

TECHNISCHE HOCHSCHULE DARMSTADT

FACHBEREICH MECHANIK

KARL MARGUERRE

GEDÄCHTNIS-KOLLOQUIUM

27-/28. Mai 1980



1981.21829

Band 16 der THD-Schriftenreihe Wissenschaft und Technik (ISSN 0172-2085)

ISBN 3-88607-015-8

Herausgegeben vom Präsidenten der Technischen Hochschule Darmstadt

Copyright by Technische Hochschule Darmstadt, 1980

Druck: Lehrdruckerei der TH Darmstadt

Die Stabilität von Schwingungen in
Rotorsystemen mit Synchronantrieb

K. Magnus, München

Übersicht: Es wird gezeigt, daß eigenstabile Synchronantriebe ein ohne Rotorantriebe konservatives, grenzstabiles Rotorsystem asymptotisch stabil bezüglich der Geschwindigkeiten und der Rotordrehwinkel machen. *)

1. Aufgabenstellung

Bei der Untersuchung des dynamischen Verhaltens von Rotorsystemen werden bezüglich der Rotoren meist nur zwei Grenzfälle betrachtet: Entweder wird Gleichgewicht zwischen Antriebs- und Widerstandsmomenten angenommen - dann sind die Rotordrehwinkel zyklische Koordinaten - oder es wird ein ideal arbeitender Antrieb vorausgesetzt, bei dem die relative Drehgeschwindigkeit der Rotoren konstant bleibt. In beiden Fällen spielen die Rotordrehwinkel bei der weiteren Berechnung keine Rolle. Die Wirklichkeit liegt natürlich zwischen den genannten Grenzfällen. Will man den Zwischenbereich untersuchen, dann muß die Art des verwendeten Antriebs berücksichtigt werden. Dies bedeutet jedoch, daß auch die Rotordrehwinkel als unabhängige Koordinaten aufzutreten, und die beschreibenden Differentialgleichungen durch die Momentengleichungen für die Rotoren ergänzt werden müssen. Für den Fall von synchron angetriebenen Rotoren soll das hier näher untersucht werden. Es zeigt sich, daß eine allgemeine Aussage über die Auswirkungen des Antriebs auf die Stabilität gefunden werden kann, die letztlich in der Feststellung gipfelt, daß eigenstabile Synchronantriebe die Stabilität des Gesamtsystems verbessern.

*) Herrn P. Hagedorn verdanke ich den Hinweis, daß der hier gegebene Beweis noch ergänzt werden muß: es müssen solche Fälle ausgeschlossen werden, bei denen Koordinaten q_1 existieren, zu denen die Antriebsdämpfung der Rotoren nicht durchdringt.

2. Die Bewegungsgleichungen

Es sollen hier Bewegungsgleichungen vom Lagrangeschen Typ verwendet werden, bei denen von geeigneten Ausdrücken für die kinetische Energie und die verallgemeinerten Kräfte ausgegangen wird. Die kinetische Energie T läßt sich in bekannter Weise durch Abspalten eines von den Rotoren kommenden Anteils in der Form

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} + \frac{1}{2} \omega^T A \omega \quad (1)$$

schreiben. Dabei ist M die symmetrische, für reale Systeme stets positiv definite Massenmatrix des Systems, jedoch ohne die Trägheitsmomente der Rotoren bezüglich ihrer Symmetrieachsen; diese sind in der Diagonalmatrix A gesondert zusammengefaßt. Der Bewegungszustand des Systems wird durch die zeitliche Ableitung des Vektors q der Lagekoordinaten beschrieben; die Komponenten der Absolutdrehung der Rotoren um ihre Symmetrieachsen bilden den Vektor

$$\omega = \dot{\psi} + B \dot{q} \quad (2)$$

Dabei gibt $\dot{\psi}$ die Drehgeschwindigkeiten der Rotoren relativ zu ihren Gehäusen und $B \dot{q}$ die Anteile der Führungsgeschwindigkeiten wieder. Die Matrix B zeigt an, welche der Komponenten von \dot{q} für die einzelnen Rotoren als Führungsdrehungen wirksam sind. Ein Element B_{ij} ist gleich dem Cosinus zwischen den Richtungen von $\dot{\psi}_i$ und \dot{q}_j ; B_{ij} verschwindet, wenn q_j nicht Führungsdrehung für den i -ten Rotor ist. Man kann deshalb B auch als Strukturmatrix bezeichnen.

Mit (2) kann (1) umgeformt werden in

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T M^* \dot{q} + \dot{\psi}^T A B \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{\psi}^T A \dot{\psi} \quad (3)$$

mit

$$M^* = M + B^T A B \quad \text{und} \quad \dot{\psi}^T A B \dot{q} = \dot{q}^T B^T A \dot{\psi}$$

Wenn im System m Rotoren und außer der Drehfreiheit der Rotoren n zusätzliche Freiheitsgrade vorhanden sind, dann haben die in (3) vorkommenden Größen die Dimensionen:

\mathbf{q} : n -Vektor, $\boldsymbol{\varphi}$: m -Vektor, \mathbf{M}^* : symmetrische ($n \times n$)-Matrix, \mathbf{A} : ($m \times m$)-Diagonal-Matrix, \mathbf{B} : ($m \times n$)-Matrix. Die Matrizen \mathbf{M} , \mathbf{M}^* und \mathbf{B} können auch von \mathbf{q} abhängen; die Matrix \mathbf{A} ist unabhängig davon.

Wenn man nun mit (3) die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen zweiter Art

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}_q ; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\varphi}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{Q}_\varphi \quad (4)$$

ausrechnet, dann erhält man unter Berücksichtigung der Tatsache, daß wegen der hier vorausgesetzten Symmetrie der Rotoren $\partial T / \partial \boldsymbol{\varphi} = 0$ gilt, die Gleichungen:

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B} \mathbf{A} \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \left\{ \frac{\partial (\mathbf{M}^* \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (\mathbf{M}^* \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \right]^T + \frac{\partial (\mathbf{B} \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\varphi}})}{\partial \mathbf{q}} - \left[\frac{\partial (\mathbf{B} \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\varphi}})}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \right\} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_q, \quad (5)$$

$$\mathbf{A} \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{A} \mathbf{B} \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial (\mathbf{A} \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_\varphi. \quad (6)$$

Beide Vektorgleichungen zusammen entsprechen $n + m$ skalaren Gleichungen für die Koordinaten q_i und φ_j . Sie sind hier in einer solchen Form geschrieben worden, daß Ableitungen von Dyaden, die Tensoren von höherer als zweiter Stufe ergeben, nicht auftreten. Die verallgemeinerten Kräfte \mathbf{Q}_q können in Kreiselssystemen zur Stützung oder Führung von Meßachsen oder allgemein auch zur Dämpfung von Schwingungen eingesetzt werden. Die \mathbf{Q}_φ sind Antriebsmomente für die Rotoren. Im Falle eines Synchronantriebs sind diese Momente sowohl von den Winkeln φ_i als auch von den Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_i$ abhängig. Dabei soll hier angenommen werden, daß die im System vorhandenen Rotorantriebe voneinander unabhängig sind. Wenn

das antreibende Magnetfeld mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_0$ rotiert, dann ist $\varphi_s = -\dot{\varphi}_0 t$ der linear mit der Zeit anwachsende Sollwinkel. Es ist zweckmäßig, weiterhin die Differenz

$$z = \varphi - \varphi_s \quad \text{mit} \quad \dot{z} = \dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0 ; \quad \ddot{z} = \ddot{\varphi} \quad (7)$$

zu verwenden. Damit folgt als Momentengleichung für den i-ten Rotor:

$$A_i \ddot{z}_i = Q_i(z_i, \dot{z}_i) = -K_{Si} z_i - K_{Di} \dot{z}_i + Q_i^*(z_i, \dot{z}_i). \quad (8)$$

Dabei sind die linearen Anteile aus der Funktion Q_i herausgenommen worden; K_S ist ein Fesselungsbeiwert, K_D ein Dämpfungsbeiwert; die Restfunktion Q_i^* ist von zweiter oder höherer Ordnung in z_i und \dot{z}_i .

Die lineare Teilgleichung von (8) hat bei nicht zu starker Dämpfung die bekannte Lösung

$$z_i = Z_i e^{-\delta_i t} \cos(\nu_i t - \psi_i). \quad (9)$$

Sie kennzeichnet eine stabile, gedämpft schwingende Bewegung sofern

$$\delta_i = \frac{K_{Di}}{2A_i} > 0 \quad \text{und} \quad \nu_i^2 = \frac{K_{Si}}{A_i} - \left(\frac{K_{Di}}{2A_i}\right)^2 > 0 \quad (10)$$

gilt. Wenn K_{Si} und K_{Di} nicht verschwinden, dann sind die nichtlinearen Anteile Q_i^* nach Ljapunov ohne Einfluß auf das Stabilitätsverhalten. Für eigenstabile Synchronantriebe gilt also $K_S > 0$, $K_D > 0$. Allgemein kann nun in (6)

$$Q_\varphi = -K_S z - K_D \dot{z} + Q_\varphi^*(z, \dot{z}) \quad (11)$$

eingesetzt werden. Wegen der zuvor getroffenen Voraussetzun-

gen sind K_S und K_D Diagonal-Matrizen mit positiven Elementen.

3. Die Stabilität des Gesamtsystems

Eigenstabilität der Antriebe bedeutet, daß ein arretiertes System mit $\dot{q} \equiv 0$ stabil ist. Jetzt soll untersucht werden, was bei freiem System $\dot{q} \neq 0$ passiert. Dazu wird zunächst vorausgesetzt, daß das System mit $Q_p \equiv 0$, also ohne Rotorantriebe, konservativ ist. Mit einem Potential V gilt dann

$$Q_q^T = - \frac{\partial V}{\partial q} \quad (12)$$

Unter diesen Voraussetzungen läßt sich zeigen, daß die durch das Ausgangssystem (5), (6) und (11) beschriebenen Bewegungen asymptotisch stabil bezüglich der \dot{q} , $\dot{\varphi}$, φ sind. Der Beweis läßt sich mit Hilfe der direkten Methode von Ljapunov führen. Hierzu wird als Testfunktion der Energieausdruck

$$\begin{aligned} E^* &= \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} + \frac{1}{2} (\dot{z} + B\dot{q})^T A (\dot{z} + B\dot{q}) + \frac{1}{2} z^T K_S z + V(q) = \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^T M^* \dot{q} + \dot{z}^T A B \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{z}^T A z + \frac{1}{2} z^T K_S z + V(q) \quad (13) \end{aligned}$$

betrachtet. Der vorletzte Term dieses Ausdrucks gibt die potentielle Energie wieder, die durch die Fesselung des Rotors an das umlaufende Feld bedingt ist. Die ersten beiden Anteile können als reduzierte kinetische Energie aufgefaßt werden, die man erhält, wenn in dem Ausdruck (1) für die gesamte kinetische Energie anstelle von $\dot{\varphi}$ die Differenz $\dot{z} = \dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0$ eingesetzt wird. Der Ausdruck E^* ist eine positiv definite Funktion bezüglich der \dot{q} , \dot{z} , z , also auch bezüglich der \dot{q} , $\dot{\varphi}$, φ . Man kann nun zeigen, daß die totale Ableitung von E^* nach der Zeit unter den hier getroffenen Annahmen negativ definit ist, so daß nach Ljapunov asymptotische Stabilität bezüglich der genannten Koordinaten vorliegt.

Der Beweis folgt aus einer Untersuchung der Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{dE^*}{dt} &= \frac{\partial E^*}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial E^*}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \frac{\partial E^*}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial E^*}{\partial \dot{z}} \ddot{z} , \\ &= \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial (M^* \dot{q})}{\partial \dot{q}} + \dot{q}^T \frac{\partial (B^T A \dot{z})}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial V}{\partial q} \right) \dot{q} + z^T K_s z + \\ &\quad + (\dot{q}^T M^* + \dot{z}^T A B) \ddot{q} + (\dot{z}^T A + \dot{q}^T B^T A) \ddot{z} . \end{aligned} \quad (14)$$

Darin müssen nun die aus den Bewegungsgleichungen (5) und (6) folgenden zeitlichen Ableitungen eingeführt werden. Das geschieht am einfachsten wie folgt: (5) wird skalar mit \dot{q}^T und (6) entsprechend mit \dot{z}^T multipliziert. Die Addition ergibt dann unter Fortlassen von Termen, die sich gegenseitig aufheben:

$$\begin{aligned} \dot{q}^T M^* \ddot{q} + \dot{q}^T B^T A \ddot{z} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial (M^* \dot{q})}{\partial \dot{q}} \dot{q} + \dot{z}^T A \ddot{z} + \\ + \dot{z}^T A B \ddot{q} + \dot{z}^T \frac{\partial (A B \dot{q})}{\partial \dot{q}} \dot{q} = \dot{q}^T Q_q + \dot{z}^T Q_z . \end{aligned} \quad (15)$$

Wegen

$$\dot{q}^T \frac{\partial (B^T A \dot{z})}{\partial \dot{q}} \dot{q} = \dot{z}^T \frac{\partial (A B \dot{q})}{\partial \dot{q}} \dot{q}$$

erhält man aus einem Vergleich von (14) mit (15):

$$\frac{dE^*}{dt} = \dot{z}^T Q_z + z^T K_s z . \quad (16)$$

Mit (11) kann das umgeformt werden in:

$$\frac{dE^*}{dt} = -\dot{z}^T K_p z + \dot{z}^T Q_q^*(z, \dot{z}) . \quad (17)$$

Der erste Anteil auf der rechten Seite ist bei eigenstabilem Antrieb negativ definit. Der zweite Term ist aber von mindestens dritter Ordnung in den z und \dot{z} ; er hat also, unabhängig von der speziellen Form der nichtlinearen Restfunktion Q_q^* keinen Einfluß auf die negative Definitheit von (17) in der Umgebung der

Grundlösung $\dot{\mathbf{x}} = 0$, $\ddot{\mathbf{x}} = 0$. Diese ist folglich stabil bezüglich der $\dot{\mathbf{q}}$, $\dot{\mathbf{z}}$, \mathbf{x} , womit die Behauptung bewiesen ist.

4. Ein Beispiel

Es soll eine motorangetriebene Zentrifuge (Bild 1) betrachtet werden, die aus einem dreiaxsig drehbar gelagertem und elastisch gefesseltem Motor-Stator M und einem Rotor R besteht. Der Lagermittelpunkt F ist Fixpunkt, der Schwerpunkt S des Gesamtsystems liegt auf der Rotor-Symmetrieachse im Abstand $\overline{FS} = s$. Rotor R und Motor-Stator M werden als symmetrisch bezüglich der Rotorachse angenommen, so daß ein symmetrischer Gyrostat mit insgesamt 4 Freiheitsgraden vorliegt. Es sollen keine Unwuchten vorhanden sein.

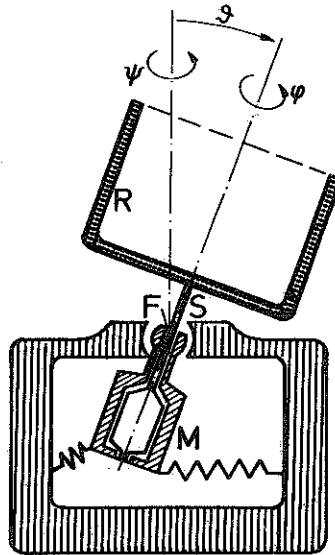


Bild 1

Elastisch gefesselte Zentrifuge

Zur Beschreibung der möglichen Bewegungen können die Euler-Winkel δ , ψ , φ_R , φ_M nach Bild 1 verwendet werden. Der Relativwinkel des Rotors gegenüber dem Motor ist $\varphi = \varphi_R - \varphi_M$. Mit den Trägheitsmomenten $A_R = B_R$, $A_M = B_M$, C_R , C_M hat die kinetische Energie die Form

$$T = \frac{1}{2} \left\{ (A_R + A_M) (\dot{\delta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \delta) + C_R (\dot{\varphi}_R + \dot{\psi} \cos \delta)^2 + C_M (\dot{\varphi}_M + \dot{\psi} \cos \delta)^2 \right\}. \quad (18)$$

Die potentielle Energie folgt aus Schwere- und Fesselungs-Potential:

$$V = Gs \cos \vartheta + \frac{1}{2} c_{\vartheta} \vartheta^2 + \frac{1}{2} c_{\psi} (\varphi_M + \psi)^2. \quad (19)$$

Darin ist G des Gesamtgewicht, c_{ϑ} und c_{ψ} sind die Fesselungs-Beiwerte für Schrägneigung der Symmetrieachse (Winkel ϑ) und Verdrehung des Motors um die Symmetrieachse (Winkel $\varphi_M + \psi$). Der Winkel $\varphi_M + \psi$ entspricht nach der Definition der Eulerwinkel im Fall $\vartheta = 0$ gerade dem absoluten Drehwinkel des Motors um die Vertikale.

Die mit (18) und (19) aus (4) folgenden Lagrangeschen Bewegungsgleichungen zweiter Art, die hier nicht ausführlich hingeschrieben werden sollen, haben zwei physikalisch plausible Lösungen:

$$\text{I.} \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0, \quad \vartheta = 0, \quad \varphi_M + \psi = 0; \quad (20)$$

$$\text{II.} \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0, \quad \vartheta = \vartheta_0, \quad \varphi_M + \psi = 0, \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = -\dot{\varphi}_M. \quad (21)$$

Bei I dreht der Rotor mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_0$ um die vertikal stehende Symmetrieachse; das Motorgehäuse bleibt in Ruhe. Bei II ist die Rotordrehung $\dot{\varphi}_0$ wiederum konstant, jedoch erfolgt sie um eine mit der Schräglage ϑ_0 und der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}_0$ um die Vertikale präzedierende Symmetrieachse. Für $\dot{\psi}_0$ ergeben sich die beiden Lösungen:

$$\left. \begin{matrix} \dot{\psi}_{01} \\ \dot{\psi}_{02} \end{matrix} \right\} = \frac{C_R \dot{\varphi}_0}{2 \cos \vartheta_0 (A_R + A_M)} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 \cos \vartheta_0 (A_R + A_M) (G s \sin \vartheta_0 - c_{\vartheta} \vartheta_0)}{C_R^2 \dot{\varphi}_0^2 \sin^2 \vartheta_0}} \right]. \quad (22)$$

Die Bewegung mit $\dot{\psi}_{01}$ kann als Präzession, die mit $\dot{\psi}_{02}$ als Nutation gedeutet werden. Bei statisch stabiler Fesselung ($c_{\vartheta} > Gs$) erfolgt die erstere im Gegensinn, die zweite dagegen im Sinne der Rotordrehung.

Die Sonderlösungen (20) und (21) sind unabhängig von der speziellen Form des Rotorantriebs; sie gelten z.B. auch für asynchron angetriebene Rotoren. Bei der Berechnung der Nachbarbewegungen, also der gestörten Grundbewegung, muß jedoch die Art des Antriebs berücksichtigt werden. Dazu wird für Synchronantrieb entsprechend (11) unter Vernachlässigung des nichtlinearen Anteils Q^* das Moment:

$$Q_\varphi = -K_S(\varphi - \varphi_0) - K_D(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0) \quad (23)$$

eingesetzt. Im folgenden sollen hier nur die Nachbarbewegungen für den sicher interessantesten Fall (21) mit $\dot{\varphi}_{02}$ nach (22) untersucht werden. Unter der Annahme kleiner Abweichungen der Zustandsgrößen von den stationären Werten (21) lassen sich

aus den Bewegungsgleichungen linearisierte Gleichungen für die Abweichungen ableiten. Ihre Eigenwerte geben dann einen guten Einblick in die möglichen Bewegungsarten.

Ein typisches Ergebnis der numerischen Auswertung zeigt Bild 2. Dort sind die Ortskurven für die Wurzeln der charakteristischen Gleichung für konstanten Fesselungsbeiwert K_S und veränderlichen Dämpfungsbeiwert K_D ($0 \leq K_D < \infty$) aufgetragen; nur die obere Hälfte der komplexen Ebene ist gezeichnet. Mit $K_D = 0$ ist das System konservativ. Es gibt dann in der oberen Halbebene drei rein imaginäre Eigenwerte, die ungedämpften Schwingungen ent-

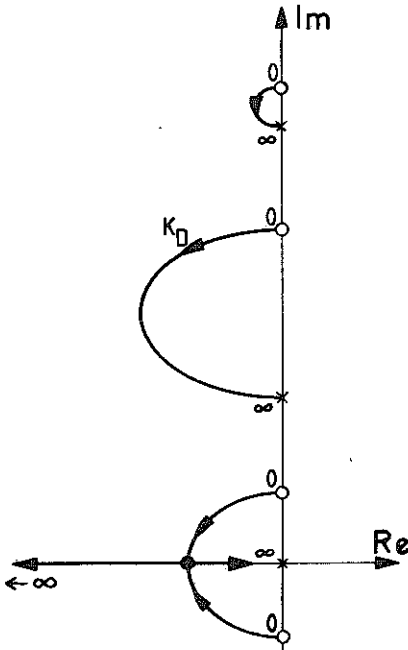


Bild 2

Wurzelortskurven für die Zentrifugenbewegung bei Variation der Antriebsdämpfung, $0 \leq K_D < \infty$.

sprechen. Die Schwingung mit der höchsten Frequenz ist eine Nutationsbewegung; die anderen beiden Schwingungen entstehen durch die Fesselung des Motorgehäuses (Beiwert c_φ) und die elektrische Ankopplung des Rotors (Beiwert K_S). Mit zunehmendem $K_D > 0$ wandern die Wurzeln in die linke Halbebene, die Schwingungen werden also gedämpft. Das entspricht der Aussage des in Abschnitt 3 bewiesenen allgemeinen Satzes. Im Grenzfall $K_D \rightarrow \infty$ ist der Rotor quasistatisch an das rotierende Feld gefesselt. Hierfür werden die der Nutation und einer der Motor-Rotor-Schwingungen entsprechenden Wurzeln wieder rein imaginär. Die zweite Wurzel der Koppelschwingungen nähert sich mit wachsendem K_D der negativ reellen Achse und trifft dort mit der zugeordneten konjugierten Wurzel zusammen. Beide Wurzeln wandern bei weiter anwachsendem K_D längs der negativ reellen Achse: Die eine nach rechts bis zum Nullpunkt, die andere nach links ins negativ Unendliche. Bei hinreichend großen Werten von K_D wird also eine der beiden Motor-Rotor-Schwingungen aperiodisch. Der Grenzwert für diesen Übergang hängt natürlich von dem Beiwert K_S , also von der Stärke der Fesselung des Rotors an das umlaufende Feld ab. Auf jeden Fall lassen sich aus dem Verlauf der Wurzelorts-Kurven ohne prinzipielle Schwierigkeiten zu jedem vorgegebenen Wert von K_S diejenigen Werte von K_D finden, bei denen ein natürlich genauer zu definierendes optimales Bewegungsverhalten vorliegt.

Literatur:

K. Magnus: Aktive Kreiselssysteme, Ing.-Arch. 49 (1980) Heft 5/6.