationsfesselung: } c_R = \frac{M_1^R}{\varphi} = \frac{M_2^R}{\vartheta} = \frac{6EI}{a}. \end{array} \right\} \quad (1)$$

### 2.2 Drallsatz und Impulssatz

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen wird das Schnittprinzip verwendet und dann für die Teilsysteme Kräfte- und Momentengleichgewicht formuliert. Der Rotor wird an den Lagerstellen freigeschnitten; die vom Rotor auf das Gehäuse übertragenen Schnittkräfte lassen sich zu einem Kraftwinder  $[\mathbf{F}_S, \mathbf{M}_S]$  mit  $\mathbf{F}_S = [F_1 F_2]^T$  und  $\mathbf{M}_S = [M_1 M_2]^T$  zusammenfassen. Wegen der zuvor genannten Annahmen brauchen die in die vertikale 3-Richtung fallenden Anteile nicht berücksichtigt zu werden.

Werden mit  $\mathbf{p}$  der Impuls- und mit  $\mathbf{L}$  der Drall-Vektor, durch den Index  $G$  das Gehäuse und durch  $R$  der Rotor bezeichnet, dann stehen die folgenden Grundgleichungen zur Verfügung:

$$\text{Gehäuse-Drallsatz: } \frac{d\mathbf{L}_G}{dt} = \mathbf{M}_G, \quad (2)$$

$$\text{Rotor-Impulssatz: } \frac{d\mathbf{p}_R}{dt} = \mathbf{F}_R, \quad (3)$$

$$\text{Rotor-Drallsatz: } \frac{d\mathbf{L}_R}{dt} = \mathbf{M}_R. \quad (4)$$

Wegen der vorausgesetzten Linearität und der Annahme kleiner Drehwinkel  $\alpha, \beta$  für das Gehäuse, kleiner Winkel  $\psi, \vartheta$  für die Relativdrehungen des Rotors gegenüber dem Gehäuse

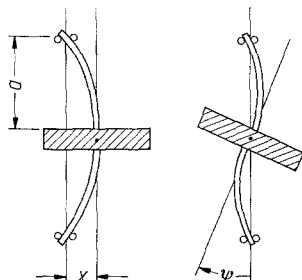


Bild 2. Translation und Rotation der Rotorscheibe bei elastischer Welle

sowie kleiner Relativverschiebungen  $x, y$  des Rotors findet man für die in (2, 3, 4) eingehenden Größen die folgenden Näherungswerte:

$$\mathbf{L}_G = \begin{bmatrix} A_G \dot{\alpha} \\ B_G \dot{\beta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_G = \begin{bmatrix} M_1 + F_2 s - c_G \alpha - d_G \dot{\alpha} \\ M_2 - F_1 s - c_G \beta - d_G \dot{\beta} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\mathbf{p}_R = \begin{bmatrix} m(\dot{x} - s\dot{\beta}) \\ m(\dot{y} + s\dot{\alpha}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_R = -\mathbf{F}_S + m\varepsilon\omega^2 \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathbf{L}_R = \begin{bmatrix} A_R(\dot{\alpha} + \dot{\psi}) + L(\beta + \vartheta) \\ A_R(\dot{\beta} + \dot{\vartheta}) - L(\alpha + \psi) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_R = -\mathbf{M}_S. \quad (7)$$

Für die Komponenten des Schnittwinders gilt dabei:

$$\mathbf{F}_S = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_T x + d_T \dot{x} \\ c_T y + d_T \dot{y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_R \psi + d_R \dot{\psi} \\ c_R \vartheta + d_R \dot{\vartheta} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Dabei bedeuten  $s$  den Abstand des Aufhängepunktes  $A$  vom Schwerpunkt des Rotors,  $d$  die Dämpfungsbeiwerte,  $m$  die Rotormasse,  $\varepsilon$  den Abstand des Rotorschwerpunktes von der Rotorachse,  $\omega = \dot{\varphi}$  die Winkelgeschwindigkeit des Rotors,  $L = C_R \omega$  die wegen der getroffenen Voraussetzungen konstante Drallkomponente für die Rotorachse.

Nach Einsetzen von (5, 6, 7) in (2, 3, 4) und Elimination der Schnittgrößen mit Hilfe von (8) erhält man ein System von 6 linearen Bewegungsgleichungen, das mit den Abkürzungen

$$A = A_G + A_R + ms^2, \quad B = B_G + A_R + ms^2$$

in die folgende Form gebracht werden kann:

$$\left. \begin{aligned} A\ddot{\alpha} + ms\ddot{y} + A_R\ddot{\psi} + L\dot{\beta} + L\dot{\vartheta} + d_G\dot{\alpha} + c_G\alpha &= mse\omega^2 \sin \varphi, \\ B\ddot{\beta} - ms\ddot{x} + A_R\ddot{\vartheta} - L\dot{\alpha} - L\dot{\psi} + d_G\dot{\beta} + c_G\alpha &= -mse\omega^2 \cos \varphi, \\ -ms\ddot{\beta} + m\ddot{x} + d_T\dot{x} + c_T x &= m\varepsilon\omega^2 \cos \varphi, \\ ms\ddot{\alpha} + m\ddot{y} + d_T\dot{y} + c_T y &= m\varepsilon\omega^2 \sin \varphi, \\ A_R\ddot{\alpha} + A_R\ddot{\psi} + L\dot{\beta} + L\dot{\vartheta} + d_R\dot{\psi} + c_R\psi &= 0, \\ A_R\ddot{\beta} + A_R\ddot{\vartheta} - L\dot{\alpha} - L\dot{\psi} + d_R\dot{\vartheta} + c_R\vartheta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Dieses System von Bewegungsgleichungen, das sich selbstverständlich auch unter Anwenden des Lagrangeschen Formalismus ableiten läßt, kann durch Einführen eines „Lagevektors“

$$\mathbf{z} = [\alpha \ \beta \ x \ y \ \psi \ \vartheta]^T \quad (10)$$

in die allgemeine Matrizenform

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{z} = \mathbf{f}(\varphi) \quad (11)$$

gebracht werden, in der  $\mathbf{G}$  die schiefsymmetrische Matrix der gyrokopischen Kräfte ist, während die Massenmatrix  $\mathbf{M}$ , die Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}$  sowie die Fesselungsmatrix  $\mathbf{K}$  symmetrisch sind. Sie brauchen hier nicht gesondert angegeben zu werden.

### 2.3 Grenzfälle

Vor einer weiteren Untersuchung der Gleichungen (9) bzw. (11) sollen einige Grenzfälle betrachtet werden, weil dies zum Verständnis des Gesamtsystems beiträgt.

Bei starrer Welle ( $c_R, c_T \rightarrow \infty$ ) werden  $\psi = \vartheta = 0$  und  $x = y = 0$ , so daß die letzten vier Gleichungen des Systems (9) keine Aussage liefern. Es bleiben die Gleichungen für das Gehäuse

$$\left. \begin{aligned} A\ddot{\alpha} + L\dot{\beta} + d_G\dot{\alpha} + c_G\alpha &= m\epsilon\omega^2 \sin \varphi, \\ B\ddot{\beta} - L\dot{\alpha} + d_G\dot{\beta} + c_G\beta &= -m\epsilon\omega^2 \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

die den Gleichungen eines gedämpften, durch Unwucht erregten Kreiselpendels entsprechen.

Bei starrer Aufstellung des Gehäuses ( $c_G \rightarrow \infty$ ) werden  $\alpha = \beta = 0$ . Dann geben die ersten beiden Gleichungen von (9) keine Aussage. Die restlichen Gleichungen sind — wegen der hier getroffenen Voraussetzungen — entkoppelt, d. h. Translations- und Drehbewegungen des Rotors sind entkoppelt. Ihre Kopplung kommt im allgemeinen Fall erst über die Gehäusebewegung zustande. Die freien Translationsbewegungen sind in beiden Richtungen ebenfalls entkoppelt, jedoch stehen die erzwungenen Schwingungen infolge der umlaufenden Unwucht miteinander in Beziehung.

Bei nichtdrehendem Rotor ( $\omega = 0$  bzw.  $L = 0$ ) entfällt die Kopplung einerseits zwischen  $\alpha$ - und  $\beta$ -Bewegung, andererseits zwischen  $\psi$ - und  $\vartheta$ -Bewegung. Damit zerfällt (9) in zwei Systeme von je 3 Gleichungen, die im Falle eines symmetrischen Gehäuses ( $A = B$ ) sogar identisch werden:

$$\left. \begin{aligned} A\ddot{\alpha} + ms\ddot{y} + A_R\ddot{\psi} + d_G\dot{\alpha} + c_G\alpha &= 0, \\ ms\ddot{x} + m\ddot{y} + d_T\dot{y} + c_T y &= 0, \\ A_R\ddot{\alpha} + A_R\ddot{\psi} + d_R\dot{\psi} + c_R\psi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Die Gesamtbewegung kann damit als Superposition von zwei ebenen Bewegungen mit je 3 Freiheitsgraden aufgefaßt werden. Die dabei auftretenden Eigenfrequenzen und Eigenformen lassen sich in bekannter Weise ausrechnen.

Bei normalem Betrieb wird der Rotor im allgemeinen so hohe Drehzahlen haben, daß die gyroskopischen Anteile in den Gleichungen dominierenden Einfluß besitzen. Dann lassen sich Nutations- und Präzessionsbewegungen durch Aufspalten des Gleichungssystems näherungsweise bestimmen [2].

Die Nutationsbewegungen können näherungsweise durch Vernachlässigen von Fessel- und Dämpfungskräften berechnet werden. Damit gehen die letzten beiden Gleichungen von (9) über in

$$A_R(\ddot{\alpha} + \ddot{\psi}) + L(\dot{\beta} + \dot{\vartheta}) \approx 0, \quad A_R(\ddot{\beta} + \ddot{\vartheta}) - L(\dot{\alpha} + \dot{\psi}) \approx 0. \quad (14)$$

Ihre Lösung ergibt die stets im Sinne der Rotordrehung erfolgende Taumelbewegung (Nutation), bei der sich die Absolutwinkel  $\alpha + \psi$  und  $\beta + \vartheta$  periodisch, aber um  $90^\circ$  phasenverschoben verändern. Die Nutationsfrequenz wird

$$\omega_N \approx \frac{L}{A_R} = \frac{C_R}{A_R} \omega. \quad (15)$$

Bei steifer Welle führt der Einfluß der Gehäusemassen zu einer Verringerung dieser Frequenz. Ein Grenzwert bis zu dem dies geschehen kann, läßt sich aus (12) gewinnen. Mit  $d_G, c_G \approx 0$  folgt

$$\omega'_N = \frac{L}{\sqrt{AB}} = \frac{C_R}{\sqrt{AB}} \omega. \quad (16)$$

Reale Werte für die zu erwartenden Nutationsfrequenzen liegen zwischen den Näherungen (15) und (16). Da in (12) eine Unwuchterregung mit der Frequenz der Drehzahl  $\omega$  auftritt, muß zur Vermeidung von Resonanzen mit der Nutation der genauere Verlauf der Funktion  $\omega_N(\omega)$  beachtet werden. Für kleinere Werte von  $\omega$  ist in jedem Falle (16) eine untere Grenze für  $\omega_N$ ,

während sich  $\omega_N(\omega)$  für  $\omega \rightarrow \infty$  dem Wert (15) annähert. Resonanzen durch Übereinstimmung von Nutationsfrequenz und Drehfrequenz lassen sich im gefährlichen Bereich hoher Drehzahlen mit Sicherheit vermeiden, wenn die Bedingung

$$C_R < A_R < \sqrt{AB} \quad (17)$$

eingehalten wird. Dann nämlich liegen in einem  $\omega_N, \omega$ -Diagramm die beiden Näherungsgeraden (15) und (16) unterhalb der Drehzahlgeraden  $\omega_N = \omega$ . Auch mit  $C_R > \sqrt{AB} > A_R$  können keine Resonanzen auftreten, jedoch ist diese Bedingung ohne praktische Bedeutung, da die Gehäusemassen im allgemeinen nicht klein genug gehalten werden können. In dem realistischen Fall  $\sqrt{AB} > C_R > A_R$  können, aber müssen nicht notwendigerweise Resonanzen auftreten.

Näherungswerte für die Präzessionsbewegungen erhält man aus der Bedingung des Gleichgewichtes von gyroskopischen und Fesselkräften. Damit folgen aus (9) die vier Näherungsgleichungen

$$\left. \begin{aligned} L(\dot{\beta} + \dot{\vartheta}) + c_G \alpha &\approx 0, \\ -L(\dot{\alpha} + \dot{\psi}) + c_G \beta &\approx 0, \\ L(\dot{\beta} + \dot{\vartheta}) + c_R \psi &\approx 0, \\ -L(\dot{\alpha} + \dot{\psi}) + c_R \vartheta &\approx 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Ihre Frequenzgleichung ist

$$\lambda^2 L^2 (c_R + c_G)^2 + c_R^2 c_G^2 = 0$$

und ergibt als Lösung die Präzessionsfrequenz

$$\omega_P \approx \frac{c_G c_R}{L(c_G + c_R)}. \quad (19)$$

Im Falle einer sehr steifen Welle ( $c_R \gg c_G$ ) wird

$$\omega_P \approx \frac{c_G}{L} \quad (20)$$

erhalten. Zwischen diesen beiden Näherungswerten kann die Präzessionsfrequenz bei realen Zentrifugen erwartet werden. Die Präzessionsbewegung selbst ist eine langsame Taumelbewegung im Gegensinne der Rotordrehung.

#### 2.4 Zustandsgleichungen

Zur numerischen Auswertung der Bewegungsgleichungen auf Rechenanlagen ist es zweckmäßig eine Transformation der Matrixgleichung (11) in die Form einer Zustandsgleichung durchzuführen. Dazu wird der „Zustandsvektor“

$$\mathbf{u} = [\mathbf{z}^T \dot{\mathbf{z}}^T]^T = [\alpha \beta x y \psi \vartheta \dot{\alpha} \dot{\beta} \dot{x} \dot{y} \dot{\psi} \dot{\vartheta}]^T \quad (21)$$

eingeführt, für den nach Linksmultiplikation von (11) mit  $\mathbf{M}^{-1}$  eine Matrixgleichung 1. Ordnung erhalten wird:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{C}\mathbf{u} + \mathbf{h}(\varphi) \quad (22)$$

mit

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{D} + \mathbf{G}) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{h}(\varphi) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(\varphi) \end{bmatrix}.$$

Darin ist  $\mathbf{0}$  die Nullmatrix bzw. der Nullvektor,  $\mathbf{E}$  die Einheits-Diagonalmatrix. Die Kehrmatrix  $\mathbf{M}^{-1}$  läßt sich explizit ausrechnen, so daß für die in  $\mathbf{C}$  eingehenden Untermatrizen und für den Teilvektor von  $\mathbf{h}$  folgendes erhalten wird:

$$\begin{aligned}
-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} &= \begin{bmatrix} -\frac{c_G}{A_G} & 0 & 0 & \frac{sc_G}{A_G} & \frac{c_G}{A_G} & 0 \\ 0 & -\frac{c_G}{B_G} & -\frac{sc_G}{B_G} & 0 & 0 & \frac{c_G}{B_G} \\ 0 & -\frac{sc_T}{B_G} & -c_T\left(\frac{1}{m} + \frac{s^2}{B_G}\right) & 0 & 0 & \frac{sc_T}{B_G} \\ \frac{sc_T}{A_G} & 0 & 0 & -c_T\left(\frac{1}{m} + \frac{s^2}{A_G}\right) & -\frac{sc_T}{A_G} & 0 \\ \frac{c_R}{A_G} & 0 & 0 & -\frac{sc_R}{A_G} & -c_R\left(\frac{1}{A_R} + \frac{1}{A_G}\right) & 0 \\ 0 & \frac{c_R}{B_G} & \frac{sc_R}{B_G} & 0 & 0 & -c_R\left(\frac{1}{A_R} + \frac{1}{B_G}\right) \end{bmatrix}, \\
-\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{D} + \mathbf{G}) &= \begin{bmatrix} -\frac{d_G}{A_G} & 0 & 0 & \frac{sd_G}{A_G} & \frac{d_G}{A_G} & -\frac{L}{A_R} \\ 0 & -\frac{d_G}{B_G} & -\frac{sd_G}{B_G} & 0 & \frac{L}{A_R} & \frac{d_G}{B_G} \\ 0 & -\frac{sd_T}{B_G} & -d_T\left(\frac{1}{m} + \frac{s^2}{B_G}\right) & 0 & 0 & \frac{sd_T}{B_G} \\ \frac{sd_T}{A_G} & 0 & 0 & -d_T\left(\frac{1}{m} + \frac{s^2}{A_G}\right) & -\frac{sd_T}{A_G} & 0 \\ \frac{d_R}{A_G} & 0 & 0 & -\frac{sd_R}{A_G} & -d_R\left(\frac{1}{A_G} + \frac{1}{A_R}\right) & -\frac{L}{A_R} \\ 0 & \frac{d_R}{B_G} & \frac{sd_R}{B_G} & 0 & \frac{L}{A_R} & -d_R\left(\frac{1}{B_G} + \frac{1}{A_R}\right) \end{bmatrix}, \\
[\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(\varphi)]^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon\omega^2 \cos \varphi & \varepsilon\omega^2 \sin \varphi & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

### 3 Einfluß der verschiedenen Dämpfungen

In die Bewegungsgleichungen sind — mehr oder weniger willkürlich — Dämpfungsanteile für die Gehäusebewegung ( $d_G$ ), für die Rotor-Translation ( $d_T$ ) und für die Rotor-Verdrehung ( $d_R$ ) eingesetzt worden. Jede dieser Teil-Dämpfungen trägt zur Dämpfung des Gesamtsystems bei. Die Stärke dieses Beitrages hängt jedoch von der Struktur des Systems und vom Arbeitszustand ab. Um sie beurteilen zu können, soll hier der Begriff der durchdringenden Dämpfung verwendet werden; eine Teildämpfung heißt durchdringend, wenn sie sich auch auf die anderen Freiheitsgrade des Systems auswirkt. Kriterien zur Feststellung der Durchdringungseigenschaft lassen sich nach Müller [3] aus den bekannten Kriterien für die Steuerbarkeit eines Systems gewinnen. Sie haben globalen Charakter, so daß die Eigenwerte selbst nicht erst ausgerechnet werden müssen. Für die vorliegenden Zwecke erweist sich ein von Hautus angegebenes Steuerbarkeits-Kriterium (s. Müller [4]) als besonders zweckmäßig. Es kann wie folgt formuliert werden:

Das aus (11) folgende homogene System

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{z} = 0 \quad (23)$$

ist nicht durchdringend gedämpft, wenn die Gleichungen

$$\mathbf{z}^T[\mathbf{M}\lambda^2 + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\lambda + \mathbf{K}] = 0; \quad \mathbf{z}^T\mathbf{D} = 0 \quad (24)$$

eine nichttriviale Lösung haben.

Damit soll die Durchdringungseigenschaft für die drei Dämpfungsarten des vorliegenden Systems untersucht werden.

### 3.1 Gehäusedämpfung

Wenn nur Gehäusedämpfung vorhanden ist, dann hat die Dämpfungsmatrix die Diagonalform:

$$\mathbf{D} = \text{diag} \{d_G, d_G, 0, 0, 0, 0\}. \quad (25)$$

Um  $\mathbf{z}^T \mathbf{D} = 0$  zu erfüllen, muß der Lagevektor (10) die reduzierte Form

$$\mathbf{z}_{\text{red}}^T = [0, 0, x, y, \psi, \vartheta] \quad (26)$$

haben. Damit folgen aus (24.1) unter Berücksichtigung von (9) die folgenden 6 Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad & ms\lambda^2 y + A_R \lambda^2 \psi + L\lambda \vartheta = 0, \\ 2. \quad & -ms\lambda^2 x + A_R \lambda^2 \vartheta - L\lambda \psi = 0, \\ 3. \quad & m\lambda^2 x + c_T x = 0, \\ 4. \quad & m\lambda^2 y + c_T y = 0, \\ 5. \quad & A_R \lambda^2 \psi + L\lambda \vartheta + c_R \psi = 0, \\ 6. \quad & A_R \lambda^2 \vartheta - L\lambda \psi + c_R \vartheta = 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Gesucht werden Bedingungen für das Vorhandensein nichttrivialer Lösungen dieses Systems. Dazu kann man wie folgt überlegen: Die Gleichungen 3. und 4. von (27) sind erfüllt entweder für I)  $x = y = 0$  oder II)  $m\lambda^2 + c_T = 0$ . Mit I) folgt aus 1. und 2. nach Einsetzen in 5. bzw. 6. sofort  $\psi = \vartheta = 0$ , also die triviale Lösung. Mit II) folgt, daß 5. und 6. erfüllt werden entweder für II,1)  $\psi = \vartheta = 0$  oder II,2):

$$\det = (A_R \lambda^2 + c_R)^2 + L^2 \lambda^2 = \left( c_R - \frac{A_R c_T}{m^2} \right)^2 - \frac{L^2 c_T}{m} = 0. \quad (28)$$

Mit II,1) folgt aus 1. und 2. sofort wieder  $x = y = 0$ . Demnach sind nichttriviale Lösungen nur im Fall II,2), also bei Erfüllung von (28) möglich. Diese Bedingung kann mit  $L = C_R \omega$  und Einführen der Translations- bzw. Rotations-Eigenfrequenzen des Rotors bei festgehaltenem Gehäuse:  $\omega_T^2 = c_T/m$ ,  $\omega_R^2 = c_R/A_R$  in die Form

$$\omega_1 = \frac{A_R}{C_R} \frac{\omega_R^2 - \omega_T^2}{\omega_T} \quad (29)$$

gebracht werden. Demnach kann festgestellt werden, daß die Gehäusedämpfung bei der durch (29) gegebenen Rotordrehzahl  $\omega_1$  nicht zur Rotor-Bewegung durchdringt. Für alle anderen Rotordrehzahlen dringt die Gehäusedämpfung durch.

### 3.2 Translationsdämpfung

Die Dämpfungsmatrix ist jetzt

$$\mathbf{D} = \text{diag} \{0, 0, d_T, d_T, 0, 0\} \quad (30)$$

und der reduzierte Lösungsvektor

$$\mathbf{z}_{\text{red}}^T = [\alpha, \beta, 0, 0, \psi, \vartheta]. \quad (31)$$

Damit erhält man aus (24.1) die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad & A\lambda^2 \alpha + A_R \lambda^2 \psi + L\lambda \beta + L\lambda \vartheta + c_G \alpha = 0, \\ 2. \quad & B\lambda^2 \beta + A_R \lambda^2 \vartheta - L\lambda \alpha - L\lambda \psi + c_G \beta = 0, \\ 3. \quad & -ms\lambda^2 \beta = 0, \\ 4. \quad & ms\lambda^2 \alpha = 0, \\ 5. \quad & A_R \lambda^2 \alpha + A_R \lambda^2 \psi + L\lambda \beta + L\lambda \vartheta + c_R \psi = 0, \\ 6. \quad & A_R \lambda^2 \beta + A_R \lambda^2 \vartheta - L\lambda \alpha - L\lambda \psi + c_R \vartheta = 0. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$



Wegen 3. und 4. wird  $\alpha = \beta = 0$ . 1. und 2. haben daher nur mit  $\det = A_R^2 \lambda^4 + L^2 \lambda^2 = 0$  eine nichttriviale Lösung. Das ist erfüllt für I)  $\lambda = 0$  und II)  $\lambda^2 = -L^2/A_R^2$ . Aus 5. und 6. folgt mit I)  $\psi = \vartheta = 0$ . Das gleiche triviale Ergebnis folgt aber auch im Fall II). Demnach existiert für (32) keine nichttriviale Lösung. Als Ergebnis ist also festzustellen, daß die Translationsdämpfung stets zu den anderen Freiheitsgraden durchdringt.

### 3.3 Rotationsdämpfung

Mit der Dämpfungsmatrix

$$\mathbf{D} = \text{diag} \{0, 0, 0, 0, d_R, d_R\} \quad (33)$$

und dem reduzierten Lösungsvektor

$$\mathbf{z}_{\text{red}}^T = [\alpha, \beta, x, y, 0, 0] \quad (34)$$

folgen aus (24.1) die Gleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad A\lambda^2\alpha + ms\lambda^2y + L\lambda\beta + c_G\alpha = 0, \\ 2. \quad B\lambda^2\beta + ms\lambda^2x - L\lambda\alpha + c_G\beta = 0, \\ 3. \quad -ms\lambda^2\beta + m\lambda^2x + c_Tx = 0, \\ 4. \quad ms\lambda^2\alpha + m\lambda^2y + c_Ty = 0, \\ 5. \quad A_R\lambda^2\alpha + L\lambda\beta = 0, \\ 6. \quad A_R\lambda^2\beta - L\lambda\alpha = 0. \end{array} \right\} \quad (35)$$

Hier sind 5. und 6. erfüllt entweder für I)  $\alpha = \beta = 0$  oder II)  $\det = A_R^2 \lambda^4 + L^2 \lambda^2 = 0$ . Aus II) folgt entweder II,1)  $\lambda^2 = 0$  oder II,2)  $\lambda^2 = -L^2/A_R$ . Der Fall I) führt wegen 1. und 2. auf  $x = y = 0$ , also auf die triviale Lösung. Auch im Fall II,1) folgt aus 1. bis 4. dasselbe Ergebnis.

Um den Fall II,2) weiter zu untersuchen, wird zunächst 5. von 1. sowie 6. von 2. abgezogen. Das ergibt:

$$\begin{array}{l} 7. \quad [(A - A_R)\lambda^2 + c_G]\alpha + ms\lambda^2y = 0, \\ 8. \quad [(B - A_R)\lambda^2 + c_G]\beta - ms\lambda^2x = 0 \end{array}$$

Da die Lösungen  $\alpha = y = 0$  bzw.  $\beta = x = 0$  ausscheiden, müssen die Determinanten einerseits des Systems 7. und 4., andererseits 8. und 3. verschwinden. Diese Forderungen führen zu:

$$\left. \begin{array}{l} (ms\lambda^2)^2 - (m\lambda^2 + c_T)[(A - A_R)\lambda^2 + c_G] = 0, \\ (ms\lambda^2)^2 - (m\lambda^2 + c_T)[(B - A_R)\lambda^2 + c_G] = 0. \end{array} \right\} \quad (36)$$

Beide Bedingungen werden für  $A = B$  bzw.  $A_G = B_G$  identisch. Für  $A_G \neq B_G$  lassen sie sich nicht gleichzeitig erfüllen. Daraus folgt, daß die Rotationsdämpfung bei unsymmetrischem Gehäuse in jedem Falle durchdringend ist.

Bei symmetrischem Gehäuse ( $A_G = B_G$ ) folgt aus (36) eine quadratische Gleichung für  $\lambda^2 = -L/A_R = -(C_R/A_R)\omega$ . Ihre Auflösung führt zu zwei „kritischen“ Drehzahlen

$$\left. \begin{array}{l} \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \end{array} \right\} = \frac{A_R[mc_G + (A - A_R)c_T]}{2mA_Gc_R} \left[ 1 \mp \sqrt{1 - \frac{4mA_Gc_Tc_G}{[mc_G + (A - A_R)c_T]^2}} \right], \quad (37)$$

für die die Rotationsdämpfung nicht durchdringt.

Zusammenfassend kann demnach festgestellt werden, daß bei den durch (29) und (37) bestimmten Rotordrehzahlen Schwierigkeiten bei An- und Auslauf nicht ausgeschlossen werden können, weil die vorhandenen Dämpfungen teilweise unwirksam werden.

#### 4 Eigenschwingungen

Zur Klärung des dynamischen Verhaltens wurden numerische Auswertungen für einen, der beobachteten Zentrifuge entsprechenden Satz von Parameterwerten durchgeführt<sup>1</sup>. Dabei ist außer dem Rotor selbst auch das Gehäuse als symmetrisch, also  $A = B$ , angenommen worden.

Für das System (22) mit  $\mathbf{h}(\varphi) = 0$ , d. h. für einen Rotor ohne Unwucht sind in Bild 3 die Imaginärteile  $\nu_i$  und die Realteile  $\delta_i$  der charakteristischen Wurzeln — also Eigenfrequenzen und Dämpfungen — als Funktion der Rotordrehfrequenz  $\omega$  aufgetragen. Entsprechend der Zahl der hier berücksichtigten Freiheitsgrade gibt es 6 konjugiert komplexe Wurzeln, also 6 Eigenschwingungen. Wegen der angenommenen Symmetrie des Problems treten für  $\omega = 0$  drei Doppelwurzeln auf, die sich jedoch für  $\omega \neq 0$  aufspalten. Sie folgen unmittelbar als Lösungen von (13).

Die zu  $\nu_1, \delta_1$  gehörende Eigenschwingung ist eine typische Präzessionsschwingung, wie sie bei Rotorsystemen zu erwarten ist;  $\nu_1$  geht mit wachsendem  $\omega$  asymptotisch gegen Null; als Näherung für sehr große  $\omega$  kann (19) verwendet werden. Bei nicht so großen Werten von  $\omega$  liegt  $\nu_1$  auf jeden Fall zwischen den durch (19) und (20) definierten Näherungen.

Zur Präzession gehört sinngemäß eine Nutationsschwingung, deren Frequenz  $\nu_6$  bei großem  $\omega$  etwa proportional zu  $\omega$  anwächst. Für sehr großes  $\omega$  gilt die Näherung (15), für nicht zu kleine  $\omega$  liegt jedoch  $\nu_6$  auf jeden Fall zwischen den durch (15) und (16) definierten Grenzwerten.

Die durch  $\nu_2, \delta_2$  bis  $\nu_5, \delta_5$  charakterisierten vier Eigenschwingungen werden in der Theorie der Kreiselssysteme meist als Pendelschwingungen bezeichnet. Sie sind durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß sich die  $\nu(\omega)$ -Kurven für  $\omega \rightarrow \infty$  asymptotisch bestimmten, von  $\omega$  unabhängigen Grenzwerten nähern. Diese Grenzwerte liegen zwischen den für  $\omega = 0$  geltenden Werten  $\nu_i(0)$ .

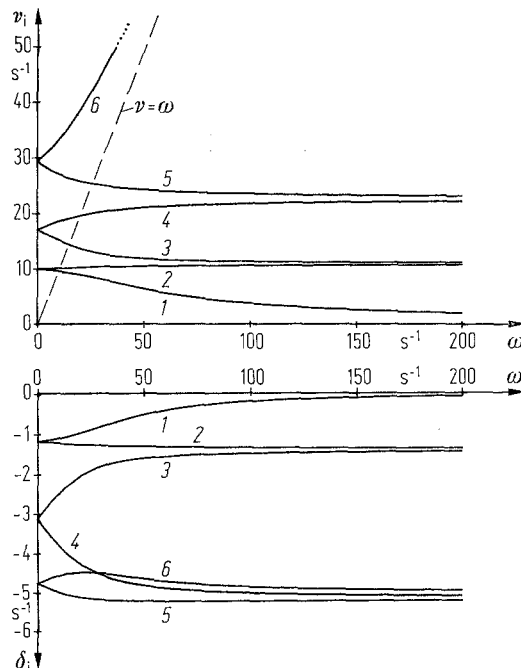


Bild 3. Eigenfrequenzen und Dämpfungen als Funktion der Rotordrehzahl

<sup>1</sup> Für die Durchführung dieser Berechnungen sowie für wertvolle Hinweise bei der Auswertung danke ich Herrn Ing.-grad. R. Lautenschlager

Die Schwingungsformen lassen sich aus den Eigenvektoren ablesen. Diese sind für das ungedämpfte System ( $d_G = d_T = d_R = 0$ , also  $\delta_i = 0$ ) ausgerechnet und in den Bildern 4 und 5 dargestellt worden. Wegen  $d_i = 0$  liegen die Teilauslenkungen des Systems für Hauptschwingungen bei geeigneten Anfangsbedingungen jeweils in einer Ebene, die sich mit der Frequenz  $\nu_i$  um die Vertikale dreht. Rotor- und Gehäuse-Symmetrieachsen umfahren dabei gerade Kreiskegel. In Bild 4 ist ein Fall skizziert, bei dem die Teilauslenkungen von Gehäuse ( $\alpha, \beta$ ), Rotor-Translation ( $x, y$ ) und Rotor-Verdrehung ( $\varphi, \vartheta$ ) gleichsinnig erfolgen. Es gehören dabei jeweils  $\alpha, y, \varphi$  und  $\beta, -x, \vartheta$  zu den Auslenkungen in beiden um  $90^\circ$  gegeneinander verdrehten Vertikal-ebenen.

In Bild 5 sind die für die 6 Hauptschwingungen vorhandenen Konfigurationen schematisch dargestellt: vom Gehäuse ist nur die Symmetrieachse skizziert; die beiden Teile der Rotorwelle sind durch Striche ersetzt. Das System bewegt sich bei Hauptschwingungen so, daß die skizzierten Konfigurationen beibehalten werden, aber im Sinne der unten angegebenen Pfeile um die Vertikale drehen. Der Drehsinn wechselt dabei; er ist für die Hauptschwingungen 1, 3 und 5 gegensinnig zur Rotor-Eigendrehung, für die Hauptschwingungen 2, 4 und 6 dagegen gleichsinnig. Wenn man die gezeichneten Lagen als Momentaufnahmen in der 2, 3-Ebene (Bild 1) auffaßt, dann gehören dazu die Teilauslenkungen  $\alpha, y, \varphi$ . In allen 6 Fällen ist  $\alpha > 0$  angenommen worden; die Vorzeichen von  $y$  und  $\varphi$  sowie der Drehsinn ergeben sich dann aus Tabelle 1.

Der Charakter der Hauptschwingungen ist leicht zu deuten:  $\nu_1$  gehört zur Präzessions-,  $\nu_6$  zur Nutations-Bewegung. Die dazwischen liegenden Schwingungen können im wesentlichen als Pendelungen von Gehäuse und Rotor aufgefaßt werden: Bei  $\nu_2$  und  $\nu_3$  sind Gehäuseauslenkung und Rotortranslation gleichsinnig, bei  $\nu_4$  und  $\nu_5$  gegensinnig. In den Fällen  $\nu_2$  und  $\nu_3$ , bzw.  $\nu_4$  und  $\nu_5$ , wechselt jeweils das Vorzeichen von  $\varphi$ , also die Rotorneigung sowie auch der Umlauf-

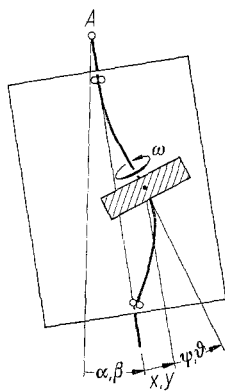


Bild 4. Darstellung der Schwingungsform

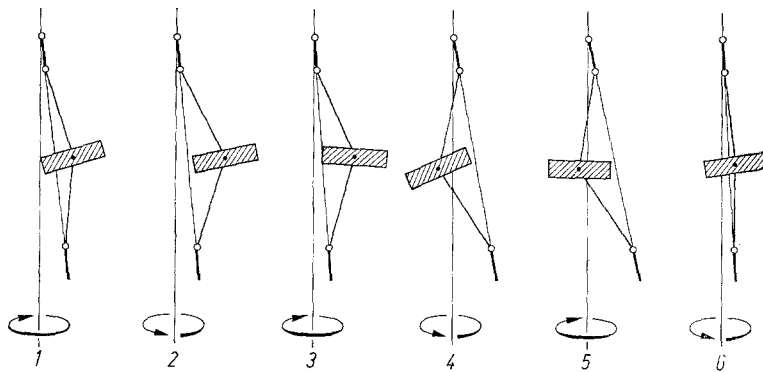


Bild 5. Schwingungsformen für die sechs Hauptschwingungen

**Tabelle 1.** Vorzeichen von  $\gamma$  und  $\psi$  (bei  $\alpha > 0$ ) und Drehsinn für die sechs Hauptschwingungen

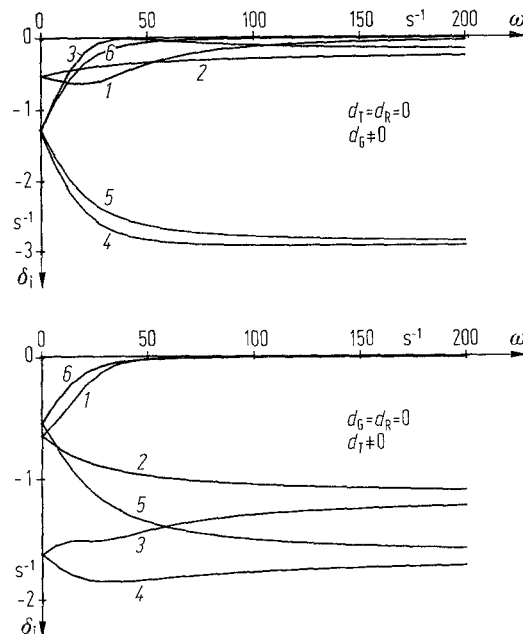
	$\nu_1$	$\nu_2$	$\nu_3$	$\nu_4$	$\nu_5$	$\nu_6$
$\gamma$	+	+	+	-	-	+
$\psi$	+	+	-	+	-	+
Drehsinn	-	+	-	+	-	+

sinn. Wie Bild 3 zeigt, liegen die beiden Frequenzen  $\nu_2$  und  $\nu_3$  bzw.  $\nu_4$  und  $\nu_5$  bei schnellaufendem Rotor jeweils dicht beieinander. Die relative Neigung des Rotors (Winkel  $\psi, \vartheta$ ) ist in allen 4 Fällen sehr gering; um sie in Bild 5 sichtbar werden zu lassen, ist sie dort übertrieben dargestellt. Entsprechendes gilt auch für die Nutationsschwingung  $\nu_6$ : Hier sind alle drei Teilauslenkungen wesentlich kleiner als in den anderen Fällen.

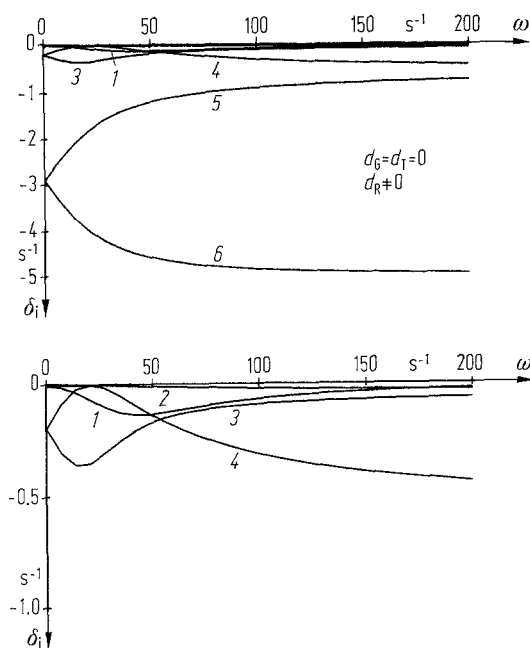
Um das in Kap. 3 untersuchte Dämpfungsverhalten auch quantitativ zu bestätigen, wurde das Gleichungssystem (22) mit  $\mathbf{h}(\varphi) \equiv 0$  bei veränderten Dämpfungen gelöst: Es wurde jeweils nur einer der drei Dämpfungsbeiwerte  $d_G$  (Gehäuse),  $d_T$  (Rotor-Translation) oder  $d_R$  (Rotor-Verdrehung) als von Null verschieden angenommen. Als Ergebnisse sind in den Diagrammen der Bilder 6 und 7 lediglich die Dämpfungskurven  $\delta_i(\omega)$  aufgetragen; sie zeigen eine zum Teil starke Abhängigkeit von  $\omega$ . Die zugehörigen Kurven  $\nu_i(\omega)$  für die Eigenfrequenzen sind nicht angegeben, da sich bei ihnen kein wesentlicher Unterschied gegenüber dem in Bild 3 dargestellten Fall ergibt.

Der Kurvenverlauf von Bild 6 oben, bestätigt und konkretisiert das in 3.1 erhaltene Ergebnis: Für  $\omega \approx 40$  1/s, entsprechend dem Wert (29), dringt die Gehäusedämpfung nicht durch; die Hauptschwingung 3 (Bild 5) verliert ihre Dämpfung. Es ist bemerkenswert, daß die der Schwingungsform nach ähnliche Hauptschwingung 2 in diesem Fall nicht beeinflusst wird.

Der Kurvenverlauf von Bild 6, unten, bestätigt die Aussage von 3.2, daß die Translationsdämpfung stets durchdringt. Dagegen zeigt Bild 7, daß die Rotationsdämpfung für  $\omega \approx 22$  1/s, entsprechend dem größeren Wert von (37), nicht zur Hauptschwingung 4 durchdringt. Wie-



**Bild 6.** Verlauf der Dämpfungskurven für den Fall, daß nur Gehäusedämpfung  $d_G$  (oben) oder nur Translationsdämpfung  $d_T$  (unten) vorhanden ist

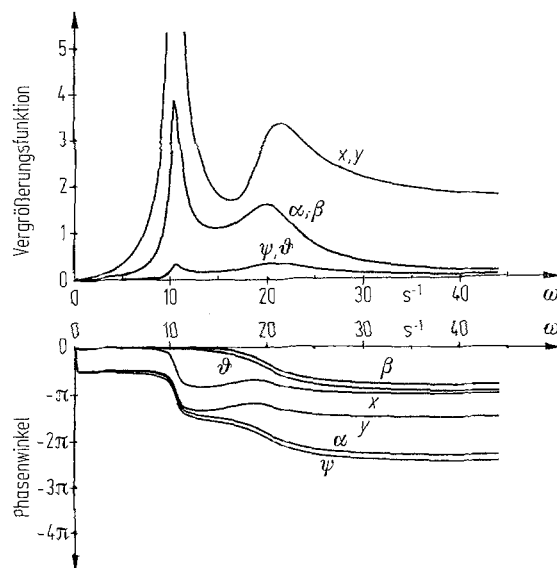


**Bild 7.** Verlauf der Dämpfungskurven für den Fall, daß nur Rotationsdämpfung  $d_R$  vorhanden ist. Unten: Ausschnitt in anderem Ordinatenmaßstab

derum zeigt sich kein entsprechender Einfluß bei der benachbarten Hauptschwingung 5. Diese beiden Hauptschwingungen werden vielmehr am wirksamsten durch die Gehäusedämpfung  $d_G$  (Bild 6 oben) gedämpft. Die Translationsdämpfung  $d_T$  wirkt sich vorwiegend auf die „Pendelschwingungen“ 2 bis 5 aus (Bild 6 unten); Präzessions- und Nutations-Bewegungen werden dagegen von ihr kaum beeinflusst. Die Rotationsdämpfung hingegen dämpft primär die Nutationsbewegung.

## 5 Unwuchterregte Zwangsschwingungen

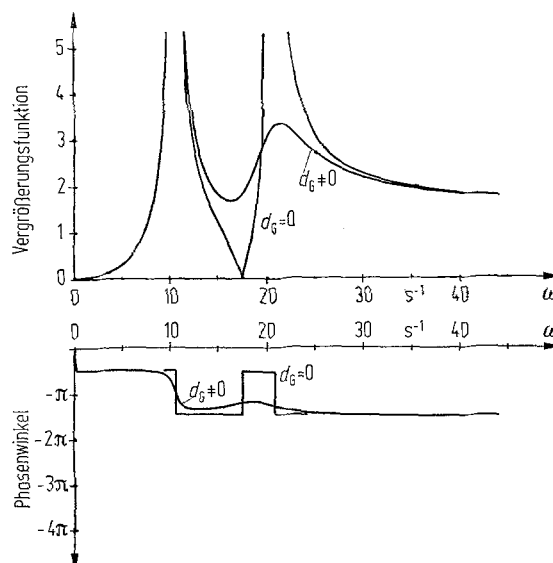
Die Zwangsschwingungen wurden nach (22) mit  $\mathbf{h}(\varphi) = 0$  für denselben Satz von Parametern wie die Eigenschwingungen ausgerechnet. Zwei der dabei erhaltenen Ergebnisse sind in den Bildern 8 und 9 dargestellt. Die Resonanz- und Phasen-Kurven von Bild 8 gelten für ein System mit Gehäusedämpfung; Rotor-Translations- und -Drehdämpfung wurden demgegenüber vernachlässigt, zumal sie bei der beobachteten Zentrifuge gering waren. Wegen der Dämpfung sind die Maxima der drei Resonanzkurven etwas gegeneinander verschoben. Im Fall eines ungedämpften Systems ( $d_G = 0$ ) liegen die Resonanzstellen im ausgewerteten Fall bei  $\omega = 10,4$  und  $\omega = 19,4$  1/s. Das entspricht genau den Rotordrehzahlen, bei denen  $\omega$  mit den Frequenzen der gleichsinnigen Eigenschwingungen  $\nu_2$  und  $\nu_4$  von Bild 3 übereinstimmt. (Schnittpunkt mit der gestrichelten Geraden  $\nu = \omega$ ). Die gegensinnigen Eigenschwingungen  $\nu_1$ ,  $\nu_3$  und  $\nu_5$ , deren Kurven in Bild 3 ebenfalls von der Geraden  $\nu = \omega$  geschnitten werden, führen erwartungsgemäß nicht zu Resonanzerscheinungen. Für den verwendeten Satz von Parametern existiert auch keine Resonanz mit der stets gleichsinnigen Nutationsschwingung  $\nu_6$ ; wegen  $\nu_6(\omega) > \omega$  gibt es keinen Schnittpunkt mit der Drehzahlgeraden  $\nu = \omega$ . Weil aus diesem Grunde bei höheren Drehzahlen nichts mehr passiert, ist in Bild 8 nur der untere Teil des Drehzahlbereiches aufgetragen worden. Die Gehäusedämpfung wirkt sich auf die zweite Resonanzstelle stärker als auf die erste aus, auf die Rotorverdrehung und Gehäusebewegung stärker als auch die Rotortranslation. Dies erklärt u. a. die Beobachtung, daß bei ungünstig beladener Zentrifuge Anlaufschwierigkeiten durch heftige Rotortranslations-Schwingungen bis zum Anschlag an das Gehäuse auftreten. Die in Kap. 3 theoretisch gefundene Tatsache des geringen Durchdringens



**Bild 8.** Resonanz- und Phasen-Kurven für unwuchterregte Zwangsschwingungen; Gehäusedämpfung  $d_G \neq 0$

der Gehäusedämpfung zur Rotor-Translation deutet sich demnach auch bei den Zwangsschwingungen an. Insbesondere kann festgestellt werden, daß die Amplitude von  $x, y$  bei der durch (29) definierten Frequenz ( $\omega = 31 \text{ 1/s}$ ), für die die Dämpfung nicht durchdringen kann, genau dem Wert entspricht, der für den ungedämpften Fall erhalten wird.

Die Resonanzkurven sind paarweise  $[(\alpha, \beta), (x, y), (\psi, \vartheta)]$  identisch. Dagegen zeigen sich bei den Phasenkurven charakteristische Unterschiede, aus denen u. a. die Veränderungen der Schwingungsformen bei Durchlaufen der Resonanzstellen ermittelt werden können. Um die Unterschiede bei gedämpftem und ungedämpftem System zu zeigen, sind in Bild 9 als Beispiel die für die Translationsbewegung  $x, y$  des Rotors geltenden Kurven gemeinsam dargestellt. Der Einfluß der Dämpfung macht sich nicht nur in einem Abschleifen der Resonanzüberhöhungen (das erste Maximum der Kurve mit  $d_G \neq 0$  reicht bis zu einem Wert 12 für die Vergrößerungsfunktion), sondern auch im Beseitigen einer Tilgungsstelle zwischen den Resonanzstellen bemerkbar. An dieser Tilgungsstelle gibt es im ungedämpften Fall einen Phasen-



**Bild 9.** Resonanz- und Phasen-Kurven für die Translationskoordinate  $y$  ohne und mit Gehäusedämpfung  $d_G$

sprung. Die Dämpfung verändert die Phasenkurven so stark, daß die systembedingten Gründe für diesen Kurvenverlauf bei gedämpftem System kaum noch erkannt werden können.

Bei den Resonanzkurven für die Gehäusebewegung  $(\alpha, \beta)$  sowie die Rotorverdrehung  $(\psi, \vartheta)$  existiert im Fall fehlender Dämpfung keine Tilgungsstelle. Entsprechend gibt es dafür auch nur je zwei Sprünge in den Phasenkurven. Sie sind in den in Bild 8 unten gezeigten Kurven infolge der Dämpfung nur noch als mehr oder weniger sanfte Übergänge zu erkennen.

#### Literatur

1. Schweitzer, G.; Schiehlen, W.; Müller, P. C.; Hübner, W.; Lückel, J.; Sandweg, G.; Lautenschlager, R.: Kreiselverhalten eines elastisch gelagerten Rotors. Ing.-Arch. 41 (1971) 110–140
2. Magnus, K.: Kreisel, Theorie und Anwendungen. Kap. 5.3. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971
3. Müller, P. C.: Asymptotische Stabilität von linearen mechanischen Systemen mit positiv semidefiniter Dämpfungsmatrix. Z. Angew. Math. Mech. 51 (1971) T 197–T 198
4. Müller, P. C.: Stabilität und Matrizen, Kap. 2.3.5, S. 58–62. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1977

*Eingegangen am 2. November 1978*

Prof. Dr. K. Magnus

Germinger Straße 13

D-8035 Gauting

Bundesrepublik Deutschland