

## Aktive Kreiselssysteme\*

K. Magnus, Gauting

**Übersicht:** Aktive Elemente in Kreiselssystemen können sich in verschiedenartigen Effekten auswirken. Allgemeine Bewegungsgleichungen werden abgeleitet. Mit ihrer Hilfe lassen sich globale Aussagen zum Stabilitätsverhalten von Kreiselssystemen mit Rotorantrieb gewinnen: 1) Konservative Systeme bleiben auch dann quasi-konservativ, wenn eine ideal wirkende Antriebsregelung vorhanden ist, die die relativen Geschwindigkeiten zwischen den Rotoren und ihren Gehäusen konstant hält. 2) Eigenstabile Asynchron-Antriebe machen ein grenzstabiles Kreiselssystem asymptotisch stabil bezüglich der Geschwindigkeiten. 3) Entsprechendes gilt für eigengedämpfte Synchron-Antriebe; hier gilt die asymptotische Stabilität auch für die Rotorwinkel selbst. Am Beispiel einer motorangetriebenen Zentrifuge werden diese Ergebnisse durch Untersuchen der Eigenwerte präzisiert. Zugleich wird gezeigt, daß bezüglich der Lagewinkel Instabilität infolge kinetischer Auswanderung auftreten kann.

**Summary:** Due to active elements in gyroscopic systems various effects may occur. For their examination quite general equations of motion are derived, which allow some globale statements concerning the stability of gyro-systems with motor-driven rotors: 1) Conservative systems will behave quasi-conservative, if ideal working controllers are installed, which keep the relative rotational velocities of the rotors constant. 2) Asynchronous driving motors, which are stable for themselves, turn a marginal stable system into a system, asymptotically stable with respect to the velocities. 3) The same is valid for systems, in which the rotors are driven by damped synchronous motors; here asymptotic stability exists for the rotor-angles as well. As an example a motor-driven centrifuge is examined. The general results are proved and extended by calculating the eigenvalues. Furthermore it is shown that unstable behaviour with respect to the attitude angles is possible due to effects of kinetic drift.

### 1 Der Einfluß aktiver Elemente auf das Verhalten von Kreiselssystemen

Einzelfälle von Kreiselssystemen mit aktiven Elementen sind seit dem Beginn der technischen Anwendungen von Kreiseln bekannt und zum Teil ausführlich analysiert worden. Es sei hier nur an die zahlreichen Veröffentlichungen zur Dämpfung störender Schwingungen oder zur Überwachung der Anzeige von Kreisel-Meßgeräten, wie Kreisel-Kompassen und Kreisel-Horizonten, erinnert. In neuerer Zeit sind entsprechende Untersuchungen zur Schwingungstilgung bei Raumfahrzeugen und Satelliten (Nutationsdämpfer) sowie zum zeitoptimalen Ausrichten von Trägheits-Navigationsplattformen durchgeführt worden.

Neben einer gewünschten Verbesserung der Systemeigenschaften können sich aktive Elemente auch störend auswirken. Dabei soll hier zwischen zwei Arten derartiger Effekte unterschieden werden: Solche die durch das Wechselspiel von Antriebs- und Widerstands-Kräften für die im System vorhandenen Rotoren bedingt sind (Antriebs-Effekte) und solche, die durch andere, meist zur Führung, Stützung oder Dämpfung eingesetzte Kraft- oder Momenten-Geber hervorgerufen werden (Führung-Effekte). Zu diesen gehören z. B.:

\* Hans Ziegler zum 70. Geburtstag gewidmet

- Die bei Kurskreiseln mit Führung z. B. über das Magnetfeld der Erde entstehenden Schleppfehler oder die Kurvenfehler bei Kreiselhorizonten;
- die infolge einer Stützung des Innenrahmens bei Lagekreiseln in Kardansystemen vorkommenden Taumelfehler;
- die entweder durch unstetige Stützmomente oder durch stetige Stützmomente in Verbindung mit Coulombschen Reibungskräften bedingten Restschwingungen, wie sie sowohl bei Kreiselgeräten [1] als auch bei der Nutationsdämpfung von Satelliten [2] beobachtet worden sind;
- die günstigen Wirkungen einer Kombination von Lager- und Dämpfungseigenschaften bei magnetisch gelagerten Rotorsystemen, wie sie z. B. von Schweitzer [3] für schnelllaufende Zentrifugen untersucht worden sind.

Von den Antriebseffekten seien genannt:

- Die merkwürdigen, von Grammel [4] untersuchten Verhaltensweisen unsymmetrischer Rotoren mit körperfest ausgerichteten Antriebsmomenten. Hier kann der Körper bei entsprechenden Anfangsbedingungen Taumelbewegungen um Achsen senkrecht zur Antriebsachse ausführen, ohne um die Antriebsachse selbst zu drehen;
- der Kreiselkollaps [5, Kap. 11.3], der bei Lagekreiseln mit eingeschränkter Bewegungsfreiheit bei auslaufendem Rotor zu einem vollständigen Versagen der Lagen-Anzeige führen kann;
- kinetische Auswanderungen, die bei Störungen des Momentengleichgewichtes um die Antriebsachse der Rotoren möglich sind [5, Kap. 11.4.2];
- instabile Bereiche, die z. B. bei Lagekreiseln mit Führung bei bestimmten Drehzahlen oder Drehzahländerungen auftreten können [6], oder die bei Gyrostaten untersucht worden sind [7].

Während das Schrifttum zu Führungs-Effekten außerordentlich umfangreich ist, scheinen die möglichen Verhaltensweisen bei Systemen mit Antriebs-Effekten noch keineswegs ausreichend geklärt zu sein. In den meisten Arbeiten wird einfach postuliert, daß bezüglich der Rotorachsen Momentengleichgewicht herrscht, so daß die Komponenten  $\omega_i$  der Absolutdrehung für diese Achsen konstant bleiben. Auch der andere Grenzfall, daß die relativen Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\varphi}_i$  der Rotoren gegenüber ihren Gehäusen durch ideal wirkende Regelungen als konstant betrachtet werden können, ist in Einzelfällen schon früh, und vor kurzem auch allgemein behandelt worden [8]. Für reale Systeme, die irgendwo zwischen diesen beiden Grenzfällen  $\omega_i = \text{const}$  und  $\dot{\varphi}_i = \text{const}$  liegen, gibt es für einen kardanischn gelagerten Kreisel sorgfältige Untersuchungen von Klimov und Charlamov [9]. Sie zeigen, daß der Kreiselantrieb, gleichgültig ob mit Synchron- oder Asynchron-Motor, dämpfend auf störende Nutationsschwingungen einwirkt. Eventuelle kinetische Auswanderungen der Rotorachse bleiben deshalb begrenzt.

Ziel der nun vorgelegten Arbeit ist es, vorhandene Ergebnisse und Ansätze für aktive Kreiselsysteme, bei denen Antriebs-Effekte auftreten können, zu verallgemeinern. Dazu sollen die allgemeinen Bewegungsgleichungen aufgestellt und daraus einige globale Aussagen zum Stabilitätsverhalten abgeleitet werden. Am Beispiel einer motorangetriebenen Zentrifuge sollen die Ergebnisse dann konkretisiert werden. Insbesondere werden die Eigenwerte in ihrer Abhängigkeit von den Parametern des Antriebs untersucht und damit das allgemeine Bewegungsverhalten der Zentrifuge bestimmt.

## 2 Bewegungsgleichungen aktiver Kreiselsysteme und ihrer Grenzfälle

Entsprechend dem Vorgehen in [8] sollen hier Bewegungsgleichungen vom Lagrangeschen Typ abgeleitet werden, bei denen von Energieausdrücken ausgegangen wird. Der Einfluß der aktiven Elemente sowie eventuell vorhandener dissipativer Kräfte kann durch verallgemeinerte Kräfte  $\mathbf{Q}$  berücksichtigt werden.

Die kinetische Energie  $T$  läßt sich in bekannter Weise durch Abspalten eines von den Rotoren kommenden Anteils in der Form

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\omega} \quad (1)$$

schreiben. Dabei ist  $\mathbf{M}$  die symmetrische, für reale Systeme stets positiv definite Massenmatrix des Systems, jedoch ohne die Trägheitsmomente der Rotoren bezüglich ihrer Symmetrieachsen; diese sind in der Diagonalmatrix  $\mathbf{A}$  gesondert zusammengefaßt. Der Bewegungszustand des Systems wird durch die zeitliche Ableitung des Vektors  $\mathbf{q}$  der Lagekoordinaten beschrieben; die Komponenten der Absolutdrehung der Rotoren um ihre Symmetrieachsen sind im Vektor

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} \quad (2)$$

zusammengefaßt. Dabei gibt  $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$  die Drehgeschwindigkeiten der Rotoren relativ zu ihren Gehäusen und  $\mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}$  die Anteile der Führungsgeschwindigkeiten wieder. Die Matrix  $\mathbf{B}$  zeigt an, welche der Komponenten von  $\dot{\mathbf{q}}$  für die einzelnen Rotoren als Führungsdrehungen wirksam sind. Ein Element  $B_{ij}$  ist gleich dem Cosinus zwischen den Richtungen von  $\dot{\varphi}_i$  und  $\dot{q}_j$ ;  $B_{ij}$  verschwindet, wenn  $\dot{q}_j$  nicht Führungsdrehung für den  $i$ -ten Rotor ist. Man kann deshalb  $\mathbf{B}$  auch als Strukturmatrix bezeichnen.

Mit (2) kann (1) umgeformt werden in

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}^* \dot{\mathbf{q}} + \dot{\boldsymbol{\varphi}}^T \mathbf{A} \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\varphi}}^T \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\varphi}} \quad (3)$$

mit

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M} + \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \text{und} \quad \dot{\boldsymbol{\varphi}}^T \mathbf{A} \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\varphi}}.$$

Wenn im System  $m$  Rotoren und außer der Drehfreiheit der Rotoren  $n$  zusätzliche Freiheitsgrade vorhanden sind, dann haben die in (3) vorkommenden Größen die Dimensionen:  $\mathbf{q}$ :  $n$ -Vektor,  $\boldsymbol{\varphi}$ :  $m$ -Vektor,  $\mathbf{M}^*$ : Symmetrische  $(n \times n)$ -Matrix,  $\mathbf{A}$ :  $(m \times m)$ -Diagonal-Matrix,  $\mathbf{B}$ :  $(m \times n)$ -Matrix. Die Matrizen  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{M}^*$  und  $\mathbf{B}$  können auch von  $\mathbf{q}$  abhängen; die Matrix  $\mathbf{A}$  ist unabhängig davon.

Wenn man nun mit (3) die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen zweiter Art

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}_q; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\varphi}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{Q}_\varphi \quad (4)$$

ausrechnet, dann erhält man unter Berücksichtigung der Tatsache, daß wegen der hier vorausgesetzten Symmetrie der Rotoren  $\partial T / \partial \boldsymbol{\varphi} = 0$  gilt, die Gleichungen:

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}^T \mathbf{A} \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \left\{ \frac{\partial(\mathbf{M}^* \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(\mathbf{M}^* \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \right]^T + \frac{\partial(\mathbf{B}^T \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\varphi}})}{\partial \mathbf{q}} - \left[ \frac{\partial(\mathbf{B}^T \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\varphi}})}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \right\} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_q, \quad (5)$$

$$\mathbf{A} \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{A} \mathbf{B} \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial(\mathbf{A} \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_\varphi. \quad (6)$$

Beide Vektorgleichungen zusammen entsprechen  $n + m$  skalaren Gleichungen für die Komponenten  $q_i$  und  $\varphi_j$ . Sie sind hier in einer solchen Form geschrieben worden, daß Ableitungen von Dyaden, die Tensoren von höherer als zweiter Stufe ergeben, nicht auftreten. Eine etwas kompaktere Form ließe sich zwar durch Einführen von Christoffel-Symbolen gewinnen, jedoch bringt dies für die numerische Auswertung keine Vorteile. Entsprechendes gilt auch für eine leicht mögliche formale Zusammenfassung beider Gleichungen zu einer einzigen  $(n + m)$ -Vektorgleichung. Dadurch würde im Gegenteil der Einfluß der  $\mathbf{Q}$  nicht mehr deutlich erkennbar sein: Die  $\mathbf{Q}_\varphi$  sind nämlich die für alle Arten der anfangs erwähnten Antriebs-Effekte verantwortlichen verallgemeinerten Kräfte, die  $\mathbf{Q}_q$  sind Ursache für eventuelle Führungs-Effekte.

Aus (5) und (6) findet man leicht den schon aus [8] bekannten Grenzfall von Systemen mit idealer Regelung der Rotordrehzahl. Mit

$$\ddot{\boldsymbol{\varphi}} = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{L} = \text{const}, \quad (7)$$

wobei  $\mathbf{L}$  der  $m$ -Vektor der jetzt konstanten Relativdrall-Anteile der Rotoren ist, geht (5) über in:

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{q}} + \left\{ \frac{\partial(\mathbf{M}^* \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(\mathbf{M}^* \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \right]^T + \frac{\partial(\mathbf{B}^T \mathbf{L})}{\partial \mathbf{q}} - \left[ \frac{\partial(\mathbf{B}^T \mathbf{L})}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \right\} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_q. \quad (8)$$

Aus (6) findet man die für die ideale Regelung notwendigen Rotor-Antriebsmomente

$$\mathbf{Q}_\varphi = \frac{d}{dt} (\mathbf{A}\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{A} \frac{d}{dt} (\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}). \quad (9)$$

In Kapitel 3 wird gezeigt, daß diese speziellen äußeren Antriebsmomente den Energieinhalt des Systems nicht verändern, so daß sie als quasi-konservativ bezeichnet werden können.

Der andere Grenzfall, bei dem angenommen wird, daß keine resultierenden Momente um die Rotordrehachsen wirksam sind, also  $\mathbf{Q}_\varphi = 0$  gilt, führt wegen (6) nach Integration zu

$$\mathbf{A}(\dot{\varphi} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{A}\omega = \mathbf{L}^* = \text{const}. \quad (10)$$

Jetzt sind die im Vektor  $\mathbf{L}$  zusammengefaßten Absolutdrall-Anteile der Rotoren bezüglich der Rotorachsen konstant. Geht man mit  $\dot{\varphi} = \omega - \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}$  und folglich

$$\ddot{\varphi} = -\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}} - \frac{\partial(\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \quad (11)$$

in (5) ein, so erhält man nach Umformen

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \left\{ \frac{\partial(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \right]^T + \frac{\partial(\mathbf{B}^T \mathbf{L}^*)}{\partial \mathbf{q}} - \left[ \frac{\partial(\mathbf{B}^T \mathbf{L}^*)}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \right\} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_q. \quad (12)$$

Dies ist aber die bekannte Form der Bewegungsgleichungen, wie sie sich durch Anwenden des von Kelvin und Tait angegebenen Formalismus (s. [8]) oder auch unmittelbar aus dem Lagrangeschen Formalismus mit (1) und (2) gewinnen läßt.

Ein Vergleich der für die beiden Grenzfälle geltenden Bewegungsgleichungen (8) und (12) zeigt, daß (12) aus (8) entsteht, wenn anstelle der erweiterten Massenmatrix  $\mathbf{M}^*$  einfach  $\mathbf{M}$ , und anstelle des Vektors  $\mathbf{L}$  der konstanten Relativdrall-Anteile jetzt der Vektor  $\mathbf{L}^*$  der konstanten Absolutdrall-Anteile gesetzt wird. In beiden Fällen sind nur  $n$  skalare Gleichungen, entsprechend der Anzahl der Lagekoordinaten  $q_i$  zu lösen, während im allgemeinen Fall  $n + m$  Gleichungen untersucht werden müssen.

### 3 Konservative Kreiselssysteme mit idealer Drehzahlregelung

Klimov und Charlamov [9] haben gezeigt, daß ein kardanisch gelagerter Kreisel mit idealer Drehzahlregelung ein quasikonservatives System darstellt. Dieses Ergebnis läßt sich auf allgemeine Kreiselssysteme übertragen. Hierzu wird zunächst vorausgesetzt, daß das betrachtete System mit  $\mathbf{Q}_\varphi = 0$  konservativ ist; dann gilt mit einem Potential  $V$

$$\mathbf{Q}_q^T = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}. \quad (13)$$

Jetzt soll die Änderung der Gesamtenergie  $E$  des Systems betrachtet werden, die sich aus den Anteilen von kinetischer und potentieller Energie, sowie aus der von Rotor-Antriebskräften  $\mathbf{Q}_\varphi$  geleisteten Arbeit zusammensetzt

$$dE = dT + dV - dW \quad (14)$$

mit

$$dW = \mathbf{Q}_\varphi^T d\varphi. \quad (15)$$

Wegen  $T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\varphi})$ ,  $V = V(\mathbf{q})$  und  $\delta\dot{\varphi} = 0$  erhält man für (14)

$$\begin{aligned} dE &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} d\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} - \mathbf{Q}_\varphi^T d\varphi, \\ &= \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{Q}_\varphi^T \dot{\varphi} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q}. \end{aligned} \quad (16)$$

Für die hierin vorkommenden Ausdrücke folgt aus (3) mit  $\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{L} = \text{const}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \ddot{\mathbf{q}} &= \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{L}^T \mathbf{B} \ddot{\mathbf{q}}, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial(\mathbf{M}^* \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial(\mathbf{B}^T \mathbf{L})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}},\end{aligned}$$

und aus (9) wegen  $\ddot{\boldsymbol{\varphi}} = 0$

$$\mathbf{Q}_\varphi^T \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \left[ \frac{d}{dt} (\mathbf{A} \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}) \right]^T \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\varphi}}) = \ddot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{L} + \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial(\mathbf{B}^T \mathbf{L})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}}.$$

Eingesetzt in (16) heben sich einige Anteile heraus, wobei zu berücksichtigen ist, daß die skalaren Ausdrücke durch Transponieren nicht verändert werden. Es bleibt

$$dE = \left[ \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial(\mathbf{M}^* \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} \right] dt + dV. \quad (17)$$

Die hier auf der rechten Seite vorkommenden Ausdrücke lassen sich andererseits aus der für diesen Grenzfall gültigen Bewegungsgleichungen (8) nach Transposition und skalarer Multiplikation von rechts mit  $d\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} dt$  gewinnen. Man erhält bei Fortlassen der sich gegenseitig aufhebenden skalaren Anteile

$$\left\{ \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}^* \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left[ \frac{\partial(\mathbf{M}^* \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]^T \dot{\mathbf{q}} \right\} dt = \mathbf{Q}_q^T d\mathbf{q} = -dV.$$

Durch Vergleich mit (17) findet man  $dE = 0$  oder

$$E = T + V - W = \text{const}. \quad (18)$$

Der gesamte Energieinhalt von Kreiselssystemen mit  $\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \text{const}$  ändert sich also nicht. Obwohl aktive Elemente, nämlich Rotorantriebe vorhanden sind, können derartige Systeme als quasi-konservativ bezeichnet werden. Dieses vielleicht überraschende Ergebnis wird plausibel, wenn man bedenkt, daß ideale Regelungen gerade so wirken, als seien die Rotoren in ihren Gehäusen festgefroren. Die aktiven Elemente entsprechen demnach Vergrößerungen der passiven Gehäuse-Trägheitsmomente. Die nicht vernachlässigbaren konstanten Relativdrall-Anteile bzw. die ihnen entsprechenden Kreiselkräfte können aber bei virtuellen Verschiebungen des Systems keine Arbeit leisten.

Das hier erhaltene Ergebnis deckt sich übrigens teilweise mit Untersuchungen von Hagedorn [10], der gezeigt hat, daß das kinetische Potential für ein freies System mit konstantem  $\boldsymbol{\omega}$  stets dann ein Minimum besitzt, wenn das kinetische Potential für das entsprechende eingeschränkte System mit konstantem  $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$  minimal ist.

#### 4 Das Stabilitätsverhalten von Systemen mit asynchron angetriebenen Rotoren

Bei feststehendem Gehäuse eines Rotors wirken um seine Symmetrieachse Antriebs- und Widerstandsmomente; beide hängen von der Drehgeschwindigkeit  $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$  im Prinzip nach der in Bild 1 skizzierten Weise ab. Die Momentenkurven schneiden sich bei der Betriebsdrehzahl  $\dot{\boldsymbol{\varphi}}_0$ . Es gilt stets

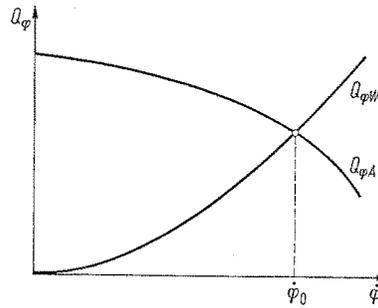
$$Q_\varphi = Q_{\varphi A} - Q_{\varphi W} = \begin{cases} f(\dot{\boldsymbol{\varphi}} - \dot{\boldsymbol{\varphi}}_0) < 0 & \text{für } \dot{\boldsymbol{\varphi}} > \dot{\boldsymbol{\varphi}}_0, \\ f(\dot{\boldsymbol{\varphi}} - \dot{\boldsymbol{\varphi}}_0) > 0 & \text{für } \dot{\boldsymbol{\varphi}} < \dot{\boldsymbol{\varphi}}_0, \end{cases}$$

oder mit  $\dot{\boldsymbol{\varphi}} - \dot{\boldsymbol{\varphi}}_0 = y$ :

$$y Q_\varphi = y f(y) < 0. \quad (19)$$

Diese Bedingung garantiert zugleich asymptotische Stabilität für den Antrieb bezüglich  $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ . Das folgt unmittelbar aus dem Drallsatz für den einzelnen Rotor:

$$A \ddot{\boldsymbol{\varphi}} = Q_\varphi = f(\dot{\boldsymbol{\varphi}} - \dot{\boldsymbol{\varphi}}_0) \quad \text{oder} \quad \dot{y} = \frac{1}{A} f(y),$$



**Bild 1.** Antriebs- und Widerstands-momente als Funktion der Drehgeschwindigkeit

und daraus mit (19)

$$y\dot{y} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} y^2 \right) = \frac{1}{A} y f(y) < 0. \quad (20)$$

Für kleine Abweichungen der Drehgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  von der Betriebsdrehzahl  $\dot{\varphi}_0$ , also für kleine Werte von  $y$ , kann  $f(y) \approx -Ky$  gesetzt werden, so daß mit der Anfangsbedingung  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_1$  für  $t = 0$  aus (10) die Lösung

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 - (\dot{\varphi}_0 - \dot{\varphi}_1) e^{-\frac{K}{A} t} \quad (21)$$

erhalten wird. Mit  $K = 0$  hat man den Grenzfall des momentenfreien Rotors;  $K \rightarrow \infty$  gibt den anderen Grenzfall eines Rotors mit idealer Regelung.

Es soll nun angenommen werden, daß für jeden der im System vorhandenen Rotoren die Bedingung (19) erfüllt und damit asymptotische Stabilität bezüglich der  $\dot{\varphi}_i$  bei festgehaltenen Gehäusen vorhanden ist. Dann läßt sich zeigen, daß auch bei  $\dot{\mathbf{q}} \neq 0$  das Gesamtsystem asymptotisch stabil bezüglich der Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{q}}$  und  $\dot{\varphi}$  ist.

Zum Beweis wird – wie auch in [9] – die Ljapunovsche Methode auf den Zustands-Unterraum der Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{q}}$  und  $\dot{\varphi}$  angewendet. Mit  $\mathbf{y} = \dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0$  wird die reduzierte kinetische Energie

$$\begin{aligned} T^* &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} (\mathbf{y} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}})^T \mathbf{A} (\mathbf{y} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}) \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}^* \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \end{aligned} \quad (22)$$

als Ljapunovsche Testfunktion verwendet; sie entsteht aus  $T$  nach (1) oder (3) bei Ersetzen von  $\dot{\varphi}$  durch  $\mathbf{y} = \dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0$ . Als Summe zweier quadratischer Formen mit den Massen-Matrizen  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{A}$  ist  $T^*$  eine positiv definite Funktion bezüglich  $\dot{\mathbf{q}}$  und  $\dot{\varphi}$ . Man kann zeigen, daß ihre totale Ableitung nach der Zeit unter den zuvor angenommenen Voraussetzungen negativ definit ist, so daß nach Ljapunov asymptotische Stabilität bezüglich der Geschwindigkeiten vorhanden ist. Hierzu wird betrachtet:

$$\begin{aligned} \frac{dT^*}{dt} &= \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial T^*}{\partial \mathbf{y}} \dot{\mathbf{y}} \\ &= (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}^* + \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{B}) \ddot{\mathbf{q}} + \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial (\mathbf{M}^* \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial (\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{y})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{y}^T \mathbf{A} + \mathbf{y}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}) \dot{\mathbf{y}}. \end{aligned} \quad (23)$$

In diesen Ausdruck müssen die Bewegungsgleichungen (5) und (6) eingeführt werden. Das geschieht am besten wie folgt: Man multipliziert (5) skalar von links mit  $\dot{\mathbf{q}}^T$ , entsprechend (6) mit  $\mathbf{y}^T$  und addiert. Unter Fortlassen der sich gegenseitig aufhebenden Glieder erhält man dann:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A} \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial (\mathbf{M}^* \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{y}^T \mathbf{A} \ddot{\varphi} + \\ + \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{B} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{y}^T \frac{\partial (\mathbf{A} \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q}_q + \mathbf{y}^T \mathbf{Q}_\varphi. \end{aligned} \quad (24)$$

Berücksichtigt man nun, daß  $\ddot{\varphi} = \dot{\mathbf{y}}$  ist und durch Umformen

$$\dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial(\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{y})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{y}}^T \frac{\partial(\mathbf{A} \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}$$

erhalten werden kann, dann folgt aus einem Vergleich von (24) mit (23)

$$\frac{dT^*}{dt} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q}_q + \mathbf{y}^T \mathbf{Q}_\varphi. \quad (25)$$

Da hier der Einfluß der Antriebskräfte  $\mathbf{Q}_\varphi$  untersucht werden soll, wird  $\mathbf{Q}_q = 0$  gesetzt. Wegen (19) folgt damit aus (25)

$$\frac{dT^*}{dt} = \mathbf{y}^T \mathbf{Q}_\varphi < 0, \quad (26)$$

womit die behauptete asymptotische Stabilität des Systems bezüglich der  $\dot{\mathbf{q}}$  und  $\dot{\varphi}$  bewiesen ist. Als Ergebnis kann demnach festgestellt werden, daß Asynchronantriebe eventuell vorhandene Schwingungen des Systems zum Abklingen bringen.

Es muß jedoch ausdrücklich betont werden, daß damit nicht notwendigerweise auch die Stabilität bezüglich der Lagekoordinaten  $\mathbf{q}$  gewährleistet ist. Man erkennt das sofort aus dem bekannten Verhalten eines astatischen Kardankreisels. Unter dem Einfluß von Nutationschwingungen kann ein kinetisches Auswandern des Kardanrahmens auftreten, so daß Schranken, wie sie nach den Ljapunovschen Stabilitätsbedingungen auch für den Rahmenwinkel eingehalten werden müssen, überschritten werden können. Das gilt auch dann noch, wenn die Nutationsschwingungen infolge der Wirkung des Rotorantriebs abklingen. Obwohl dann die Auswanderungsgeschwindigkeit gegen Null geht, bleibt eine endliche Gesamtauslenkung bestehen. In Kapitel 6 wird ein entsprechender Effekt am Beispiel einer Zentrifuge untersucht.

## 5 Das Stabilitätsverhalten von Systemen mit synchron angetriebenen Rotoren

Bei feststehendem Gehäuse ( $\dot{\mathbf{q}} = 0$ ) hängt das Antriebsmoment eines Synchronmotors von dem Nacheilwinkel des Rotors und von der zeitlichen Änderung dieses Winkels gegenüber dem rotierenden Magnetfeld ab. Bei nicht zu großen Abweichungen kann linearisiert werden, so daß hier

$$Q_\varphi = -K_S(\varphi - \varphi_0) - K_D(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0) \quad (27)$$

angesetzt werden soll. Durch den Faktor  $K_S$  wird die Synchronfesselung des Rotors an das Feld, durch  $K_D$  die durch Wirbelströme bedingte Dämpfung beschrieben;  $K_S = 0$  führt auf den zuvor behandelten Fall des asynchronen Rotorantriebs,  $K_S \rightarrow \infty$  ergibt wieder den Grenzfall idealer Regelung. Der Winkel  $\varphi_0 = \omega_F t = \dot{\varphi}_0 t$  ist der linear mit der Zeit anwachsende, vom rotierenden Feld vorgegebene Sollwinkel; die Winkelgeschwindigkeit des Feldes  $\omega_F = \dot{\varphi}_0$  wird als konstant betrachtet. Mit

$$z = \varphi - \varphi_0; \quad \dot{z} = \dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0; \quad \ddot{z} = \ddot{\varphi}$$

folgt aus dem Drallsatz für die Rotorachse

$$A\ddot{z} = Q_\varphi = -K_S z - K_D \dot{z} \quad (28)$$

mit der bekannten Lösung bei nicht zu großer Dämpfung

$$\left. \begin{aligned} z &= Z e^{-\delta t} \cos(\nu t - \psi), \\ \delta &= \frac{K_D}{2A}; \quad \nu^2 = \frac{K_S}{A} - \left(\frac{K_D}{2A}\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Der einzelne Rotor ist asymptotisch stabil an das Feld gefesselt, wenn

$$\delta = \frac{K_D}{2A} > 0 \quad (30)$$

gilt. Diese Bedingung ist bei den üblichen Synchronantrieben stets erfüllt.

Jetzt wird das Gesamtsystem mit  $\dot{\mathbf{q}} \neq 0$  betrachtet, wobei wieder vorausgesetzt wird, daß (30) für jeden der im System vorhandenen Rotoren für sich erfüllt ist. Dann kann mit dem  $m$ -Vektor

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi}_0; \quad \dot{\mathbf{z}} = \dot{\boldsymbol{\varphi}} - \dot{\boldsymbol{\varphi}}_0$$

und den Diagonalmatrizen  $\mathbf{K}_S$  und  $\mathbf{K}_D$  für den Vektor der verallgemeinerten Antriebskräfte

$$\mathbf{Q}_\varphi = -\mathbf{K}_S \mathbf{z} - \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{z}} \quad (31)$$

geschrieben werden. Auf einem völlig analogen Wege, wie er in Kapitel 4 für den Fall asynchron angetriebener Rotoren verwendet wurde, läßt sich nun zeigen, daß die Grundgleichungen (5) und (6) mit (31) und  $\mathbf{Q}_q = 0$  asymptotisch stabiles Verhalten bezüglich  $\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\mathbf{z}$ ,  $\dot{\mathbf{z}}$  ergeben.

Als Ljapunov-Funktion wird jetzt der gegenüber (22) erweiterte Energieausdruck

$$\begin{aligned} E^* &= T^* + \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{K}_S \mathbf{z}, \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}^* \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{z}}^T \mathbf{A} \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{z}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{z}} + \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{K}_S \mathbf{z} > 0 \end{aligned} \quad (32)$$

verwendet. Wegen  $E^* = E^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$  erhält man für die totale Ableitung nach der Zeit:

$$\begin{aligned} \frac{dE^*}{dt} &= \frac{\partial E^*}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial E^*}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial E^*}{\partial \mathbf{z}} \dot{\mathbf{z}} + \frac{\partial E^*}{\partial \dot{\mathbf{z}}} \ddot{\mathbf{z}} \\ &= \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial(\mathbf{M}^* \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial(\mathbf{B}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{z}})}{\partial \mathbf{q}} \right) \dot{\mathbf{q}} + (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}^* + \dot{\mathbf{z}}^T \mathbf{A} \mathbf{B}) \ddot{\mathbf{q}} + \\ &\quad + \mathbf{z}^T \mathbf{K}_S \dot{\mathbf{z}} + (\dot{\mathbf{z}}^T \mathbf{A} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}) \ddot{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Nach dem gleichen Verfahren wie in Kapitel 4 (Multiplikation von (5) mit  $\dot{\mathbf{q}}^T$ , von (6) mit  $\dot{\mathbf{z}}^T$  und Vergleich der Summe mit (33)) erhält man nun:

$$\frac{dE^*}{dt} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q}_q + \dot{\mathbf{z}}^T \mathbf{Q}_\varphi + \mathbf{z}^T \mathbf{K}_S \dot{\mathbf{z}}.$$

Mit  $\mathbf{Q}_q = 0$  und  $\mathbf{Q}_\varphi$  von (31) wird daraus wegen  $\dot{\mathbf{z}}^T \mathbf{K}_S \mathbf{z} = \mathbf{z}^T \mathbf{K}_S \dot{\mathbf{z}}$ :

$$\frac{dE^*}{dt} = -\dot{\mathbf{z}}^T \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{z}}. \quad (34)$$

Dieser Ausdruck ist jedoch bei eigenstabilen Rotorantrieben stets negativ, so daß die asymptotische Stabilität des Systems bezüglich  $\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\mathbf{z}$  und  $\dot{\mathbf{z}}$  bewiesen ist. Selbst für den Grenzfall, daß der Dämpfungsanteil der Synchronantriebe verschwindet ( $K_D = 0$ ) ist noch Grenzstabilität im Sinne Ljapunovs vorhanden. Das System verhält sich dann konservativ.

## 6 Beispiel: Eine motorangetriebene Zentrifuge

Es soll eine aus Rotor und einem dreiachsig drehbar gelagerten und elastisch gefesseltem Stator bestehende Zentrifuge betrachtet werden, wie sie in Bild 2 skizziert ist. Der Lagermittelpunkt  $F$  ist Fixpunkt, der Schwerpunkt  $S$  des Gesamtsystems liegt auf der Rotor-Symmetrieachse im Abstand  $\overline{FS} = s$ . Rotor  $R$  und Motor-Stator  $M$  werden als symmetrisch bezüglich der Rotorachse angenommen, so daß ein symmetrischer Gyrostat mit insgesamt 4 Freiheitsgraden vorliegt. Es sollen keine Unwuchten vorhanden sein.

### 6.1 Bewegungsgleichungen

Zur Beschreibung werden die Euler-Winkel  $\vartheta$ ,  $\psi$ ,  $\varphi_R$ ,  $\varphi_M$  (Bild 2) verwendet, der Relativwinkel des Rotors gegenüber dem Motor ist  $\varphi = \varphi_R - \varphi_M$ . Mit den Trägheitsmomenten  $A_R = B_R$ ,  $A_M = B_M$ ,  $C_R$ ,  $C_M$  kann die kinetische Energie in der Form

$$T = \frac{1}{2} \{ (A_R + A_M) (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta) + C_R (\dot{\varphi}_R + \dot{\psi} \cos \vartheta)^2 + C_M (\dot{\varphi}_M + \dot{\psi} \cos \vartheta)^2 \} \quad (35)$$

geschrieben werden. Die potentielle Energie ergibt sich aus Schwere- und Fesselungs-Potential:

$$V = G_S \cos \vartheta + \frac{1}{2} c_\vartheta \vartheta^2 + \frac{1}{2} c_\varphi (\varphi_M + \psi)^2. \quad (36)$$

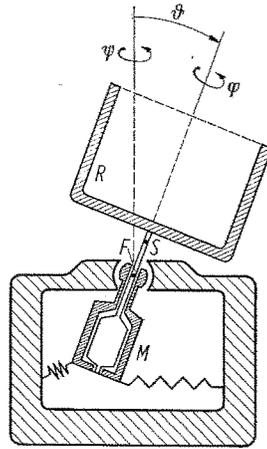


Bild 2. Zentrifugenmodell

Darin ist  $G$  das Gesamtgewicht,  $c_\vartheta$  und  $c_\varphi$  sind die Fesselungs-Beiwerte für die Schrägeneigung der Symmetrieachse (Winkel  $\vartheta$ ) und Verdrehung des Motors um die Symmetrieachse (Winkel  $\varphi_M + \varphi$ ). Der Winkel  $\varphi_M + \varphi$  entspricht nach der Definition der Eulerwinkel im Fall  $\vartheta = 0$  gerade dem absoluten Drehwinkel des Motors um die Vertikale. Für  $\vartheta \neq 0$  kann die Drehfesselung auch noch von  $\vartheta$  selbst abhängen. Man kann jedoch für nicht zu große Werte von  $\vartheta$  in guter Näherung mit dem in (36) angegebenen Potential weiterrechnen.

Aus den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen zweiter Art erhält man mit (35) und (36) sowie mit dem Antriebsmoment  $Q_{\varphi R}$  für den Rotor und den Abkürzungen  $A = A_R + A_M$ ,  $C = C_R + C_M$  das Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} A\ddot{\vartheta} - (A - C) \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\psi}^2 + C_R \sin \vartheta \dot{\psi} \dot{\varphi}_R + C_M \sin \vartheta \dot{\psi} \dot{\varphi}_M - Gs \sin \vartheta + c_\vartheta \vartheta &= 0, \\ (A \sin^2 \vartheta + C \cos^2 \vartheta) \ddot{\psi} + C_R \cos \vartheta \ddot{\varphi}_R + C_M \cos \vartheta \ddot{\varphi}_M + 2(A - C) \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\vartheta} \dot{\psi} - \\ - C_R \sin \vartheta \dot{\vartheta} \dot{\varphi}_R - C_M \sin \vartheta \dot{\vartheta} \dot{\varphi}_M + c_\varphi \varphi_M + c_\varphi \varphi &= 0, \\ C_R \ddot{\varphi}_R + C_R \cos \vartheta \ddot{\psi} - C_R \sin \vartheta \dot{\vartheta} \dot{\psi} &= Q_{\varphi R}, \\ C_M \ddot{\varphi}_M + C_M \cos \vartheta \ddot{\psi} - C_M \sin \vartheta \dot{\vartheta} \dot{\psi} + c_\varphi \varphi_M + c_\varphi \varphi &= -Q_{\varphi R}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Da der Rotorantrieb  $Q_{\varphi R}$  von  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_R - \dot{\varphi}_M$  abhängt, kann es für die nachfolgenden Überlegungen zweckmäßig sein,  $\varphi_R$  durch  $\varphi = \varphi_R + \varphi_M$  zu ersetzen. Jedoch sollen die damit aus (37) folgenden Gleichungen hier nicht gesondert angegeben werden.

## 6.2 Partikuläre Lösungen und Nachbarbewegungen

Für (37) findet man leicht zwei spezielle Lösungen:

$$a) \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0, \quad \vartheta = 0, \quad \varphi_M + \varphi = 0; \quad (38)$$

die Zentrifuge dreht mit der konstanten Drehgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}_0$  um die vertikal ausgerichtete Symmetrieachse; dabei gilt  $Q_{\varphi R}(\dot{\varphi}_0) = 0$ .

$$b) \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0, \quad \vartheta = \vartheta_0, \quad \varphi_M + \varphi = 0, \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = -\dot{\varphi}_M; \quad (39)$$

die Zentrifuge dreht mit der konstanten Drehgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}_0$  um die jetzt schrägstehende Symmetrieachse, die ihrerseits mit konstanter Geschwindigkeit  $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$  um die vertikale Achse präzediert. Für  $\dot{\psi}_0$  gibt es zwei Lösungen die aus der ersten Gleichung von (37) mit (39) als Lösung einer quadratischen Gleichung ausgerechnet werden können:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi}_{01} \\ \dot{\psi}_{02} \end{aligned} \right\} = \frac{C_R \dot{\varphi}_0}{2A \cos \vartheta_0} \left[ 1 \mp \sqrt{1 - \frac{4A \cos \vartheta_0 (Gs \sin \vartheta_0 - c_\vartheta \vartheta_0)}{C_R^2 \dot{\varphi}_0^2 \sin \vartheta_0}} \right]. \quad (40)$$

Die Bewegung mit  $\dot{\psi}_{01}$  kann als Präzession, die mit  $\dot{\psi}_{02}$  als Nutation gedeutet werden. Bei statisch stabiler Fesselung ( $c_\vartheta > Gs$ ) erfolgt die erstere im Gegensinn, die zweite dagegen im Sinne der Rotordrehung.

Bei der Untersuchung der Nachbarbewegungen zur Lösung (38) mit kleinen Werten für  $\vartheta$ ,  $\varphi_M + \psi = x$  und  $\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0 = y$  stellt man zunächst fest, daß die aus (37) folgenden linearisierten Gleichungen entkoppelt sind. Unabhängig von  $\vartheta$  und  $\psi$  können  $x$  und  $y$  aus (37/3) und (37/4) berechnet werden. Mit dem linearisierten Antriebsmoment  $Q_{\varphi R} = -ky$  hat man

$$\left. \begin{aligned} C_R \ddot{x} + C_R \dot{y} + ky &= 0, \\ C_M \ddot{x} + c_\varphi x - ky &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

mit der charakteristischen Gleichung

$$C_R C_M \lambda^3 + k C \lambda^2 + C_R c_\varphi \lambda + c_\varphi k = 0. \quad (42)$$

Ihre Wurzeln haben in den beiden Grenzfällen  $k = 0$  (kein Antrieb) und  $k \rightarrow \infty$  (extrem harte Fesselung des Rotors an die Betriebs-Drehgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}_0$ ) verschwindende Realteile, so daß das System dann grenzstabil ist:

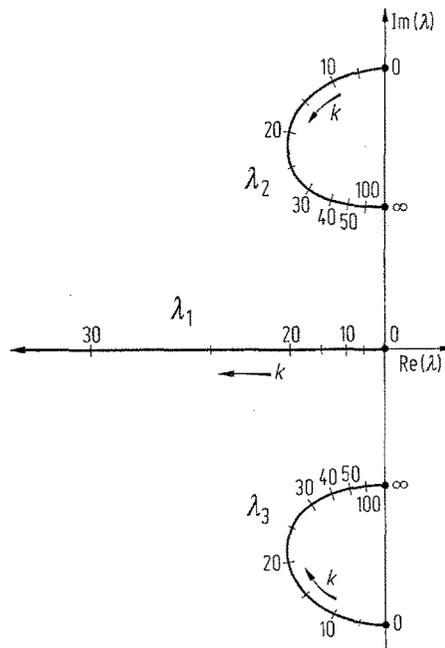
$$k = 0: \quad \left. \begin{aligned} \lambda_1 &= 0; \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{aligned} \right\} = \pm i \sqrt{\frac{c_\varphi}{C_M}}; \quad (43)$$

$$k \rightarrow \infty: \quad \left. \begin{aligned} \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{aligned} \right\} = \pm i \sqrt{\frac{c_\varphi}{C}}. \quad (44)$$

Für  $0 < k < \infty$  sind die Realteile aller Wurzeln negativ, wie man auch aus der Hurwitz-Bedingung

$$H_2 = k C C_R c_\varphi - C_R C_M c_\varphi k = k C_R^2 c_\varphi > 0$$

feststellen kann. Der Einfluß des Antriebsbeiwertes  $k$  kann aus den Wurzelortskurven (Bild 3) abgelesen werden. Man erkennt, daß die vorhandenen Schwingungen für etwa  $k = 23$  am stärksten gedämpft werden.



**Bild 3.** Wurzelortskurven für die Eigenwerte bei kleinen Schwingungen der Zentrifuge um  $\vartheta_0 = 0$

Eine Linearisierung von (37/1) und (37/2) ergibt zwei singuläre, nicht allgemein lösbare Differentialgleichungen. Das hängt mit der Tatsache zusammen, daß der Winkel  $\psi$  für die Grundlösung  $\vartheta = 0$  unbestimmt ist und nur die Summe  $\varphi_M + \psi = x$  eine physikalische Bedeutung besitzt. Dennoch läßt sich eine allgemeine Aussage zur Stabilität gewinnen. Die lineari-

sierte Gleichung (37/1)

$$A\ddot{\vartheta} + (-A\dot{\psi}^2 + C_R\dot{\varphi}_0\dot{\psi} - Gs + c_\vartheta)\vartheta = 0 \quad (45)$$

kann nämlich nur dann eine stabile Lösung haben, wenn der in Klammern stehende, in  $\dot{\psi}$  quadratische Ausdruck positiv ist. Dann aber muß für die Diskriminante

$$C_R^2\dot{\varphi}_0^2 - 4A(Gs - c_\vartheta) > 0 \quad (46)$$

gelten. Das entspricht der Stabilitätsbedingung für den schweren symmetrischen Kreisel (Lagrange-Fall). Für eine statisch stabil gefesselte Zentrifuge ( $c_\vartheta - Gs > 0$ ) ist (46) stets erfüllt. Bei statisch instabiler, also kopflastiger Zentrifuge ist zur Stabilisierung eine Mindest-drehgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}_0$  nach (46) notwendig.

Nachbarlösungen zur der speziellen Lösung (39) lassen sich in entsprechender Weise untersuchen. Die zugehörigen linearisierten Bewegungsgleichungen sind nicht entkoppelt, sondern lassen nun auch den Einfluß des Rotorantriebs auf die Nutations- und Präzessionsbewegungen der Zentrifuge erkennen. Das soll hier für eine spezielle Abstimmung ausführlicher untersucht werden: Es wird angenommen, daß die Zentrifuge bei einer Schräglage  $\vartheta = \vartheta_0$  gerade im Gleichgewicht ist, daß also

$$Gs \sin \vartheta_0 = c_\vartheta \vartheta_0 \quad (47)$$

gilt. Für die zugehörigen Werte von  $\dot{\psi}_0$  folgt dann aus (40)

$$\dot{\psi}_{01} = 0, \quad \dot{\psi}_{02} = \frac{C_R\dot{\varphi}_0}{A \cos \vartheta_0}.$$

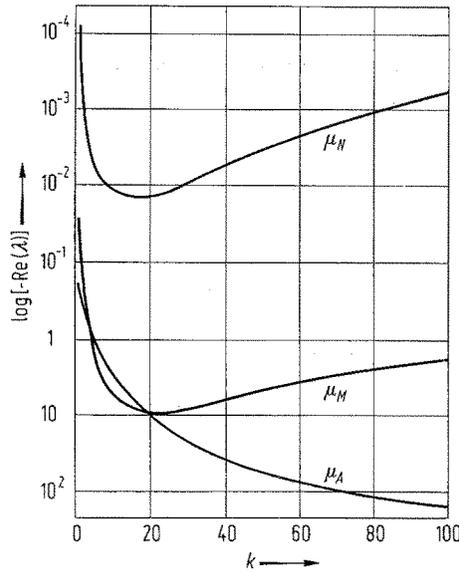
Die erste Lösung bedeutet, daß sich die Zentrifuge um eine im Raum feste, aber um  $\vartheta_0$  gegenüber der Vertikale geneigte Richtung dreht. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Untersuchungen kann für die Grundlösung  $\psi = 0$ , und wegen  $\varphi_M + \psi = 0$  auch  $\varphi_M = 0$  angenommen werden. Dann sind Nachbarlösungen durch kleine Werte der Veränderlichen  $\psi$ ,  $\varphi_M$ ,  $x = \vartheta - \vartheta_0$ ,  $y = \dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0$  gekennzeichnet. Die Linearisierung des Systems (37) ergibt jetzt:

$$\left. \begin{aligned} A\ddot{x} + C_R\dot{\varphi}_0 \sin \vartheta_0 \dot{\psi} + (c_\vartheta - Gs \cos \vartheta_0)x &= 0, \\ (A \sin^2 \vartheta_0 + C \cos^2 \vartheta_0)\ddot{\psi} + C \cos \vartheta_0 \ddot{\varphi}_M + C_R \cos \vartheta_0 \dot{y} - C_R\dot{\varphi}_0 \sin \vartheta_0 \dot{x} + c_\varphi(\varphi_M + \psi) &= 0, \\ C_R \cos \vartheta_0 \ddot{\psi} + C_R\ddot{\varphi}_M + C_R\dot{y} + ky &= 0, \\ C_M \cos \vartheta_0 \ddot{\psi} + C_M\ddot{\varphi}_M + c_\varphi\psi + c_\varphi\varphi_M - ky &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Eine Aufspaltung, wie im Fall der Sonderlösung (38) ist jetzt nicht möglich. Auch die Betrachtung der Grenzfälle  $k = 0$  oder  $k \rightarrow \infty$  bringt keine unmittelbaren Erkenntnisse. Deshalb wurde die zu (48) gehörende charakteristische Gleichung siebten Grades für konkrete Werte der Systemparameter bei Variation des Antriebsbeiwertes  $k$  numerisch gelöst. Als Ergebnis erhält man in dem hier betrachteten Sonderfall eine reelle und zwei Paare konjugiert komplexer Wurzeln sowie zwei Nullwurzeln:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -\mu_A; \\ \lambda_2, \lambda_3 \end{aligned} \right\} = -\mu_M \pm i\nu_M; \quad \left. \begin{aligned} \lambda_4, \lambda_5 \end{aligned} \right\} = -\mu_N \pm i\nu_N; \quad \lambda_6 = \lambda_7 = 0.$$

Die Wurzeln  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  entsprechen den schon in dem zuvor betrachteten Fall erhalten (Bild 3). Sie geben im wesentlichen eine Motor-Rotor-Schwingung mit überlagertem aperiodischen Bewegungsanteil ( $\mu_A$ ) wieder. Die hinzukommende Nutationsschwingung ( $\lambda_4, \lambda_5$ ) ist mit der Frequenz  $\nu_N$  fast unabhängig von  $k$ ; ihr Dämpfungsbeiwert  $\mu_N$  ist um fast drei Zehnerpotenzen kleiner als  $\mu_M$ . Der Verlauf der Realteile  $\mu$  mit  $k$  ist in Bild 4 in logarithmischem Ordinatenmaßstab gezeichnet. Bemerkenswert ist, daß optimales Dämpfungsverhalten bei einem Antriebsbeiwert von etwa  $k \approx 20$  für beide Schwingungen zugleich erreicht werden kann. Im übrigen bestätigen diese Auswertungen das in Kapitel 4 erhaltene allgemeine Ergebnis und zeigen, daß der Asynchronantrieb auf das Gesamtsystem stets dämpfend wirkt.



**Bild 4.** Verlauf der negativen Realteile  $\mu(k)$  bei kleinen Schwingungen der Zentrifuge um eine Gleichgewichtslage mit  $\vartheta_0 \neq 0$

### 6.3 Kinetische Auswanderung

Obwohl die in Kapitel 6.2 betrachtete Sonderlösung mit  $\vartheta = \vartheta_0$  als in erster Näherung stabil erkannt wurde, läßt sich zeigen, daß auch bei der Zentrifuge — ähnlich wie dies vom Kardankreisel bekannt ist — in höherer Näherung ein instabiles Verhalten bezüglich der Lagekoordinaten infolge kinetischer Auswanderung auftreten kann. Das soll hier für den Sonderfall einer bezüglich  $\vartheta$  astatistischen Zentrifuge ( $s = 0, c_\vartheta = 0$ ) gezeigt werden. Die Fesselung bezüglich  $\varphi_M + \psi$  (Beiwert  $c_\varphi$ ) wird jedoch nicht vernachlässigt, weil sonst — wie sich zeigen wird — keine kinetische Auswanderung auftritt.

Zunächst wird das System der Ausgangsgleichungen (37) umgeformt: Durch Addition von (37/3) und (37/4) folgt mit  $C_R + C_M = C$  und  $\varphi_R = \varphi + \varphi_M$ :

$$C(\ddot{\varphi}_M + \ddot{\psi} \cos \vartheta - \dot{\vartheta} \dot{\psi} \sin \vartheta) + C_R \ddot{\varphi} + c_\varphi(\varphi_M + \psi) = 0. \quad (49)$$

Damit läßt sich (37/2) umformen in:

$$\begin{aligned} A \sin^2 \vartheta \ddot{\psi} + (2A - C) \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\vartheta} \dot{\psi} - C \sin \vartheta \dot{\vartheta} \dot{\varphi}_M - \\ - C_R \sin \vartheta \dot{\vartheta} \dot{\varphi} + c_\varphi(1 - \cos \vartheta)(\varphi_M + \psi) = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Weiterhin wird nun das System der vier Differentialgleichungen (37/1), (37/3), (49), (50) betrachtet. Nach Abspalten der bezüglich  $x = \vartheta - \vartheta_0, y = \dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0, \psi, \varphi_M$  linearen Anteile erhält man mit Restgliedern  $R$ , in denen die Anteile höherer Ordnung zusammengefaßt sind:

$$\left. \begin{aligned} A \ddot{x} + C_R \dot{\varphi}_0 \sin \vartheta_0 \dot{\psi} &= R_\vartheta, \\ A \sin^2 \vartheta_0 \ddot{\psi} - C_R \dot{\varphi}_0 \sin \vartheta_0 \dot{x} + c_\varphi(1 - \cos \vartheta_0)(\varphi_M + \psi) &= R_\psi, \\ C_R(\ddot{\varphi}_M + \ddot{\psi} \cos \vartheta_0 + \dot{y}) + ky &= R_y, \\ C(\ddot{\varphi}_M + \ddot{\psi} \cos \vartheta_0) + C_R \dot{y} + c_\varphi(\varphi_M + \psi) &= R_{\varphi_M}. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Für die Restglieder zweiter Ordnung folgt:

$$R_{\vartheta 2} = (A - C) \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 \dot{\psi}^2 - C \sin \vartheta_0 \dot{\psi} \dot{\varphi}_M - C_R \dot{\varphi}_0 \cos \vartheta_0 \dot{\psi} x - C_R \sin \vartheta_0 \dot{\psi} y, \quad (52)$$

$$\begin{aligned} R_{\psi 2} = -2A \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 \ddot{\psi} x - (2A - C) \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 \dot{\psi} \dot{x} + C \sin \vartheta_0 \dot{x} \dot{\varphi}_M + \\ + C_R \sin \vartheta_0 \dot{x} y + C_R \dot{\varphi}_0 \cos \vartheta_0 x \dot{x} - c_\varphi \sin \vartheta_0 x(\varphi_M + \psi), \end{aligned} \quad (53)$$

$$R_{y 2} = C_R \sin \vartheta_0 \ddot{\psi} x + C_R \sin \vartheta_0 \dot{\psi} \dot{x}, \quad (54)$$

$$R_{\varphi_M 2} = C \sin \vartheta_0 \ddot{\psi} x + C \sin \vartheta_0 \dot{\psi} \dot{x}. \quad (55)$$

Vernachlässigt man die Anteile von höherer als zweiter Ordnung in den Restgliedern, dann entsteht dadurch ein Fehler von höchstens vierter Ordnung, da die Anteile dritter Ordnung — wie sich zeigen wird — bei dem folgenden Iterationsprozeß herausfallen.

In erster Näherung können aus (51/1) und (51/2) die möglichen Nutations-schwingungen berechnet werden, wenn nach dem für schnelle Kreisel üblichen Verfahren neben den dominierenden Kreiselgliedern mit dem großen Drall  $C_R \dot{\varphi}_0$  nur die Trägheitsglieder berücksichtigt werden. Man erhält so:

$$\left. \begin{aligned} x &= \vartheta - \vartheta_0 = \Theta \sin \omega_N t, \\ \psi &= -\frac{\Theta}{\sin \vartheta_0} \cos \omega_N t \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

mit einer Amplitude  $\Theta$  und der Nutationsfrequenz

$$\omega_N = \frac{C_R \dot{\varphi}_0}{A}. \quad (57)$$

Setzt man (56/2) in (51/3) und (51/4) mit  $R_y = R_{\varphi M} = 0$  ein, dann folgt:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi}_M + \dot{y} + \frac{k}{C_R} y &= -\frac{\Theta \omega_N^2 \cos \vartheta_0}{\sin \vartheta_0} \cos \omega_N t, \\ \ddot{\varphi}_M + \frac{C_R}{C} \dot{y} + \frac{c_\varphi}{C} \varphi_M &= \frac{\Theta}{\sin \vartheta_0} \left( \frac{c_\varphi}{C} - \omega_N^2 \cos \vartheta_0 \right) \cos \omega_N t. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Als Lösung dieser Differentialgleichungen erhält man erzwungene Schwingungen

$$\left. \begin{aligned} \varphi_M &= a \cos \omega_N t + b \sin \omega_N t, \\ y &= d \cos \omega_N t + f \sin \omega_N t. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Die Amplitudenfaktoren  $a, b, d, f$  müssen aus vier linearen algebraischen Gleichungen bestimmt werden, deren allgemeine Lösung unübersichtlich ist und hier nicht angegeben werden soll. Für das Verständnis der möglichen kinetischen Auswanderung können jedoch Näherungen nützlich sein, die unter der Voraussetzung großer Werte für  $\omega_N$  gewonnen werden. Man erhält:

$$\left. \begin{aligned} a &\approx \frac{\Theta \cos \vartheta_0}{\sin \vartheta_0}, & b &\approx -\frac{A^3 k c_\varphi \Theta (1 - \cos \vartheta_0)}{C_M C_R^4 \dot{\varphi}_0^2 \sin \vartheta_0}, \\ d &\approx \frac{A^2 C k c_\varphi \Theta (1 - \cos \vartheta_0)}{C_M C_R^4 \dot{\varphi}_0^2 \sin \vartheta_0}, & f &\approx \frac{A c_\varphi \Theta (1 - \cos \vartheta_0)}{C_R^2 \dot{\varphi}_0 \sin \vartheta_0}. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Mit (56) und (59) ist somit eine erste Näherung gewonnen: Die Rotorachse führt eine Nutations-schwingung aus, die wegen der Kopplungen im System auch auf das Motorgehäuse ( $\varphi_M$ ) sowie auf die Drehzahl ( $y$ ) übertragen wird.

Die Ergebnisse (56) und (59) werden nun in die Restglieder (52) bis (55) eingesetzt. Dann erhält man in zweiter Näherung wiederum erzwungene Schwingungen, aber zugleich auch konstante Anteile auf den rechten Seiten von (51), denen kinetische Auswanderungen entsprechen. Da hier nur die letzteren interessieren, werden die Restglieder über eine Nutationsperiode  $T_N$  gemittelt:

$$\bar{R} = \frac{1}{T_N} \int_0^{T_N} R dt \quad \text{mit} \quad T_N = \frac{2\pi}{\omega_N}. \quad (61)$$

Da bei der Ausrechnung der Mittelwerte jeweils Produkte von trigonometrischen Funktionen über eine Periode zu integrieren sind, fallen viele dieser Glieder heraus. Restglieder dritter Ordnung verschwinden bei dieser Mittelbildung grundsätzlich. Die Durchführung der Integration ergibt aus (52) bis (55):

$$\begin{aligned} \bar{R}_\vartheta &= -\frac{\Theta^2 c_\varphi C_R \dot{\varphi}_0 (1 - \cos \vartheta_0)}{2A \sin \vartheta_0}, \\ \bar{R}_\varphi &= \frac{\Theta^2 c_\varphi^2 A^3 k (1 - \cos \vartheta_0)}{2C_M C_R^4 \dot{\varphi}_0^2}, \\ \bar{R}_y &= \bar{R}_{\varphi M} = 0. \end{aligned}$$

Damit aber folgen aus (51) die Mittelwerte:

$$\overline{\varphi_M + \psi} = \frac{\overline{R_{\varphi M}}}{c_\varphi} = 0, \quad (62)$$

$$\overline{y} = \frac{\overline{R_Y}}{k} = 0,$$

$$\overline{\dot{\psi}} = \frac{\overline{R_\theta}}{C_R \dot{\varphi}_0 \sin \vartheta_0} = - \frac{\Theta^2 c_\varphi (1 - \cos \vartheta_0)}{2A \sin^2 \vartheta_0},$$

$$\overline{\dot{x}} = \overline{\dot{\vartheta}} = - \frac{\overline{R_\psi}}{C_R \dot{\varphi}_0 \sin \vartheta_0} = - \frac{\Theta^2 c_\varphi^2 A^3 k (1 - \cos \vartheta_0)}{2C_M C_R^5 \dot{\varphi}_0^4 \sin \vartheta_0}. \quad (63)$$

Dieses Ergebnis zeigt eine kinetische Auswanderung der Rotorachse an, die vorwiegend in der Koordinate  $\psi$  erfolgt. Die Auswanderung in  $\vartheta$  ist demgegenüber fast vernachlässigbar, da ihre Geschwindigkeit proportional zu  $1/\dot{\varphi}_0^4$  ist. Die Tatsache, daß die Auswanderungen für  $c_\varphi = 0$  verschwinden zeigt, daß die Übertragung der Nutationsschwingung auf das Motorgehäuse und die dabei auftretende Phasenverschiebung als physikalische Ursache für die kinetische Auswanderung angesehen werden muß. Wenngleich dieser Effekt für die Funktionsweise der Zentrifuge — zum Unterschied von der kinetischen Auswanderung bei kardanisch gelagerten Lagekreiseln — keine praktische Bedeutung hat, so ist er doch von akademischem Interesse, da hierdurch die zuvor (Kapitel 4) gemachten allgemeinen Aussagen zur Stabilität bestätigt werden.

Wegen der Beschränkung dieser Betrachtungen auf einen schnellaufenden Rotor (Vernachlässigung des Fesselungsterms in (51/2)) wurden in der Näherung (56) ungedämpfte Nutationschwingungen erhalten. Nach den Ergebnissen von Kapitel 6.2 wirken reale Antriebe aber auch dämpfend auf die Nutationsschwingung. Dies bedeutet, daß die Nutationsamplitude  $\Theta$  und damit auch die Auswanderungsgeschwindigkeit  $\dot{\psi}$  asymptotisch gegen Null gehen. Als Folge bleibt eine endliche Abwanderung  $\Delta\psi = \int \dot{\psi} dt$  bestehen, aufgrund deren die Gesamtbewegung nicht asymptotisch stabil ist. Sie läßt sich im Sinne des Ljapunovschen Stabilitätsbegriffes bestenfalls als grenzstabil bezeichnen, sofern auch für das  $\Delta\psi$  Schranken vorgegeben werden. In den Grenzfällen  $k = 0$  und  $k \rightarrow \infty$  liegt jedoch stets Instabilität vor, da  $\psi$  unbegrenzt anwachsen kann.

## Literatur

1. Magnus, K.: Selbsterregte Reibungsschwingungen des Kardankreisels. In: Beiträge zur Mechanik und Systemtheorie, DFVLR-Forschungsbericht 75-32 (1975) 223-237
2. Becker, K.: Graphisches Konstruktionsschema zur Bestimmung der Bewegungsparameter eines drallstabilisierten Flugkörpers mit Nutationsdämpfung unter dem Einfluß von Lagekorrekturimpulsen. Celestial Mechanics 9 (1974) 269-289
3. Schweitzer, G.: Aktive Dämpfung selbsterregter Rotorschwingungen. VDI-Berichte Nr. 221 (1974) 151-156
4. Grammel, R.: Drehzahlabhängige Selbsterregung des unsymmetrischen Kreisels. Ing.-Arch. 29 (1960) 153-159
5. Magnus, K.: Kreisel, Theorie und Anwendungen. Berlin-Heidelberg-New York 1971
6. Schmid, W.: Angefachte Nutationen beim reibungsarmen Kardankreisel. Z. Angew. Math. Mech. 51 (1971) T 211-T 214
7. Müller, H. H.: Zur Bewegung des Gyrostaten mit variablem Rotordrall. Dissertation, Techn. Univ. München 1976
8. Magnus, K.: Zur Theorie von Mehrkörpersystemen mit drehzahlgeregelten Rotoren. Ing.-Arch. 45 (1976) 209-216
9. Klimov, D. M.; Charlamov, S. A.: Dynamik eines Kreisels in kardanischer Lagerung (russisch). Moskau 1978, Kap. III
10. Hagedorn, P.: On the stability of steady motions in free and restrained dynamical systems. J. Appl. Mech. 46 (1979) 427-432

Eingegangen am 19. Oktober 1979

Prof. Dr. K. Magnus  
Germeringerstraße 13  
D-8035 Gauting  
Bundesrepublik Deutschland