





TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Lehrstuhl für Werkzeugmaschinen und Fertigungstechnik  
am Institut für Werkzeugmaschinen und Betriebswissenschaften (*iwb*)

**Moderne Ordnungsreduktionsverfahren für die Simulation  
des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen**

**Thomas Günter Bonin**

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)**

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. dr. ir. Daniel J. Rixen

Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Michael Zäh

2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Boris Lohmann

Die Dissertation wurde am 01.12.2014 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 11.05.2015 angenommen.



Thomas Bonin

**Moderne Ordnungsreduktionsverfahren für die  
Simulation des dynamischen Verhaltens  
von Werkzeugmaschinen**



Herbert Utz Verlag · München

**Forschungsberichte IWB**

Band 306

Zugl.: Diss., München, Techn. Univ., 2015

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.  
Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere  
die der Übersetzung, des Nachdrucks, der  
Entnahme von Abbildungen, der Wiedergabe  
auf fotomechanischem oder ähnlichem Wege  
und der Speicherung in Datenverarbeitungs-  
anlagen bleiben – auch bei nur auszugsweiser  
Verwendung – vorbehalten.

Copyright © Herbert Utz Verlag GmbH · 2015

ISBN 978-3-8316-4522-0

Printed in Germany  
Herbert Utz Verlag GmbH, München  
089-277791-00 · [www.utzverlag.de](http://www.utzverlag.de)

## Geleitwort der Herausgeber

Die Produktionstechnik ist für die Weiterentwicklung unserer Industriegesellschaft von zentraler Bedeutung, denn die Leistungsfähigkeit eines Industriebetriebes hängt entscheidend von den eingesetzten Produktionsmitteln, den angewandten Produktionsverfahren und der eingeführten Produktionsorganisation ab. Erst das optimale Zusammenspiel von Mensch, Organisation und Technik erlaubt es, alle Potentiale für den Unternehmenserfolg auszuschöpfen.

Um in dem Spannungsfeld Komplexität, Kosten, Zeit und Qualität bestehen zu können, müssen Produktionsstrukturen ständig neu überdacht und weiterentwickelt werden. Dabei ist es notwendig, die Komplexität von Produkten, Produktionsabläufen und -systemen einerseits zu verringern und andererseits besser zu beherrschen.

Ziel der Forschungsarbeiten des *iwb* ist die ständige Verbesserung von Produktentwicklungs- und Planungssystemen, von Herstellverfahren sowie von Produktionsanlagen. Betriebsorganisation, Produktions- und Arbeitsstrukturen sowie Systeme zur Auftragsabwicklung werden unter besonderer Berücksichtigung mitarbeiterorientierter Anforderungen entwickelt. Die dabei notwendige Steigerung des Automatisierungsgrades darf jedoch nicht zu einer Verfestigung arbeitsteiliger Strukturen führen. Fragen der optimalen Einbindung des Menschen in den Produktentstehungsprozess spielen deshalb eine sehr wichtige Rolle.

Die im Rahmen dieser Buchreihe erscheinenden Bände stammen thematisch aus den Forschungsbereichen des *iwb*. Diese reichen von der Entwicklung von Produktionssystemen über deren Planung bis hin zu den eingesetzten Technologien in den Bereichen Fertigung und Montage. Steuerung und Betrieb von Produktionssystemen, Qualitätssicherung, Verfügbarkeit und Autonomie sind Querschnittsthemen hierfür. In den *iwb* Forschungsberichten werden neue Ergebnisse und Erkenntnisse aus der praxisnahen Forschung des *iwb* veröffentlicht. Diese Buchreihe soll dazu beitragen, den Wissenstransfer zwischen dem Hochschulbereich und dem Anwender in der Praxis zu verbessern.

Gunther Reinhart

Michael Zäh



## Vorwort des Verfassers

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Werkzeugmaschinen und Betriebswissenschaften (*iwb*) der Technischen Universität München.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Michael Zäh und Herrn Prof. Dr.-Ing. Gunther Reinhart, den Leitern dieses Instituts, gilt mein besonderer Dank für die wohlwollende Förderung und großzügige Unterstützung meiner Arbeit. Bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Boris Lohmann, dem Leiter des Lehrstuhls für Regelungstechnik der Technischen Universität München, möchte ich mich für die Übernahme des Korreferates und die aufmerksame Durchsicht der Arbeit sehr herzlich bedanken. Ebenso danke ich Herrn Prof. dr. ir. Daniel Rixen, dem Leiter des Lehrstuhls für Angewandte Mechanik der Technischen Universität München, für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes.

Darüber hinaus bedanke ich mich bei allen Kolleginnen und Kollegen des Instituts recht herzlich für die stets angenehme Zusammenarbeit. Besonders hervorheben möchte ich Klemens Niehues und Stefan Schwarz sowie meinen Bürokollegen Johannes Pohl, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit mit Rat und Tat unterstützt haben. Bei den Studierenden, die meine Forschung in Form von Studienarbeiten begleitet haben, bedanke ich mich für deren Interesse und ihr Engagement. Des Weiteren gilt mein Dank Michael Loy und Klemens Niehues, die das Manuskript kritisch begutachtet und viele wertvolle Anregungen gegeben haben. In diesem Zusammenhang möchte ich mich auch herzlich bei Andreas Soppa, ehemaliger wiss. Mitarbeiter am *Institut Computational Mathematics* der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina Braunschweig, für die konstruktive Zusammenarbeit während und nach dem gemeinsam bearbeiteten DFG-Forschungsprojekt bedanken.

Mein besonderer Dank gilt meinen Eltern, die immer an mich geglaubt und mich stets mit allen Kräften unterstützt und mir so den nötigen Rückhalt bei der Anfertigung dieser Arbeit gegeben haben.

Vor allem aber möchte ich mich bei meiner Frau Conny bedanken. Sie hat in den vergangenen Jahren viel Geduld mit der Wissenschaft und mit mir bewiesen. An den ungezählten Abenden und Wochenenden, an welchen diese Arbeit entstand, hat sie verständnisvoll Rücksicht genommen.

München, im September 2015

*Thomas Bonin*



# Inhaltsverzeichnis

<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>v</b>
<b>Verzeichnis der Formelzeichen</b>	<b>ix</b>
Lateinische Buchstaben .....	ix
Griechische Buchstaben .....	xiii
Mathematische Ausdrücke und Zeichen .....	xiv
Glossar mathematischer Begriffe .....	xvi
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Ausgangssituation .....	1
1.2 Problemstellung .....	4
1.3 Zielsetzung .....	6
1.4 Aufbau der Arbeit .....	8
<b>2 Entwicklung und Simulation von Werkzeugmaschinen</b>	<b>11</b>
2.1 Inhalt des Kapitels .....	11
2.2 Strukturverhalten von Werkzeugmaschinen .....	11
2.2.1 Allgemeines .....	11
2.2.2 Werkzeugmaschinen als nachgiebige Systeme .....	12
2.2.3 Beanspruchungen der Maschinenstruktur .....	13
2.2.4 Betriebsverhalten des Gesamtsystems .....	14
2.3 Ablauf des Entwicklungsprozesses .....	16
2.4 Simulationsmethoden .....	19
2.4.1 Simulation in der Werkzeugmaschinenentwicklung .....	19
2.4.2 Numerische Simulationsverfahren .....	21
2.4.3 Strukturmechanische Berechnung .....	24
2.4.4 Berücksichtigung des Dämpfungsverhaltens .....	27
2.5 Simulation des mechatronischen Gesamtsystems .....	33
2.5.1 Überblick .....	33
2.5.2 Simulation von Gestellstrukturen .....	35
2.5.3 Simulation der Antriebskomponenten .....	36
2.5.4 Mechatronisches Gesamtmodell .....	37
2.5.5 Gekoppelte Struktur-Prozess-Simulation .....	38
2.6 Zusammenfassung .....	40
<b>3 Verfahren zur Modellordnungsreduktion</b>	<b>41</b>
3.1 Inhalt des Kapitels .....	41
3.2 Grundlagen der linearen Algebra und der Systemtheorie .....	41

3.2.1	Eigen- und Singulärwertzerlegung .....	41
3.2.2	Matrix-Zerlegungen .....	44
3.2.3	Projektionen .....	45
3.2.4	Darstellung von Systemen .....	47
3.2.5	Systemeigenschaften .....	49
3.2.6	Übertragungsverhalten .....	53
3.2.7	Momente einer Funktion .....	56
3.2.8	Normen .....	59
3.3	Allgemeines zur Modellordnungsreduktion .....	62
3.4	Betrachtete Verfahren .....	64
3.5	Reduktion durch Projektion .....	65
3.6	Modale Reduktion .....	67
3.6.1	Modales Abschneiden .....	67
3.6.2	Substrukturtechnik .....	69
3.7	Krylov-Unterraum-Verfahren .....	70
3.7.1	Definition von Krylov-Unterräumen .....	70
3.7.2	Approximation durch Momentenabgleich .....	71
3.7.3	Ein- und zweiseitige Krylov-Unterraum-Verfahren .....	75
3.7.4	Verwendung mehrerer Entwicklungspunkte .....	76
3.7.5	Bestimmung der Projektionsmatrizen .....	77
3.8	Modellordnungsreduktion in der Simulation von Werkzeugmaschinen .....	83
3.9	Zusammenfassung und Handlungsbedarf .....	87
<b>4</b>	<b>Reduktion von Werkzeugmaschinenmodellen mit Krylov-Unterraum-Verfahren</b>	<b>89</b>
4.1	Inhalt des Kapitels .....	89
4.2	Anforderungen an das Reduktionsverfahren .....	90
4.2.1	Systeme zweiter Ordnung und Matrixeigenschaften .....	90
4.2.2	Beschreibung der Anforderungen .....	92
4.3	Einflussfaktoren auf Krylov-Unterraum-Verfahren .....	94
4.3.1	Darstellung des Beispielsystems .....	94
4.3.2	Anzahl der Momente .....	97
4.3.3	Anwendung des ein- bzw. des zweiseitigen Krylov-Unterraum-Verfahrens .....	101
4.3.4	Mehrere Entwicklungspunkte und Wahl ihrer Lage .....	102
4.3.5	Zusammenfassung .....	109
4.4	Bestandteile des Reduktionsverfahrens .....	109
4.4.1	Allgemeines und Aufbau des Verfahrens .....	109
4.4.2	Reduktion von Systemen zweiter Ordnung .....	111
4.4.3	Berücksichtigung mehrerer Systemein- und -ausgänge ..	112
4.4.4	Verwendung mehrerer Entwicklungspunkte .....	113

4.4.5	Vereinfachung des Orthogonalisierungsschemas .....	114
4.4.6	Automatisierung des Reduktionsverfahrens.....	115
4.4.7	Zusammenfassung.....	118
4.5	Reduktionsverfahren für beliebig gedämpfte Modelle .....	119
4.5.1	Modellierung lokaler viskoser Dämpfungseffekte .....	119
4.5.2	Berücksichtigung von Strukturdämpfung .....	120
4.5.3	Reduktionsverfahren für beliebig gedämpfte Systeme auf Basis von Krylov-Unterräumen zweiter Ordnung ..	121
4.6	Zusammenfassung und Fazit .....	130
<b>5</b>	<b>Integration des Reduktionsverfahrens in die entwicklungs- begleitende Simulation</b>	<b>133</b>
5.1	Inhalt des Kapitels .....	133
5.2	Entwicklungsbegleitende Simulation .....	133
5.3	Anforderungen und Randbedingungen .....	136
5.4	Konzeption des Vorgehensmodells.....	137
5.4.1	Überblick .....	137
5.4.2	Modellierung der Maschinenstruktur .....	139
5.4.3	Erstellung des Systemmodells.....	144
5.4.4	Reduktion des Systemmodells .....	147
5.4.5	Überführung in ein Blockmodell.....	149
5.4.6	Berechnung der Simulationsaufgabe.....	150
5.5	Zusammenfassung und Fazit .....	153
<b>6</b>	<b>Anwendung und Validierung des Reduktionsverfahrens</b>	<b>155</b>
6.1	Inhalt des Kapitels und Vorgehen .....	155
6.2	Beschreibung der Beispielmodelle .....	156
6.2.1	Finite-Elemente-Modelle .....	156
6.2.2	Definition der Systemein- und -ausgänge .....	159
6.3	Anwendung des Reduktionsverfahrens .....	160
6.4	Analyse der Approximationsqualität .....	161
6.4.1	Allgemeines und Berechnung des Fehlers .....	161
6.4.2	Einfluss der Modelldimension .....	162
6.4.3	Einfluss des gewählten Frequenzbereiches.....	169
6.4.4	Reduzierung der Fehlerwahrscheinlichkeit durch Auto- matisierung .....	170
6.4.5	Berücksichtigung von Starrkörpermoden.....	171
6.4.6	Einfluss der Anzahl von Ein- und Ausgängen .....	174
6.4.7	Schlussfolgerungen zur Untersuchung der Approxima- tionsqualität .....	176
6.5	Untersuchung der Berechnungseffizienz .....	176
6.5.1	Allgemeines .....	176

6.5.2	Bestimmung der Berechnungszeiten .....	177
6.5.3	Vergleich der Berechnungszeiten .....	178
6.5.4	Zusammenfassung .....	181
6.6	Reduktion von Systemen mit nicht-proportionaler Dämpfungsma- trix .....	182
6.6.1	Allgemeines .....	182
6.6.2	Darstellung der Reduktionsergebnisse .....	183
6.6.3	Schlussfolgerung .....	186
6.7	Einsatz ordnungsreduzierter Modelle in der gekoppelten Si- mulation .....	187
6.8	Bewertung des Reduktionsverfahrens und Fazit .....	192
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>195</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>199</b>
<b>Anhang</b>		<b>215</b>
A.1	Beanspruchungsarten mechanischer Strukturen .....	215
A.2	Parameter der Beispieldynamische Systeme .....	216
A.3	Weiterführende Details zu den Bestandteilen des Reduk- tionsverfahrens .....	217
A.3.1	Block-Arnoldi-Algorithmus zur Berücksichtigung meh- rerer Ein- und Ausgänge .....	217
A.3.2	Rationale Interpolation für die Verwendung mehrerer Entwicklungspunkte .....	219
A.3.3	Globaler Arnoldi-Algorithmus zur Vereinfachung der Orthogonalisierung .....	220
A.3.4	Detailierung des VAIRGA-Verfahrens .....	222
A.4	Invertierung einer Matrix des $\mathbb{K}^{2 \times 2}$ .....	224
A.5	Ergänzende Ergebnisse .....	225
A.5.1	Approximationsqualität der Nachgiebigkeitsfrequenz- gänge des Modells der abstrahierten WZM-Struktur ..	225
A.5.2	Approximationsqualität der Nachgiebigkeitsfrequenz- gänge des Portalfräsmaschinenmodells .....	227
A.5.3	Approximationsqualität bei Modellen mit Starrkörper- moden .....	229
A.5.4	Auswirkung der Dimensionsbegrenzung bei der Re- duktion des $(9 \times 9)$ -Systems .....	230
<b>Verzeichnis betreuter Studienarbeiten</b>		<b>233</b>

## Abkürzungsverzeichnis

bspw.	beispielsweise
bzgl.	bezüglich
bzw.	beziehungsweise
CACE	Computer Aided Control Engineering (engl.: rechnergestützte Regelungsentwicklung)
CAD	Computer Aided Design (engl.: rechnergestütztes Konstruieren)
CMS	Component Mode Synthesis
CNC	Computerized Numerical Control (engl.: computergestützte numerische Steuerung)
d. h.	das heißt
DBS	Digitale Blocksimulation
DGL	Differenzialgleichung
Dim.	Dimension
DV	Datenverarbeitung
EF	Eigenfrequenz(en)
elektr.	elektrisch, -e, -er, -en
EP	Entwicklungs punkt(e)
ES	Entwicklungsstelle
EV	Eigenvektor(en)
EW	Eigenwert(e)
EWP	Eigenwertproblem
FE	Finite Elemente oder finites Element
FEM	Finite-Elemente-Methode
FHG	Freiheitsgrad(e)
FMD-System	Feder-Masse-Dämpfer-System

ggf.	gegebenenfalls
HIL	Hardware-in-the-Loop (d. h. Kopplung von Steuerungssoftware mit dem Modell der Maschine oder Anlage, um deren Funktionalität zu überprüfen und die spätere Inbetriebnahmephase zu verkürzen)
i. d. R.	in der Regel
IT	Informationstechnologie
kompl.	komplex
konj.	konjugiert
KU	Krylov-Unterraum
KUV	Krylov-Unterraum-Verfahren
LTI-System	Linear time-invariant system (engl.: lineares zeitinvariantes Zustandsraummodell)
max.	maximal, -e, -er, -es, -en
MEMS	micro electro-mechanical system (engl.: mikro-elektromechanisches System)
MGS-Verfahren	modifiziertes Gram-Schmidt-Verfahren
MIMO	Multiple-Input-Multiple-Output (engl.: Mehrgrößensystem)
MKS	Mehrkörpersystem
MOR	model order reduction (engl.: Modellordnungsreduktion)
MT	Modaltransformation
MW	Motorwelle
o. g.	oben genannt, -e, -er, -en
RBE	Rigid Body Element (engl.: Starrkörperelement)
red.	reduziert, -es
SISO	Single-Input-Single-Output (engl.: Eingrößensystem)
SOAR	Second-Order-Arnoldi (engl. Abkürzung für einen auf dem Arnoldi-Verfahren basierenden Algorithmus für Systeme zweiter Ordnung)
sog.	sogenannte, -r, -en

SW	Spindelwelle
TCP	Tool Center Point (engl.: Werkzeugmittelpunkt)
TF	Transfer- oder Übertragungsfunktion
u.	und
u. a.	unter anderem
usw.	und so weiter
v.	von
VAIRGA	vollständiger adaptiver iterativer rationaler globaler Arnoldi-Algorithmus
Verf.	Verfahren
vgl.	vergleiche
VHM	Vollhartmetall
WZM	Werkzeugmaschine
z. T.	zum Teil
zul.	zulässig, -e



# Verzeichnis der Formelzeichen

## Schreibweisen

Vektoren und Matrizen werden in dieser Arbeit durch fettgedruckte Klein- bzw. Großbuchstaben dargestellt.

Die Vektoren und Matrizen, die zur Erläuterung allgemeingültiger mathematischer Zusammenhänge dienen (insb. in Abschnitt 3.2), werden hier nicht explizit aufgeführt. Deren Bedeutung geht aus der Beschreibung im Text hervor. Gleiches gilt für Vektoren und Matrizen, welche bestimmte Ausdrücke substituieren, um die Übersichtlichkeit im Text zu erhöhen.

## Lateinische Buchstaben

Größe	Einheit	Bezeichnung
<b>0</b>	-	Nullmatrix, Nullvektor
<i>a</i>	-	Ausgang eines Systems
<i>a<sub>k</sub></i>	-	k-ter Koeffizient der CAUGHEY-Reihe
<i>a<sub>p</sub></i>	<i>mm</i>	Schnitttiefe
<i>a<sub>e</sub></i>	<i>mm</i>	Arbeitseingriff
<b>a</b>	-	Vektor der Systemausgangsgrößen
<b>A</b>	-	Systemmatrix des DGL-Systems 1. Ordnung (Zustandsraumdarstellung)
<b>Ā</b>	-	Systemmatrix des verallgemeinerten Zustandsraummodells
<b>B</b>	-	Eingangsmatrix des DGL-Systems (1. und 2. Ordnung)
<b>Ā</b>	-	Eingangsmatrix des verallgemeinerten Zustandsraummodells
<b>B</b>	-	reduzierte Eingangsmatrix
<b>C</b>	-	Ausgangsmatrix des DGL-Systems 1. Ordnung (Zustandsraumdarstellung)
<b>C<sub>p</sub></b>	-	Ausgangsmatrix des DGL-Systems 2. Ordnung (verschiebungsproportionaler Anteil)

$\hat{C}_p$	-	reduzierte Ausgangsmatrix
$C_v$	-	Ausgangsmatrix des DGL-Systems 2. Ordnung (geschwindigkeitsproportionaler Anteil)
$\hat{C}_v$	-	reduzierte Ausgangsmatrix
$C$	-	komplexer Anteil der Dämpfungsmatrix
$d$	$mm$	Durchmesser des Fräzers
$d_i$	$Ns/m$	i-te Dämpfungskonstante im FMD-System
$D$	-	Durchgangsmatrix des DGL-Systems 1. Ordnung (Zustandsraumdarstellung)
$D$	$Ns/m,$ $Nms/rad$	Dämpfungsmatrix
$D_L$	-	Lehr'sche Dämpfungsmatrix
$D_{L,i}$	-	Lehr'sches Dämpfungsmaß der i-ten Eigenfrequenz
$\tilde{D}$	$1/s, 1/(rad \cdot s)$	modale Dämpfungsmatrix
$\hat{D}$	$Ns/m,$ $Nms/rad$	reduzierte Dämpfungsmatrix
$e$	-	Eingang eines Systems
$e$	-	Vektor der Systemeingangsgrößen
$E$	-	Deskriptormatrix
$f$	$Hz$	Frequenz
$f_i$	$N$	i-te Kraft im FMD-System
$f_z$	$mm$	Vorschub pro Zahn
$f_{max}$	$Hz$	obere Grenze des zu approximierenden Frequenzbereichs
$F$	$N, Nm$	Vektor der äußeren Kräfte und Momente
$\tilde{F}$	$N/\sqrt{kg}$	Vektor der äußeren Kräfte in modalen Koordinaten
$\mathcal{G}_m(\cdot, \cdot, \cdot)$	-	Krylov-Unterraum 2. Ordnung der Stufe $m$
$H(s)$	-	allg. Übertragungsfunktion des DGL-Systems 2. Ordnung
$ H(s) $	-	Amplitude der Übertragungsfunktion
$\hat{H}(\omega)$	-	Übertragungsfunktion eines dynamisch erregten Systems 2. Ordnung
$i$	-	Laufvariable, u. a. für die Entwicklungsstellen oder die Eigenwerte eines Systems

---

$I$	-	Einheitsmatrix
$k_i$	$N/m$	i-te Federsteifigkeit im FMD-System
$K$	$N/m, Nm/rad$	Steifigkeitsmatrix
$\tilde{K}$	$rad^2/s^2$	modale Steifigkeitsmatrix
$\hat{K}$	$N/m, Nm/rad$	reduzierte Steifigkeitsmatrix
$\mathcal{K}_m(\cdot, \cdot)$	-	Krylov-Unterraum der Stufe $m$
$m$	-	Anzahl der Systemeingänge
$m$	-	Anzahl der Momente
$m_i$	$kg$	i-te Masse im FMD-System
$n$	-	Anzahl der Systemfreiheitsgrade
$M$	$kg$	Massenmatrix
$\tilde{M}$	-	modale Massenmatrix
$\hat{M}$	$kg$	reduzierte Massenmatrix
$n$	$1/min$	Drehzahl
$N$	$m/N, rad/Nm$	dynamische Nachgiebigkeitsmatrix
$N_i$	$m/N, rad/Nm$	dynamische Nachgiebigkeitsmatrix des i-ten Eigenwertes
$p(\lambda)$	-	charakteristisches Polynom
$P$	-	quadratische Matrix zur Bildung der Krylov-Sequenz ( $P_1, P_2$ bei Krylov-Unterräumen 2. Ordnung)
$q$	-	Anzahl der Systemausgänge
$q$	-	Startvektor eines Krylov-Unterraumes
$q$	$m\sqrt{kg},$ $rad \cdot m\sqrt{kg}$	Vektor der modalen Verschiebungen
$Q$	-	Startmatrix eines Krylov-Unterraumes (für Blockversion)
$r_{max}$	-	maximal zulässige Dimension des reduzierten Systems
$R(\lambda_i)$	-	Residuum zur Bestimmung der Dominanz der Entwicklungsstelle i
$s$	$rad/s$	komplexe Frequenzvariable ( $s = \sigma + i\omega$ )
$s_0$	$rad/s$	Entwicklungspunkt einer Reihendarstellung
$s$	-	Vektor der Anfangsentwicklungsstellen
$S_B$	-	Beobachtbarkeitsmatrix

$S_S$	-	Steuerbarkeitsmatrix
$t$	$s$	Zeit
$t_{EWP}$	$s$	Zeitdauer zur Lösung des Eigenwertproblems
$t_{ausw}$	$s$	Zeitdauer zur Auswahl der zu berücksichtigenden Moden
$t_{MT}$	$s$	Zeitdauer für die Modaltransformation
$t_{TF}$	$s$	Zeitdauer für die Berechnung der Übertragungsfunktion
$t_{modal}$	$s$	Gesamtzeitdauer für die modale Reduktion
$t_{MOR}$	$s$	Zeitdauer für die automatische Reduktion mit dem KUV
$t_{KUV}$	$s$	Zeitdauer des Gesamtprozesses unter Verwendung von KUV
$\tau$	-	Deflationstoleranz
$u$	-	Eingangsfunktion eines SISO-Systems
$\mathbf{u}$	-	Vektor der Eingangsfunktionen eines MIMO-Systems
$U$	$V$	Motorspannung
$\mathbf{U}$	-	Laplace-Transformierte des Eingangsvektors
$\mathbf{V}$	-	(rechtsseitige) Projektionsmatrix
$\mathcal{V}$	-	Vektorraum, aufgespannt durch Spaltenvektoren der Projektionsmatrix $\mathbf{V}$
$\mathbf{W}$	-	(linksseitige) Projektionsmatrix
$\mathcal{W}$	-	Vektorraum, aufgespannt durch Spaltenvektoren der Projektionsmatrix $\mathbf{W}$
$x_i$	$m$	translatorische Verschiebung der i-ten Masse
$\mathbf{x}$	$m$	Vektor der Verschiebungen, Zustandsvektor des DGL-Systems 2. Ordnung
$\hat{\mathbf{x}}$	$m$	Zustandsvektor des reduzierten Systems 2. Ordnung
$\mathbf{X}$	-	Laplace-Transformierte des Verschiebungsvektors
$\mathbf{y}$	-	Vektor der Systemausgänge
$\mathbf{Y}$	-	Laplace-Transformierte des Ausgangsvektors
$z$	-	Anzahl der Schneiden

---

$z_0$	-	Ausgangszustand
$z$	-	Zustandsvektor des DGL-Systems 1. Ordnung (Zustandsraumdarstellung)

## Griechische Buchstaben

Größe	Einheit	Bezeichnung
$\alpha$	-	Linearkoeffizient für die Massenmatrix (proportionale Dämpfung)
$\beta$	°	Steigungswinkel
$\beta$	-	Linearkoeffizient für die Steifigkeitsmatrix (proportionale Dämpfung)
$\delta$	-	Konvergenzwert zur Bewertung der Differenz zweier nacheinander reduzierter Systeme
$\delta_i$	rad/s	Abklingkoeffizient des i-ten komplexen Eigenwerts
$\Delta$	-	Distanzparameter
$\epsilon$	-	Residuum
$\epsilon$	-	Reduktionsfehler allgemein
$\epsilon_{rel,ij}$	-	relativer Reduktionsfehler für einen Übertragungspfad
$\epsilon_{rel}$	-	relativer Reduktionsfehler, z. B. bezügl. einer bestimmten Norm
$\epsilon_s$	-	maximal zulässiger relativer Fehler in der Entwicklungsstelle
$\lambda_i$	rad/s	i-ter komplexer Eigenwert des DGL-Systems 2. Ordnung
$\bar{\lambda}_i$	rad/s	i-ter konjugiert komplexer Eigenwert des DGL-Systems 2. Ordnung
$\phi$	$1/\sqrt{kg},$ $1/\sqrt{kg \cdot m^2}$	Eigenvektor
$\phi_i$	$1/\sqrt{kg},$ $1/\sqrt{kg \cdot m^2}$	Eigenvektor zum i-ten Eigenwert
$\Phi$	$1/\sqrt{kg},$ $1/\sqrt{kg \cdot m^2}$	Modalmatrix

$\Phi_r$	$1/\sqrt{kg}, \frac{1}{\sqrt{kg \cdot m^2}}$	reduzierte Modalmatrix (nach Löschen von Eigenvektoren)
$\sigma$	-	Singulärwert
$\sigma$	$rad/s$	Abklingkonstante der komplexen Frequenzvariable
$\Sigma$	-	zu reduzierendes System
$\Sigma_{red}$	-	reduziertes System
$\omega$	$rad/s$	Kreisfrequenz
$\omega_i$	$rad/s$	Kreisfrequenz des i-ten Eigenwerts
$\omega_{D,i}$	$rad/s$	i-te Kreisfrequenz des gedämpften Systems
$\omega_i^2$	$rad/s$	i-ter Eigenwert
$\Omega^2$	$rad^2/s^2$	Eigenwertmatrix
$\xi$	$Ns/m$	lok. wirkender Dämpfungsfaktor
$\psi_i$	-	i-ter komplexer Rechtseigenvektor des DGL-Systems 2. Ordnung
$\bar{\psi}_i$	-	i-ter komplexer Linkseigenvektor des DGL-Systems 2. Ordnung

## Mathematische Ausdrücke und Zeichen

Symbol	Bedeutung
$\mathbf{A}^{-1}$	Invertierte der Matrix $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^T$	Transponierte der Matrix $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^*$	kompl. konj. Transponierte der Matrix $\mathbf{A}$ (Adjungierte), wenn $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ , Transponierte der Matrix $\mathbf{A}$ , wenn $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$
$\mathbf{A}^\dagger$	Pseudo-Inverse der Matrix $\mathbf{A}$
$\tilde{\mathbf{A}}$	Größe in modalen Koordinaten
$\mathbb{C}_+$	rechte Halbebene der komplexen Ebene ( $s \in \mathbb{C}_+ : Re(s) > 0$ )
$\det(\cdot)$	Determinante
$\text{diag}(a_1 \dots a_n)$	Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen $a_1 \dots a_n$
$\dim(\cdot)$	Dimension
$\in$	Element von

---

$e^{(\cdot)}$	Exponentialfunktion
$f(\cdot)$	Funktion eines Ausdrucks
$\iota$	imaginäre Einheit ( $\sqrt{-1}$ )
$\int$	Integral
$\mathbb{K}$	Körper der reellen Zahlen
$\mathbb{K}^n$	Menge aller Vektoren der Dimension $n$ mit Einträgen aus $\mathbb{K}$
$\mathbb{K}^{n \times m}$	Menge aller Matrizen der Dimension $n \times m$ mit Einträgen aus $\mathbb{K}$
$\mathcal{L}[f(t)]$	Laplace-Transformation von $f(t)$
$ s $	Betrag von $s$
$\text{Re}(s)$	Realteil von $s$
$\text{Im}(s)$	Imaginärteil von $s$
$\sin(\cdot)$	Sinus
$\Sigma$	Summe
$\text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$	der durch die $n$ Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ aufgespannte Raum
$\text{colspan}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$	der durch die $n$ Spaltenvektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ aufgespannte Raum
$\text{spur}(\mathbf{A})$	Spur der Matrix $\mathbf{A}$
$\text{rang}(\mathbf{A})$	Rang der Matrix $\mathbf{A}$
$\dot{x}$	erste Ableitung von $x$
$\ddot{x}$	zweite Ableitung von $x$
$[\cdot]$	Matrixblock
$\ \cdot\ $	Norm
$\ \cdot\ _2$	2-Vektornorm
$\ \cdot\ _F$	Frobenius-Norm
$\ \cdot\ _p$	p-Norm
$\ \cdot\ _{\mathcal{H}_p}$	$\mathcal{H}_p$ -Norm
$\ \cdot\ _{\mathcal{H}_2}$	$\mathcal{H}_2$ -Norm
$\ \cdot\ _{\mathcal{H}_\infty}$	$\mathcal{H}_\infty$ -Norm
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	inneres Produkt
$\subset$	echte Teilmenge von
$\subseteq$	Teilmenge von
$\cup$	Vereinigung zweier Vektorräume

$\cup$  Vereinigung mehrerer Vektorräume

## Glossar mathematischer Begriffe

Im Folgenden werden einige ausgewählte mathematische Begriffe, die in den Ingenieurwissenschaften nicht geläufig sind, erläutert:

Begriff	Erklärung
Adjungierte	Die Adjungierte $\mathbf{A}^*$ zur Matrix $\mathbf{A}$ entsteht, indem die Einträge von $\mathbf{A}$ konjugiert werden und die Matrix anschließend transponiert wird.
biorthogonal	Die Biorthogonalität ist eine Sonderform der Orthogonalität. Eine Matrix wird biorthogonal genannt, wenn ihre Spaltenvektoren aufeinander senkrecht stehen, sodass gilt: $\mathbf{A}^* \mathbf{A} = \text{diag}(a_1, \dots, a_m)$ . Zwei Matrizen werden biorthonormal genannt, wenn die aus dem Produkt resultierende Diagonalmatrix die Einheitsmatrix ergibt.
dyadisches Produkt	Das dyadische Produkt ist in der Mathematik ein spezielles Produkt zweier Vektoren, dessen Ergebnis eine Matrix mit dem Rang eins ist. Das dyadische Produkt kann als Spezialfall eines Matrizenprodukts einer einspaltigen mit einer einzeiligen Matrix angesehen werden.
hermitesch	Eine Matrix heißt hermitesch, wenn sie mit ihrer Adjungierten, also der transponierten bzw. komplex konjugierten Matrix, übereinstimmt. Demnach gilt: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$
Norm	Eine Norm ist eine Abbildung, die einem mathematischen Objekt, beispielsweise einem Vektor, einer Matrix oder einer Funktion, eine Zahl zuordnet, die auf definierte Weise die Größe des Objekts beschreiben soll. Die „Größe“ hängt dabei vom Objekt und der Norm ab und beschreibt bspw. die Länge eines Vektors, den größten Singulärwert einer Matrix oder das Maximum einer Funktion.

---

orthogonal	Zwei Vektoren heißen in der linearen Algebra orthogonal zueinander, wenn ihr Skalarprodukt null ist. Eine Menge von Vektoren wird dann orthogonal oder Orthogonalsystem genannt, wenn alle darin enthaltenen Vektoren paarweise orthogonal zueinander sind. Im Spezialfall des $\mathbb{R}^3$ stehen zwei orthogonale Vektoren senkrecht aufeinander.
orthonormal	Besitzen die Vektoren eines Orthogonalsystems die Norm eins, so werden die darin enthaltenen Vektoren orthonormal genannt. Die Menge der Vektoren wird entsprechend als Orthonormalsystem bezeichnet.
positiv definit	Eine Matrix ist positiv definit, wenn alle Eigenwerte dieser Matrix positiv sind. Umgedreht ist die Matrix negativ definit, wenn die Eigenwerte kleiner null sind. Eine indefinite Matrix besitzt sowohl positive als auch negative Eigenwerte.
Permutation	Eine Permutation entspricht einer Vertauschung. Innerhalb einer Matrix können mit Hilfe einer Spaltenpermutation die Spaltenvektoren vertauscht und neu angeordnet werden. Dies geschieht durch die Multiplikation mit einer Permutationsmatrix.
Rang	Als Rang einer Matrix wird die Anzahl der Zeilenvektoren, die nach der Umformung mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren in die Zeilenstufenform ungleich $\mathbf{0}$ sind, bezeichnet. Ist der Rang einer quadratischen Matrix gleich ihrer Zeilen- und Spaltenzahl, hat sie vollen Rang. Für eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ gilt: $\text{rang}(\mathbf{A}) \leq \min \{n, m\}$ .
reguläre Matrix	Synonym für invertierbare oder nicht-singuläre Matrix; eine reguläre Matrix hat vollen Rang und ihre Determinante ist ungleich null.

Residuum	Als Residuum wird die Abweichung von einem gewünschten Ergebnis bezeichnet, wenn in eine Gleichung Näherungslösungen eingesetzt werden oder wenn eine Näherung an eine Funktion gesucht wird. Das Residuum ist vom Fehler zu unterscheiden, für dessen Berechnung stets die Originalfunktion benötigt wird. Das Residuum hingegen ist stets verfügbar, da es aus der Approximation an die Funktion oder an den Funktionswert berechnet wird. Die Norm des Residuums kann auch als Güte der Approximation verwendet werden.
singulär	Als singulär wird eine Matrix bezeichnet, deren Determinante gleich null ist. Die Matrix ist somit nicht invertierbar.
Spur	Als Spur einer Matrix wird die Summe der Hauptdiagonalelemente dieser Matrix bezeichnet.
Supremum	Als Supremum einer Funktion wird die kleinste obere Schranke bezeichnet. Dieses kann bspw. den kleinsten Funktionswert innerhalb eines definierten Intervalls beschreiben, welcher von der Funktion nicht mehr überschritten wird.
unitär	Eine unitäre Matrix ist eine komplexe quadratische Matrix, deren Zeilen- und Spaltenvektoren paarweise orthonormal zueinander sind. Damit ist die Inverse einer unitären Matrix gleichzeitig ihre Adjungierte. Im Reellen wird eine unitäre Matrix orthogonale Matrix genannt.

# 1 Einleitung

## 1.1 Ausgangssituation

Moderne Werkzeugmaschinen sind komplexe mechatronische Produktionssysteme, die den hohen Anforderungen hinsichtlich ihrer Leistungsfähigkeit, Genauigkeit und Zuverlässigkeit gerecht werden müssen. Wichtige Beurteilungskriterien für die Absolutgenauigkeit stellen die statische Steifigkeit und das thermische Verhalten der Maschine dar. Zur Verringerung der Haupt- und Nebenzeiten werden vom Kunden zudem eine hohe Führungsgenauigkeit bei maximalen Bahngeschwindigkeiten sowie die Prozessstabilität bei hohen Zeitspanvolumina gefordert. Hierfür spielt zusätzlich das dynamische Nachgiebigkeitsverhalten der Gestellstrukturen und Komponenten eine entscheidende Rolle, welches maßgeblich für auftretende Schwingungerscheinungen verantwortlich ist. Schwingungen beeinflussen nicht nur die Genauigkeit und die Oberflächenqualität der gefertigten Werkstücke, sondern auch den Werkzeugverschleiß und die erreichbare Zerspanungsleistung. Neben den Anforderungen an die Arbeitsgenauigkeit müssen die Hersteller auch wirtschaftliche Gesichtspunkte, wie bspw. die anfallenden Betriebskosten und das Verschleißverhalten sowie die Produktionskapazität berücksichtigen. Darüber hinaus erhält die Energie- und Ressourceneffizienz moderner Maschinen einen immer größeren Stellenwert. Diese und weitere Anforderungen an moderne Werkzeugmaschinen sind in Bild 1.1 dargestellt.

Durch den Einsatz moderner Simulationsmethoden ist es möglich, die Eigenschaften des Maschinenentwurfs frühzeitig im Produktentstehungsprozess anhand eines virtuellen Prototyps zu bewerten und zu optimieren. Dazu werden die physikalischen Gesetzmäßigkeiten durch mathematische Formulierungen beschrieben, die das Verhalten der Gestellstruktur oder des kompletten Maschinenkonzepts widerspiegeln. Da die Geometrie der Strukturbauenteile in der Regel zu komplex ist, um diese mit den Grundgleichungen der Elastomechanik zu erfassen, werden numerische Näherungsverfahren eingesetzt, welche die Struktur nicht kontinuierlich, sondern an diskreten Punkten beschreiben. Ein geeignetes und leistungsfähiges Verfahren hierfür ist die Finite-Elemente-Methode (FEM), die sich für die strukturmechanische Simulation der Gestellstrukturen von Werkzeugmaschinen eignet (MILBERG 1995, ALTINTAS ET AL. 2005, WECK & BRECHER 2006a).

Wie oben beschrieben, ist es wichtig, frühzeitig im Entwicklungsprozess die erreichbare Leistungsfähigkeit und Genauigkeit des Maschinenentwurfs abschätzen.



Bild 1.1: Anforderungen an moderne Werkzeugmaschinen (nach MILBERG 1995, WECK & BRECHER 2005, ABELE & REINHART 2011)

zen zu können. Hierfür stellt die gekoppelte Betrachtung des Finite-Elemente-(FE)-Modells der mechanischen Struktur mit der regelungstechnischen Simulation der elektrischen Antriebssysteme einen geeigneten Ansatz dar (BERKEMER 2003, OERTLI 2008). Die Erweiterung des gekoppelten Systems um das Modell eines Bearbeitungsprozesses vervollständigt den virtuellen Prototypen und ermöglicht die Simulation realer Betriebszustände im Zeitbereich. Auf diese Weise lassen sich die Wechselwirkungen zwischen der Maschinenstruktur und dem Zerspanungsprozess vorhersagen und Aussagen bezüglich der Prozessstabilität ableiten (WITT 2007, SCHWARZ 2010).

In der Methode der finiten Elemente wird das Bewegungsverhalten der Struktur als Folge der wirkenden Kräfte in Form eines diskreten Gleichungssystems beschrieben. Die Verformungen beschränken sich in der linearen FEM jedoch auf kleine Verschiebungen, wie sie bei elastischen Verformungen, z. B. Schwingungen, auftreten. Der Diskretisierungsgrad der Geometrie und die damit verbundene Anzahl finiter Elemente bestimmen dabei die Genauigkeit des Modells im Vergleich zur Realität. Dadurch werden auch die Größe der resultierenden Koeffizientenmatrizen und die Anzahl der Unbekannten des zu lösenden Gleichungssystems beeinflusst. Diese Anzahl ist im Allgemeinen so groß, dass eine numerische Lösung der Gleichungen extrem zeitaufwendig ist und das gesamte Simulationsverfahren in der industriellen Anwendung aus

Zeit- und Kostengründen nicht in Betracht gezogen wird. Besonders für die bereits genannte gekoppelte Simulation im Zeitbereich muss das hochdimensionale System von Bewegungsgleichungen auf geeignete Weise zu einem System reduziert werden, in welchem die auftretenden Matrizen eine deutlich kleinere Dimension haben. Dies erlaubt eine Lösung des reduzierten Systems mit stark verkürzter Rechenzeit.

Um das gewünschte niedrigdimensionale Verhaltensmodell der mechanischen Struktur zu erhalten, wird eine sog. Ordnungsreduktion<sup>1</sup> durchgeführt. Bislang kamen hierfür meist modale Reduktionsverfahren zum Einsatz (vgl. u. a. KEHL 2004, WITT 2007, OERTLI 2008, GEBHARD 2011). Diese beruhen auf der Lösung des Eigenwertproblems (EWP), wodurch die Eigenwerte bzw. Eigenfrequenzen (EF) und die dazugehörigen Eigenvektoren bzw. Eigenschwingungsformen – auch Moden genannt – bestimmt werden. Die modale Reduktion bedient sich der Vorstellung, die von äußeren Kräften hervorgerufenen Verformungen durch eine gewichtete Überlagerung der berechneten Schwingungsformen darzustellen. Dies wird auch als modale Superposition bezeichnet. Hierfür wird eine Transformation in die sog. modalen Koordinaten mit Hilfe der Modalmatrix durchgeführt, die sich aus den berechneten Spaltenvektoren der Eigenmoden zusammensetzt. Diese Modaltransformation lässt ein reduziertes System entstehen, dessen Dimension der Anzahl der berücksichtigten Eigenmoden entspricht.

Eine optimale Approximation des Originalsystems kann dabei lediglich durch die Berechnung sämtlicher Eigenwerte erreicht werden. Da dies zu sehr langen Berechnungszeiten führt, wird nur eine Auswahl von Moden für die Ordnungsreduktion verwendet. In seiner Grundform realisiert die modale Reduktion die Verkleinerung der Systemgröße, indem nicht dominante – meist hochfrequente – Bewegungsanteile der elastischen Struktur entfernt werden. Dies wird auch als modales Abschneiden oder *modal truncation* bezeichnet (GAWRONSKI 2004). Für die Modaltransformation werden somit nur die bis zu einer definierten Grenzfrequenz berechneten Schwingungsformen berücksichtigt. Als Ergebnis dieser Reduktion liegt ein niedrig dimensioniertes Verhaltensmodell der mechanischen Struktur vor, welches für die weiteren Analysen im Frequenz- sowie im Zeitbereich effizient berechenbar ist.

---

<sup>1</sup> In der vorliegenden Arbeit werden die Begriffe Ordnungsreduktion, Modellordnungsreduktion und Modellreduktion synonym verwendet. Allgemein wird unter diesen Verfahren die Vereinfachung von hochdimensionalen Gleichungssystemen zu niedrigdimensionalen Systemen verstanden, d. h. die Größe der Systemmatrizen wird hierbei reduziert. Dies ist nicht mit der Transformation eines Differenzialgleichungssystems 2. Ordnung in ein System 1. Ordnung zu verwechseln.

## 1.2 Problemstellung

Die modale Reduktion hat sich aufgrund ihrer einfachen physikalischen Vorstellung, das Systemverhalten durch die Überlagerung verschiedener Eigenmoden zu beschreiben, als Standardverfahren zur Reduktion linearer FEM-Modelle im strukturmechanischen Bereich etabliert. Die Darstellung der Strukturverformung durch überlagerte Eigenvektoren ist jedoch ein globaler Ansatz, der keine Information über die räumliche Verteilung der wirkenden Kräfte enthält. Darauf wird die Lastverteilung unzureichend approximiert (GÉRADIN & RIXEN 1997). Deshalb ist nach MEIROVITCH & KWAK (1990) eine relativ große Anzahl von Eigenmoden notwendig, um eine möglichst große Übereinstimmung mit dem Originalsystem zu erreichen. In der Literatur, z. B. in GASCH & KNOTHE (1989), sind Empfehlungen zu finden, alle Eigenmoden bis zum doppelten Wert der maximal zu erwartenden Erregerfrequenz zu verwenden.

Das Ziel der Modellreduktion, ein System geringer Dimension bei höchster Approximationsqualität zu erzeugen, kann demnach nur erreicht werden, wenn für die Transformation die für den Anwendungsfall relevanten Eigenmoden verwendet werden. Da bei Werkzeugmaschinen und anderen ähnlich komplexen Strukturen die einzelnen Eigenfrequenzen nahe zusammen liegen oder stark miteinander gekoppelt sein können (DOSSING 1989), wird die Auswahl besonders erschwert. Die größte Schwierigkeit der modalen Reduktion liegt somit in der Bestimmung der dominanten Eigenmoden (VARGA 1995, LEHNER 2007). Dabei besteht die Gefahr, dass eine oder mehrere relevante Moden nicht berücksichtigt werden. Dies kann sich in einem gekoppelten Modell, z. B. zur Reglerauslegung, negativ auswirken und die Ergebnisse verfälschen (RÖCK ET AL. 2009). Des Weiteren bieten die modalen Verfahren keine Möglichkeit, den aus der Reduktion resultierenden Approximationsfehler gegenüber dem Originalsystem im Voraus zu bestimmen (VARGA 1995). Der durch die modale Reduktion entstandene Fehler bleibt daher i. d. R. unbekannt. Hinzu kommt, dass für die Bestimmung der modalen Basis meist das ungedämpfte Modell herangezogen wird. Die Modellierung der Systemdämpfung geschieht anschließend mit Hilfe eines globalen Ansatzes am modal reduzierten System. Hierdurch besteht keine Möglichkeit, lokal auftretende Dämpfungseffekte im Modell zu berücksichtigen.

Die wichtigsten Eigenschaften der modalen Reduktion und deren Auswirkungen bezogen auf die Anwendung in der Simulation von Werkzeugmaschinen sind in Bild 1.2 nochmals zusammengefasst.

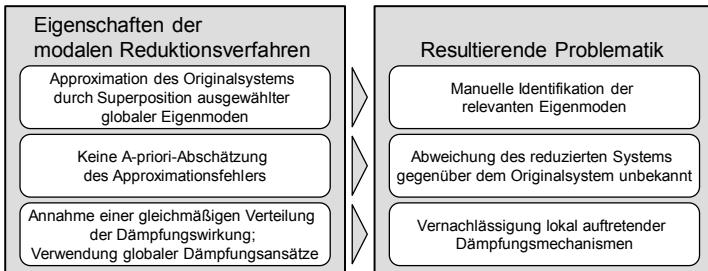


Bild 1.2: Wichtige Eigenschaften der modalen Reduktion und deren Auswirkungen auf die Simulation von Werkzeugmaschinen

Aus den genannten Gründen erfordert die Anwendung der modalen Reduktionsverfahren neben dem manuellen Aufwand für die Wahl der zu berücksichtigenden Eigenmoden die detaillierte Kenntnis des Verfahrens selbst und entsprechend umfassende Erfahrung. Weil genau diese Erfahrung im mittelständischen Werkzeugmaschinenbau häufig noch fehlt, scheitert dort meist die korrekte Anwendung. Zur Festigkeitsberechnung von Strukturkomponenten und zur Optimierung des Schwingungsverhaltens der Gesamtmaschine auf Basis der berechneten Eigenschwingungsformen wird die Finite-Elemente-Methode in der Entwicklungsphase von Werkzeugmaschinen zum Teil bereits herangezogen, die weitere Nutzung der Modellinformationen zur Reglerauslegung oder Untersuchung der Prozessstabilität mit Hilfe der gekoppelten Simulation bleibt aber häufig aus den geschilderten Gründen aus. Es bedarf daher geeigneter Verfahren und Vorgehensmethoden für die automatische Erstellung von niedrig dimensionierten Systemmodellen, die gleichzeitig höchsten Qualitätsansprüchen gerecht werden. Zudem sollen diese reduzierten Systeme für die integrierte Modellbildung der mechanischen Struktur, der Antriebe mit deren Regelung und des Bearbeitungsprozesses geeignet sein.

In den letzten Jahren wurden in den Disziplinen der Regelungstechnik und Kontrolltheorie sowie der Elektrotechnik moderne Methoden zur Ordnungsreduktion großer Differenzialgleichungssysteme erforscht (z. B. FELDMANN & FREUND 1995, GRIMME 1997, GUGERCIN 2003, ANTOULAS 2005, SALIMBAHRAMI 2005, FASSBENDER & BENNER 2006). Als wichtige Vertreter sind an dieser Stelle die Krylov-Unterraum-(KU)-basierten Verfahren zu nennen, die gegenüber den modalen Methoden einige entscheidende Vorteile aufweisen. Zum einen sind sie gut automatisierbar, da die Systembewertung auf einer mathematischen Grundlage und nicht durch den Benutzer geschieht. Zum zweiten bieten sie eine verallgemeinerte und damit verlässlichere Analyse des dominanten Systemverhaltens über einen wählbaren Frequenzbereich. Darüber

hinaus sind diese Verfahren durch den Einsatz sog. Fehlerschätzer in der Lage, vorgegebene maximal zulässige Abweichungen gegenüber dem Originalsystem einzuhalten. Des Weiteren berücksichtigen sie explizit die Ein- und Ausgänge des Systems, was insbesondere für den rechnergestützten Reglerentwurf von Vorteil ist. Nicht zuletzt ist zu erwähnen, dass die Krylov-Unterraum-Verfahren (KUV) auch lokale Dämpfungseffekte eines Systems berücksichtigen können, unabhängig davon, welcher Modellierungsansatz hierfür gewählt wurde.

Die Verwendung von Krylov-Unterraum-Verfahren basiert auf der Approximation der Übertragungsfunktion des Originalmodells mit Hilfe eines Momentenabgleichs der Potenzreihenentwicklung der Übertragungsfunktion. Dabei werden unter den Momenten einer Potenzreihe in der Mathematik die Summanden der Reihe verstanden. Als Momentenabgleich wird die Bestimmung eines reduzierten Systems bezeichnet, dessen erste Momente mit den ersten Momenten des Originalsystems übereinstimmen. Entspricht eine gewisse Anzahl dieser Momente des Originalsystems denen des reduzierten Systems, so kann die Übertragungsfunktion durch Interpolation approximiert werden, weshalb die Verfahren auch unter dem Begriff *Moment-Matching*-Methoden (engl. für Momentenabgleich) bekannt sind.

Aufgrund des Ursprungs der genannten Krylov-Unterraum-basierten Reduktionsverfahren wird deren Potenzial im strukturmechanischen Bereich noch eher selten genutzt und kommt insbesondere für die Simulation von Werkzeugmaschinen noch nicht zum Einsatz. Um einen wirtschaftlichen Einsatz in der industriellen Anwendung zu ermöglichen, müssen die Verfahren an die mathematischen Eigenschaften der aus der FEM resultierenden Gleichungssysteme angepasst werden. Zudem existiert bisher keine durchgängige Lösung für den Einsatz moderner Ordnungsreduktionsverfahren im Rahmen der Simulation von Werkzeugmaschinen. Das erwähnte Potenzial kann demnach nur durch das Aufzeigen und Umsetzen einer solchen Lösung ausgeschöpft werden.

### 1.3 Zielsetzung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, ein integriertes Verfahren für die effiziente Berechnung von Finite-Elemente-Modellen zur Simulation von Werkzeugmaschinen zu entwickeln. Hierfür sollen Krylov-Unterraum-basierte Ordnungsreduktionsverfahren zum Einsatz kommen und qualifiziert werden, um die hoch dimensionierten Gleichungssysteme in kleine, einfach zu berechnende Systemmodelle zu überführen. Dies setzt die Adaption und Bereitstellung der aus dem Fachbereich der Mathematik stammenden Reduktionsverfahren für die vorliegende ingenieurwissenschaftliche Anwendung einer strukturmechanischen

Simulation von Werkzeugmaschinen voraus. Das entstehende reduzierte Modell soll so beschaffen sein, dass es für die bekannten Ansätze der gekoppelten Simulation von Struktur- und Bearbeitungsprozessmodell bzw. Regelungstechnischem Modell geeignet ist und möglichst früh in den Entwicklungsphasen im Unternehmen eingesetzt werden kann.

Ausgehend von der übergeordneten Zielsetzung lassen sich folgende Teilziele dieser Arbeit ableiten:

- Das erste Teilziel besteht in der Analyse der Eigenschaften und der Anpassung der KU-basierten Reduktionsverfahren an die Anforderungen der aus der FEM resultierenden Gleichungssysteme. Dabei liegt ein besonderes Augenmerk auf der größtmöglichen Automatisierung, um eine weitestgehende Unabhängigkeit vom Anwender und von dessen bislang für die modale Reduktion nötigen Erfahrungsschatz zu erreichen. Zudem soll das Reduktionsverfahren die Dämpfungsmatrix, unabhängig von deren Modellierungsansatz, berücksichtigen können, um damit die realen in Werkzeugmaschinen auftretenden Dämpfungseffekte besser beherrschen zu können.
- Das zweite Ziel der Arbeit liegt in der Konzeption und Entwicklung einer Vorgehensmethodik für die effiziente numerische Simulation von Werkzeugmaschinen. Hierfür muss der gesamte Prozess von der Erstellung des FEM-Modells bis zur Berechnung und Auswertung der Ergebnisse auf das Reduktionsverfahren abgestimmt werden und ein durchgängiges Vorgehensmodell für die Integration der Verfahren entwickelt werden. Auf diese Weise soll die Durchführung der Simulation des mechatronischen Gesamtsystems inklusive der Betrachtung der Berücksichtigung von Regelungs- und Prozesseinflüssen erleichtert und effizienter gestaltet werden.
- In einem dritten Schritt soll das eingesetzte Reduktionsverfahren und das Vorgehensmodell ausführlich getestet und analysiert werden, um deren Eignung für den Einsatz in der Entwicklung von Werkzeugmaschinen beurteilen zu können. Diese Untersuchungen dienen der Prüfung, inwiefern sich die Potenziale der automatischen Reduktion in der strukturmechanischen Simulation von Werkzeugmaschinen nutzen lassen und ob das Verfahren die geforderte Approximationsqualität erfüllen kann.

Mit der vorliegenden Arbeit soll somit eine Schnittstelle zwischen der Mathematik und dem ingenieurwissenschaftlichen Anwendungsgebiet der Strukturdynamik von Werkzeugmaschinen entstehen. Auf diese Weise sollen die nötigen Grundlagen geschaffen und den Entwicklern die Anwendbarkeit der mathematischen Methoden ermöglicht werden.

## 1.4 Aufbau der Arbeit

Der Aufbau dieser Arbeit orientiert sich an den in Abschnitt 1.3 beschriebenen Teilzielen und ist daher in drei thematische Blöcke unterteilt (Bild 1.3). In Kapitel 2 werden zunächst die Grundlagen in Bezug auf die Entwicklung von Werkzeugmaschinen sowie der Einsatz von Simulationsmethoden als Instrument zur Unterstützung des Produktentwicklungsprozesses erläutert. Am Ende des Kapitels wird die Notwendigkeit einer Ordnungsreduktion dargestellt, sodass in Kapitel 3 der Stand der Forschung und Technik zu Modellordnungsreduktionsverfahren im Allgemeinen und zu deren Einsatz in der strukturdynamischen Simulation von Werkzeugmaschinen im Speziellen detailliert wird.

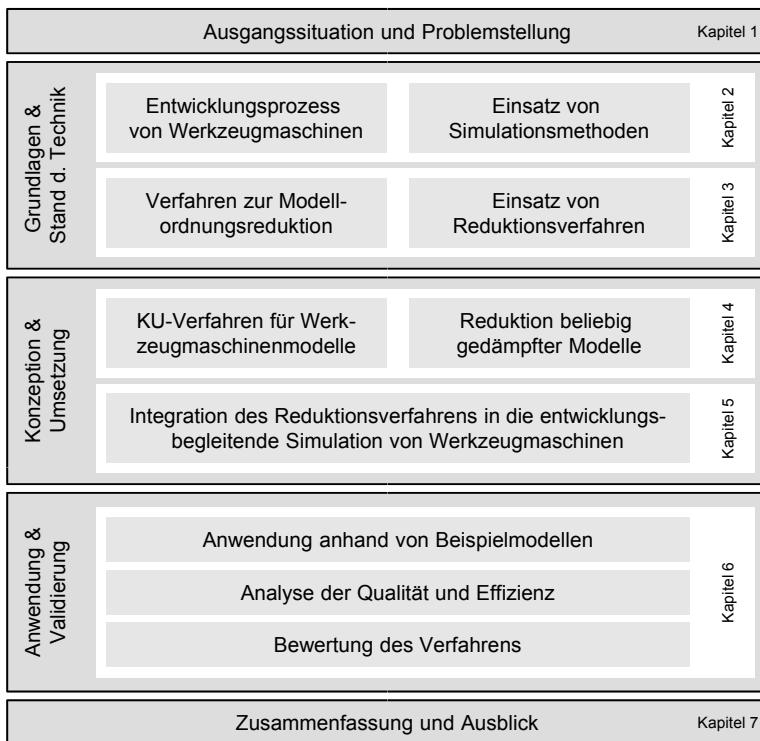


Bild 1.3: Aufbau der Arbeit

Im Hauptteil der Arbeit wird in Kapitel 4 ein automatisches Reduktionsverfahren, welches die Anforderungen von Seiten der FEM-Modelle von Werkzeugmaschinen erfüllt, beschrieben. Einen besonderen Neuheitsaspekt stellt dabei die Variante zur Reduktion von Modellen dar, welche eine nicht zur Masse und Steifigkeit des Systems proportionale Dämpfungsmaatrix besitzen. Damit wird es erstmals möglich, kleine und effizient zu berechnende Systemmodelle zu erstellen, welche lokal auftretende und entsprechend modellierte Dämpfungseffekte wiedergeben. In Kapitel 5 wird schließlich ein Vorgehensmodell für die Integration des Reduktionsverfahrens in den Entwicklungsprozess präsentiert, um zukünftig einen zielgerichteten Einsatz der Ordnungsreduktion zu gewährleisten. Dieser Teil stellt eine Vereinigung zwischen den mathematisch geprägten Reduktionsmethoden und der ingenieurwissenschaftlichen Anwendung dar, indem auf die Anforderungen der Simulation von Werkzeugmaschinen eingegangen wird und die Randbedingungen der Ordnungsreduktion berücksichtigt werden.

Schließlich wird in Kapitel 6 das entwickelte Vorgehen für die Anwendung des automatischen Krylov-Unterraum-basierten Reduktionsverfahrens auf verschiedene Beispielmodelle beschrieben. Die Ergebnisse werden hierbei nach unterschiedlichen Kriterien analysiert und ausgewertet. Den Abschluss bildet eine Bewertung des Verfahrens hinsichtlich dessen Eignung für die entwicklungsbegleitende Simulation von Werkzeugmaschinen. Die Arbeit endet mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick auf noch anstehende Forschungsaktivitäten.



## 2 Entwicklung und Simulation von Werkzeugmaschinen

### 2.1 Inhalt des Kapitels

Im vorangegangenen Kapitel wurde die globale Problemstellung und die daraus abgeleitete Zielsetzung für die vorliegende Arbeit vorgestellt. Zur Einordnung der Thematik des Einsatzes von Ordnungsreduktionsverfahren während der Maschinenentwicklung werden im Folgenden die Grundlagen in Bezug auf den Entstehungsprozess und die Simulation von Werkzeugmaschinen erläutert. Hierfür wird in Abschnitt 2.2 zunächst auf das Struktur- und Betriebsverhalten von Werkzeugmaschinen eingegangen. Daraus resultieren Anforderungen, die in den Entwicklungsphasen (Abschnitt 2.3) berücksichtigt werden müssen. Während der Entwicklung kommen heute numerische Simulations- und Berechnungsverfahren zum Einsatz, deren wichtigste Vertreter in Abschnitt 2.4 erläutert werden. Dabei werden neben der rein strukturmechanischen Berechnung auch die Möglichkeiten der Berücksichtigung von Regelungs- und Prozesseinflüssen in einem gekoppelten Simulationsmodell (Abschnitt 2.5) beschrieben. In einer abschließenden Betrachtung werden die Inhalte des Kapitels nochmals zusammengefasst.

### 2.2 Strukturverhalten von Werkzeugmaschinen

#### 2.2.1 Allgemeines

Ein wichtiges Qualitätsmerkmal einer Werkzeugmaschine stellt die Arbeitsgenauigkeit dar, welche zum Großteil vom Strukturverhalten der Maschine abhängig ist und damit bereits weitgehend in der mechanischen Konstruktion festgelegt wird. Unter dem Strukturverhalten wird das elastische Verformungsverhalten aufgrund des Einflusses statischer und dynamischer Lasten im Sinne von Kräften und Momenten verstanden. Zudem beeinflussen thermische Effekte das Strukturverhalten von Maschinen, welche demnach auch bereits im Konstruktionsstadium berücksichtigt werden müssen. In der vorliegenden Arbeit liegt der Fokus auf dem strukturmechanischen Verhalten von Werkzeugmaschinen, weshalb thermische und thermomechanische Effekte für die angestellten Betrachtungen ausgeblendet werden.

### 2.2.2 Werkzeugmaschinen als nachgiebige Systeme

Die mechanische Struktur einer Werkzeugmaschine wird im Folgenden als geschlossenes System betrachtet, ohne die Vorgänge und Funktionsweisen im Inneren näher zu kennen. Nach der Systemtheorie ist ein System dadurch gekennzeichnet, dass es die Fähigkeit besitzt, vorhandene zeitlich veränderliche Signale in einer bestimmten Weise in andere Signale umzuwandeln (UNBEHAUEN 2002). Die Signale werden in zwei Gruppen unterteilt. Die Eingangssignale, die im Falle eines kontinuierlichen Systems mit  $e_1(t), e_2(t), \dots, e_m(t)$  bezeichnet werden, stellen die Systemerregung dar. Die zweite Gruppe sind die Ausgangssignale  $a_1(t), a_2(t), \dots, a_q(t)$ . Sie geben die Systemreaktion wieder. Die  $m$  Eingangs- und die  $q$  Ausgangsgrößen werden in der Regel zu Vektoren zusammengefasst:

$$\mathbf{e}(t) = \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_m(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_q(t) \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Besitzt ein System mehrere Ein- und Ausgänge, wird dieses als MIMO-System (Multiple-Input-Multiple-Output) bezeichnet. Je nach Anwendungsfall kann aber auch nur ein Eingangs- und ein Ausgangssignal vorliegen ( $m = q = 1$ ). Diese Ausprägung wird entsprechend SISO-System (Single-Input-Single-Output) genannt. Bild 2.1 zeigt die schematische Darstellung eines Systems mit einzelnen (links) und zusammengefassten Signalen (rechts).

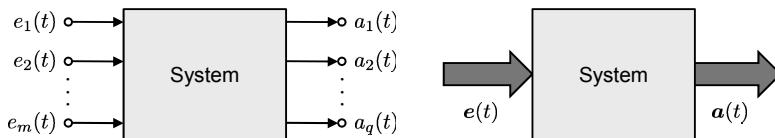


Bild 2.1: Schematische Darstellung eines Systems (nach UNBEHAUEN 2002)

Die zwischen den Eingangs- und Ausgangsgrößen bestehende Verknüpfung wird als das Übertragungsverhalten eines Systems bezeichnet. Ist dieses Verhalten bekannt, so kann es mit Hilfe einer Übertragungsfunktion  $f(\mathbf{e}(t))$  als Beziehung zwischen den Ein- und Ausgängen beschrieben werden:

$$\mathbf{a}(t) = f(\mathbf{e}(t)). \quad (2.2)$$

Im Fall des betrachteten mechanischen Systems der Werkzeugmaschine stellen die auf die Struktur wirkenden Kräfte und Momente die Eingangsgrößen dar, die zum Kraftvektor  $\mathbf{F}(t)$  zusammengefasst werden. Da in der Realität keine ideal steifen Strukturen existieren, reagiert die Maschine mit einer Verformung,

welche durch den Verlagerungsvektor  $\mathbf{x}(t)$  wiedergegeben wird. Die Dimension der Vektoren  $\mathbf{F}(t)$  und  $\mathbf{x}(t)$  entspricht der Anzahl der Systemfreiheitsgrade. Für den Fall eines realen Kontinuums wie der Werkzeugmaschinenstruktur ist diese unendlich. Zur Berechnung des Systemverhaltens wird die kontinuierliche Struktur bspw. mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode (Abschnitt 2.4.2.2) in ein diskretisiertes System mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden überführt und dadurch approximiert.

Das für die Berechnung als linear angenommene Übertragungsverhalten einer Werkzeugmaschine wird von deren Massen-, Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften definiert. Für die theoretischen Betrachtungen werden diese mit Hilfe der Massenmatrix  $\mathbf{M}$ , der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  und der Dämpfungsma-  
trix  $\mathbf{D}$  beschrieben. Das resultierende Übertragungsverhalten der auf diese Weise modellierten mechanischen Struktur kann dann durch die allgemeine Bewegungsdifferenzialgleichung einer erzwungenen, gedämpften Schwingung beschrieben werden (SHABANA 1997):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t). \quad (2.3)$$

Das daraus folgende Nachgiebigkeitsverhalten der Werkzeugmaschinenstruktur lässt sich analog zu Gleichung (2.2) als von den Systemmatrizen abhängige Funktion

$$\mathbf{N} = f(\mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{K}) \quad (2.4)$$

beschreiben.  $\mathbf{N}$  entspricht dabei der dynamischen Nachgiebigkeitsmatrix der Maschinenstruktur, welche sich aus der Lösung von Gleichung 2.3 mit Hilfe eines harmonischen Ansatzes ergibt:

$$\mathbf{N}(\omega) = \frac{\mathbf{x}(\omega)}{\mathbf{F}(\omega)}. \quad (2.5)$$

Das Nachgiebigkeitsverhalten von Werkzeugmaschinen ist demnach abhängig von der Anregungsfrequenz der auf die Struktur wirkenden Kräfte. Die verschiedenen Beanspruchungsarten werden im folgenden Abschnitt erläutert.

### 2.2.3 Beanspruchungen der Maschinenstruktur

Nach Gleichung (2.5) verursachen die auf die nachgiebige Maschinenstruktur wirkenden Kräfte bestimmte Verlagerungen innerhalb der Maschine. Diese Kräfte resultieren aus den auftretenden mechanischen Belastungen während des Betriebes, weshalb deren Kenntnis und Berücksichtigung in der Konstruktionsphase besonders relevant ist. Ein Überblick über die grundsätzlichen Belastungsarten mechanischer Strukturen ist im Anhang A.1 zu finden.

Bei Werkzeugmaschinen lassen sich nach SPUR (1996) die auftretenden Kräfte nach ihrem Ort der Entstehung bzw. nach der Definition der Systemgrenze in innere und äußere Kräfte einteilen. Demnach werden Belastungen in der Maschine, wie dies beispielsweise aufgrund der Beschleunigung von Linearachsen bei Eilgangfahrten vorkommt, als innere Kräfte bezeichnet. Alle Belastungen, die von der Umgebung aus auf die Maschine wirken, gehören zur Gruppe der äußeren Kräfte. SCHNEIDER (2000) schlägt als dritte Gruppe die durch den Betrieb der Maschine hervorgerufenen Prozesskräfte vor. Nach der oben erläuterten Definition wirken diese zwar von außen auf das System Maschine ein, da sie aber den Kraftfluss innerhalb der Maschine schließen und somit Wechselwirkungen zwischen den Systemen Maschine und Prozess hervorrufen, bilden sie eine eigene Klasse (Bild 2.2).

	Innere Kräfte	Prozesskräfte	Äußere Kräfte
statisch	(Vor-)Spannkräfte	Statische Zerspankraftanteile	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Gewichtskräfte</li> <li>• Spannkräfte über das Fundament</li> </ul>
dyna- misch	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Trägheitskräfte</li> <li>• Unwuchtkräfte</li> <li>• Dämpfungskräfte</li> <li>• Antriebskräfte</li> <li>• Reibungskräfte</li> </ul>	<p>Dyn. Schnittkraft-anteile durch:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Zahneingriffsstöße beim Fräsen</li> <li>• unterbrochenen Schnitt</li> <li>• regeneratives Rattern</li> </ul>	Über das Fundament eingeleitete Spannkräfte

Bild 2.2: Beanspruchungsarten von Werkzeugmaschinen  
(nach SCHNEIDER 2000)

Für die Auslegung der Werkzeugmaschine im Rahmen des Entwicklungsprozesses ist die Kenntnis der dargestellten Kräfte und Belastungsarten von besonderer Bedeutung. Diese sind im Sinne von Störungen für auftretende Strukturverformungen während des Maschinenbetriebes verantwortlich. Im folgenden Abschnitt werden deshalb deren Auswirkungen auf das Betriebsverhalten diskutiert.

#### 2.2.4 Betriebsverhalten des Gesamtsystems

Das Betriebsverhalten von Werkzeugmaschinen wird maßgeblich durch die Interaktion zwischen der mechanischen Struktur und den auftretenden Prozesskräften bestimmt. Die zwischen Werkzeug und Werkstück wirkende Zerspankraft führt am Wirkpunkt der nachgiebigen Maschine, auch Tool Center Point (TCP) genannt, zu kleinen relativen Verlagerungen, die wiederum ihrerseits Auswirkungen auf die Zerspankraft haben, da sie die geometrischen

Eingriffsverhältnisse zwischen Werkzeug und Werkstück kurzfristig verändern. Aus Regelungstechnischer Sicht entsteht dadurch ein geschlossener Wirkkreislauf mit dem Zerspanprozess als Rückkopplung. Das Betriebsverhalten wird daher häufig, wie in Bild 2.3 dargestellt, als Blockschaltbild beschrieben.

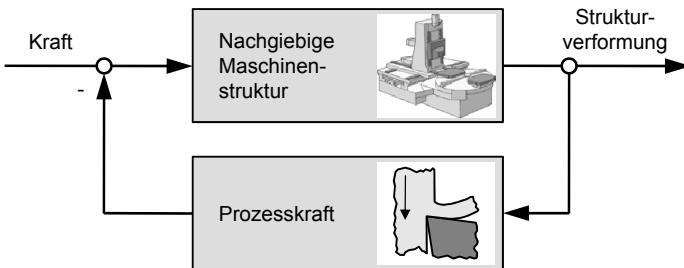


Bild 2.3: Beschreibung des Betriebsverhaltens von Werkzeugmaschinen als regelungstechnisches Blockschaltbild (nach MILBERG 1995)

Statische Lasten und Prozesskraftanteile führen in der Maschine zu Strukturverformungen, die sich als geometrische Fehler auf die Bearbeitungsgenauigkeit auswirken. Dynamische Lasten und Kraftkomponenten hingegen verursachen Schwingungen der Werkzeugmaschine, die die Arbeitsgenauigkeit und das Verschleißverhalten beeinflussen können. Dies ist insbesondere bei Schwingungen, die eine Relativbewegung zwischen dem Werkzeug und dem Werkstück hervorrufen, der Fall, was zudem den Leistungsbereich der Maschine unvorhergesehnen einschränken kann (MILBERG 1995).

Bei den Schwingungsursachen wird nach fremderregten und selbsterregten Schwingungen unterschieden (MILBERG 1995, TÖNSHOFF 1995, WECK & BRECHER 2006c). Die Fremderregung kann dabei zum einen durch eine einmalige, impulsartige Anregung, bspw. in Folge ruckartiger Positioniervorgänge, hervorgerufen werden. In der Regel ist die daraus resultierende Schwingung durch eine geringe und in Abhängigkeit der Systemdämpfung schnell abklingende Amplitude gekennzeichnet. Die Maschinenstruktur schwingt nach der Anregung in einer Schwingungsform aus, die sich aus einer Überlagerung aller Eigen-schwingungsformen ergibt. Zum anderen kann aufgrund periodisch wirkender Störkräfte während des Betriebes eine erzwungene, fremderregte Schwingung hervorgerufen werden. Als Ursachen gelten hierfür u.a. Unwuchtkräfte, hydraulische Druckschwankungen oder wechselnde Zerspankräfte aufgrund von Schneideneingriffsstößen bspw. beim Fräsen. Hierbei schwingt die Maschine mit annähernd konstanter Amplitude in der Frequenz der Anregung. Die Höhe der Amplitude ist dabei abhängig von der Größe der Störkraft. Liegt deren Frequenz in der Nähe einer Eigenfrequenz, kann die Schwingungsamplitude stark

ansteigen, was im schlimmsten Fall zur Beschädigung der Maschine führen kann. Beiden Typen der Fremderregung ist gemeinsam, dass der Maschine die Schwingbewegung durch eine Störkraft aufgezwungen wird.

Selbsterregte Schwingungen resultieren dagegen aus einer Instabilität des rückgekoppelten Gesamtsystems Maschine und Zerspanprozess. Dabei schwingt das Maschinensystem in einer oder mehreren Eigenschwingungsformen. Die auftretenden Amplituden können hierbei plötzlich stark anwachsen, weshalb die Erscheinung auch als *Rattern* der Maschine bezeichnet wird. Dieser Effekt ist sowohl akustisch hörbar und differenzierter auch durch Rattermarken auf der Werkstückoberfläche zu erkennen. In diesem Fall wird eine Eigenschwingungsform angeregt, welche eine Relativbewegung zwischen Werkstück und Werkzeug hervorruft. Beginnt die Maschine zu rattern, wird dieser Schwingungsform mehr Energie zugeführt, als durch Dämpfungseffekte absorbiert werden kann. Die für die Anfachung und Aufrechterhaltung der Schwingung nötige Energie wird dabei den Antrieben der Maschine entnommen. Als Hauptursachen dieses Effekts lassen sich der Regenerativereffekt, die Lagekopplung und die fallende Schnittkraft-Schnittdgeschwindigkeitskennlinie anführen. Eine genaue Erläuterung dieser Rattermechanismen ist MILBERG (1995), ALTINTAS (2000) oder WECK & BRECHER (2006c) zu entnehmen.

Weitere Ursachen für Instabilitäten und damit für die Begrenzung der Leistungsfähigkeit von Werkzeugmaschinen liegen in den Wechselwirkungen zwischen der Lageregelung der Vorschubachsen und den Schwingungen der Maschinenstruktur. Letztere werden von den Positionsmessgeräten und Drehgebern als kleine Bewegungen erfasst und in die Antriebsregelkreise rückgekoppelt, wo sie als Abweichung vom Sollwert interpretiert werden. In Kombination mit zu hoch gewählten Verstärkungsfaktoren der Lageregelung kann es zur Anfachung von nicht erwünschten Schwingungen kommen (GROSS ET AL. 2006, WECK & BRECHER 2006b). Dies führt dazu, dass die Antriebsregelungen nur mit begrenzten Bandbreiten betrieben werden können und die Leistungsfähigkeit der mechanischen Gestellstruktur nicht ausgeschöpft wird.

### 2.3 Ablauf des Entwicklungsprozesses

Der Entwicklungsprozess von Werkzeugmaschinen ist in mehrere Phasen untergliedert, welchen definierte Arbeitsschritte zugeordnet sind (vgl. hierzu u. a. REDEKER 1979). Entlang dieser Phasen ist der Ablauf durch eine schrittweise Zunahme des Detaillierungsgrades gekennzeichnet. Nach der Klärung und Präzisierung der Aufgabenstellung werden alle Anforderungen erfasst, aus denen in der Konzeptphase die Gesamt- und Teilfunktionen definiert werden können.

Für diese Funktionen werden entsprechende Prinzipien abgeleitet, welche in der Entwurfsphase in technische Lösungen überführt und ausdetailliert werden. Die daraus entstehenden Komponenten und Baugruppen werden zu einem Gesamtentwurf integriert und bilden die Grundlage für die Vervollständigung der Konstruktion in der Ausarbeitungsphase.

Nach dem Aufbau des Prototyps erfolgt die Erprobung anhand realer Versuche. Hierbei wird die Maschine hinsichtlich der Erfüllung ihrer Anforderungen wie bzgl. der Arbeitsgenauigkeit sowie der Produktivität überprüft. Werden diese Anforderungen nicht erfüllt, so erfolgt eine Konstruktionsänderung mit anschließender Umsetzung am realen Prototyp. Dieser Prozess durchläuft unter Umständen mehrere Iterationen, bis die Maschine allen Ansprüchen gerecht wird (siehe Bild 2.4, oben).

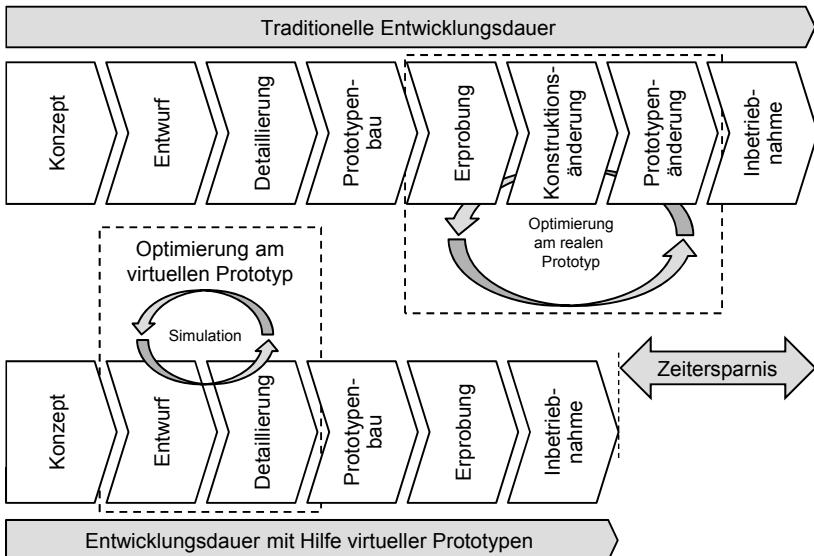


Bild 2.4: Verkürzung der Entwicklungsduer durch den Einsatz virtueller Prototypen (in Anlehnung an SCHNEIDER 2000, WITT 2007)

Eine Möglichkeit, die Entwicklungsduer zu verkürzen und somit auch die Kosten neuer Werkzeugmaschinen zu senken, ist im unteren Teil von Bild 2.4 dargestellt. An die Stelle eines realen Hardwareaufbaus der Maschinenstruktur tritt ein sog. virtueller Prototyp in Form eines geeigneten Simulationsmodells, welches zur Optimierung der Maschineneigenschaften dient (WECK ET AL. 2003). Das Ziel der virtuellen Produktentwicklung besteht darin, die späteren

Produkteigenschaften möglichst vollständig mit Hilfe der Berechnung von Simulationsmodellen vorhersagen zu können (KRAUSE 1997). Diese Modelle zeichnen sich in den einzelnen Phasen der Entwicklung durch unterschiedliche Detaillierungsgrade aus (siehe Abschnitt 2.4).

In der Konzeptfindungsphase werden auf Basis grober Modelle verschiedene Varianten miteinander verglichen und das Maschinenkonzept grundlegend festgelegt. Mit zunehmender Konkretisierung des Entwurfs werden spätestens in der Detaillierungsphase hochgenaue Modelle verwendet, die die Eigenschaften der Strukturkomponenten sowie der antriebs- und Regelungstechnischen Bestandteile abbilden. Ein wesentliches Merkmal des simulationsunterstützten Entwicklungsprozesses ist nach MELCHINGER & SCHMITZ (2004) der frühe Erwerb von Wissen über das spätere Systemverhalten (Bild 2.5).

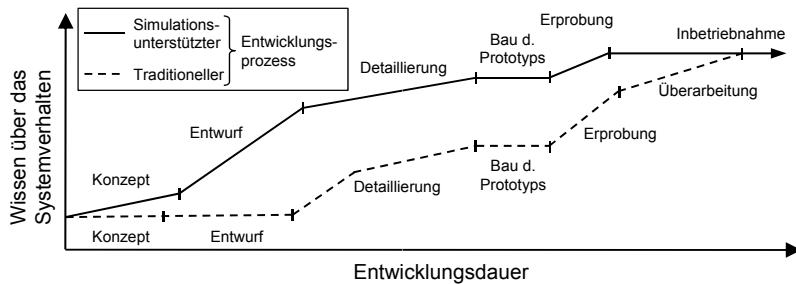


Bild 2.5: Qualitativer Vergleich des Wissenserwerbs zwischen traditionellem und simulationsunterstütztem Entwicklungsprozess (nach MELCHINGER & SCHMITZ 2004)

Durch den Einsatz virtueller Prototypen wird die Simulation des Maschinenverhaltens möglich und es können strukturelle Schwachstellen eines Entwurfs identifiziert werden. Aufgrund der erworbenen Kenntnis ist eine gezielte Anpassung des Maschinenkonzeptes hinsichtlich der Anforderungen aus dem kundenspezifischen Pflichtenheft möglich (WITT 2007). So liegt bereits zum Zeitpunkt des ersten Prototypenbaus sehr viel Wissen über das Systemverhalten des Produkts vor. Im traditionellen Entwicklungsablauf muss dieses Wissen dagegen mit Hilfe von Versuchen am realen Prototyp im Rahmen der Erprobung gewonnen werden. Im ungünstigen Fall ist darüber hinaus eine weitere Überarbeitung der Konstruktion nötig, was sowohl die Entwicklungszeit verlängert als auch die Entwicklungskosten ansteigen lässt. Die Begleitung des gesamten Entwicklungsprozesses durch moderne Simulationsmethoden stellt deshalb einen wichtigen Bestandteil einer effizienten Produktentwicklung dar.

## 2.4 Simulationsmethoden

### 2.4.1 Simulation in der Werkzeugmaschinenentwicklung

Das Ziel des Einsatzes von Simulationsmethoden in der Entwicklung von Werkzeugmaschinen ist es, das Systemverhalten mit Hilfe virtueller Modelle bereits möglichst früh zu analysieren und die Eigenschaften des Produkts vor dem Bau des ersten Prototyps absichern zu können. Wie in Abschnitt 2.3 erläutert, nimmt der Detaillierungsgrad des Maschinenentwurfs in der Entwicklung stetig zu. Dem entsprechend müssen auch die Simulationsmodelle an die zunehmende Komplexität des Entwicklungsstandes angepasst werden (Bild 2.6).

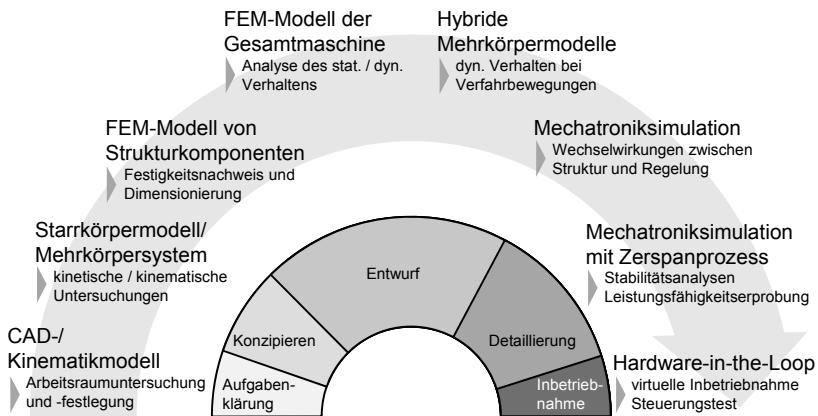


Bild 2.6: Simulationsmethoden und -modelle zur Unterstützung des Entwicklungsprozesses mit einzelnen Arbeitsinhalten und Zuordnung zu den Phasen

In der Konzeptphase werden die Funktionsstrukturen und physikalischen Wirkprinzipien festgelegt. In dieser Phase können z. B. mit Hilfe einfacher Kinematikmodelle, basierend auf den CAD-Daten (Computer Aided Design), erste Untersuchungen hinsichtlich des Arbeitsraums durchgeführt werden. Die ersten kinematischen und kinetischen Verhaltensanalysen der beweglichen Mechanismen erfolgen i. d. R. in sog. Mehrkörpersystemen (siehe Abschnitt 2.4.2), welche meist mit Starrkörpern modelliert werden, die durch einfache Feder-Dämpfer-Elemente miteinander verbunden sind. Im nächsten Schritt findet der Übergang in die Entwurfsphase statt. Die Dimensionierung der Strukturkomponenten und deren Festigkeitsnachweise werden hierbei i. d. R. von FEM-Berechnungen

unterstützt. Nach der Detaillierung aller Maschinenkomponenten erfolgt die Untersuchung des dynamischen Verhaltens des Entwurfs auf Basis komplexer Gesamtmaschinenmodelle. Hierfür kommen heute sowohl FEM-Modelle als auch sog. hybride Mehrkörpermodelle, welche aus starr und flexibel modellierten Komponenten bzw. Teilmodellen bestehen (vgl. Abschnitt 2.4.2.3), zum Einsatz. Zu diesem Zeitpunkt müssen auch die Wechselwirkungen zwischen der mechanischen Struktur und den Antriebsreglern berücksichtigt werden (ZÄH ET AL. 2004). Dies geschieht in sog. CACE-Programmen (Computer Aided Control Engineering), mit deren Hilfe die gekoppelte Simulation der mechanischen Struktur und der geregelten Antriebssysteme möglich ist (Mechatroniksimulation). In dieser Entwicklungsphase wird auch die Simulation der Wechselwirkungen zwischen dem mechatronischen Maschinensystem und dem späteren Bearbeitungsprozess zunehmend eingesetzt. Durch die Kopplung mit dem Modell eines Zerspanprozesses können etwaige Stabilitätsprobleme aufgedeckt und die Leistungsfähigkeit des Maschinenentwurfs analysiert werden. Zu Beginn der Inbetriebnahme können Teile der Simulationsmodelle mit realer Hardware gekoppelt werden, was unter dem Begriff *Hardware-in-the-Loop* (HIL) zusammengefasst wird (PRITSCHOW ET AL. 2006).

Die Erstellung der o. g. Simulationsmodelle ist meist mit einem hohen Modellierungsaufwand verbunden. Aus diesem Grund sind in der Vergangenheit einige wissenschaftliche Arbeiten entstanden, die sich mit der effizienten Einbindung der Simulationstechniken in den Entwicklungsprozess befasst haben (u. a. ALBERTZ 1995, ZIEHL 1996, SCHNEIDER 2000). Darüber hinaus stellte SIEDL (2008) ein Vorgehensmodell vor, welches den einzelnen Entwicklungsphasen die jeweils geeigneten Simulationswerkzeuge zuordnet und mit den assoziierten Arbeitsschritten der Konstrukteure<sup>1</sup> verbindet. Eine Vorgehensmethodik, die schwerpunktmäßig den Einsatz der Simulation in der Konzept- und Entwurfsphase betrachtet, war Gegenstand der Untersuchungen von NEITHARDT (2004). Um den Einsatz der Simulation in den verschiedenen Phasen so effizient wie möglich zu gestalten, entwickelte KIPFMÜLLER (2010) eine Methodik zur Aufwandsoptimierung der Simulation. Dabei findet die Durchgängigkeit in der Verwendung eines in seiner Komplexität mitwachsenden Simulationsmodells eine besondere Beachtung.

---

<sup>1</sup> Werden Personen- oder Berufsbezeichnungen in dieser Arbeit aus Gründen der besseren Lesbarkeit lediglich in der männlichen oder weiblichen Form verwendet, so schließt dies das jeweils andere Geschlecht mit ein.

## 2.4.2 Numerische Simulationsverfahren

### 2.4.2.1 Mehrkörpersysteme

Mehrkörpersysteme (MKS) bilden die reale Maschine in der Regel mit starren, d. h. in sich nicht verformbaren Einzelkörpern, ab. Diese sind in der Lage, große, nichtlineare translatorische und rotatorische Bewegungen durchzuführen und werden durch masselose Verbindungen, die an diskreten Punkten der Körper angreifen, in ihren Freiheitsgraden eingeschränkt. Die Koppelglieder können dabei unterschiedlichste Eigenschaften annehmen, angefangen von einfachen Feder-Dämpfer-Elementen bis zu aktiven Kraftelementen mit einstellbarer Kraft-Weg-Charakteristik. Für die mathematische Formulierung der Bewegungsgleichungen werden verschiedene Koordinatensysteme verwendet. Die Angabe der Körperschwerpunkte, der Trägheitstensoren und der Bindungsknoten erfolgt jeweils in körperfesten Koordinatensystemen. Die Absolutbewegungen der Körper im Raum werden entweder durch absolute Koordinaten im Inertialsystem oder durch Relativkoordinaten zwischen den mit Gelenken verbundenen Körpern beschrieben (SCHWERTASSEK & WALLRAPP 1999). Da die Körper eines starren MKS keine Verformungsfreiheitsgrade besitzen, sind die resultierenden Gleichungssysteme zur Beschreibung des Modellverhaltens überschaubar und numerisch effizient lösbar.

Nach dem Lösen der Bewegungsgleichungen können zeitliche Verläufe der Positionen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Strukturpunkte sowie die Veränderungen von Gelenkkräften und -momenten analysiert werden. Mit der Möglichkeit, große nichtlineare Bewegungen zu beschreiben, sind MKS für Untersuchungen des kinematischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen geeignet. Als Anwendungsgebiete lassen sich Maschinen mit komplexen Bewegungsabläufen, wie beispielsweise Umformmaschinen mit Gelenkantrieb oder Werkzeugmaschinen mit Parallelkinematiken, nennen (HOFFMANN 2008).

Die Genauigkeit von spanenden Werkzeugmaschinen wird maßgeblich von den strukturmechanischen Eigenschaften der Gestellstrukturen bestimmt. Aus diesem Grund ist die Berücksichtigung der Nachgiebigkeiten der einzelnen Komponenten nötig, welche durch starre MKS alleine nicht darstellbar sind. Da der Fokus der vorliegenden Arbeit auf der simulativen Unterstützung für die strukturelle Betrachtung im Entwicklungsprozess liegt, wird an dieser Stelle nicht näher auf Mehrkörpersysteme eingegangen.

### 2.4.2.2 Finite-Elemente-Methode

Die Finite-Elemente-Methode hat sich mittlerweile für die Berechnung des mechanischen Verhaltens von Komponenten oder ganzen Maschinensystemen in der Praxis durchgesetzt (WECK & BRECHER 2006a). Die Schwerpunkte

der Anwendung liegen dabei auf der Untersuchung von Strukturverformungen und dadurch hervorgerufenen Spannungszuständen innerhalb der Bauteile oder Systeme, welche definierten statischen oder dynamischen Belastungen ausgesetzt sind (SCHNEIDER 2000). Darüber hinaus besteht die Möglichkeit, das FEM-Modell mit einem Prozessmodell oder dem Modell der elektromechanischen Antriebe zu koppeln (vgl. Abschnitt 2.5).

Die Grundidee der FEM besteht darin, die kontinuierliche Struktur in eine hohe, aber endliche Anzahl von „finiten“ Elementen zu überführen und so zu einer diskreten Darstellung zu gelangen. An den Rändern bzw. Ecken der einzelnen Elemente befinden sich Knotenpunkte, über die die Elemente miteinander verbunden sind und so das sog. FE-Netz bilden. Auf diese Weise können die Bewegungen und Verformungen der Struktur über die Verschiebungen der Knoten beschrieben werden. Die Größe der Elemente bestimmt den Diskretisierungsgrad und damit die Qualität der Näherungslösung. Gleichzeitig wird dadurch aber auch die Zahl der Freiheitsgrade und die Größe des entstehenden Gleichungssystems festgelegt. Die Materialparameter wie der Elastizitätmodul, die Dichte und die Querkontraktionszahl liefern zusammen mit den Knotenkoordinaten die Elementsteifigkeits- und -massenmatrizen, welche zu den Koeffizientenmatrizen der Bewegungsgleichungen der Gesamtstruktur zusammengesetzt werden. Diese liegen nach der Diskretisierung als gewöhnliches Differenzialgleichungssystem vor (BATHE 2001).

Da aufgrund der Diskretisierung der Struktur die Anzahl der Freiheitsgrade im Vergleich zu einem Mehrkörpersystem um ein Vielfaches überschritten wird, werden FEM-Modelle in der Regel in stationären Betriebspunkten berechnet. Bezogen auf Werkzeugmaschinenmodelle bedeutet dies die Analyse in einer definierten Achsstellung, in der vereinfachend von einem linearen Systemverhalten ausgegangen wird. Lineare FEM-Modelle sind in der Lage, kleine Verschiebungen, wie sie bei Schwingungen von Maschinensystemen auftreten, zu beschreiben. Große plastische Verformungen werden durch diesen Ansatz nicht berücksichtigt. Es ist aber festzuhalten, dass Starrkörperbewegungen, die bei statisch unterbestimmten Strukturen auftreten, in der linearen Lösung des dynamischen Systems enthalten sind (OERTLI 2008). Dies ist eine wichtige Voraussetzung für die Simulation der Achsbewegungen von Vorschubsschlitten, sofern diese in ihren Freiheitsgraden ungefesselt modelliert sind.

Die hohe Anzahl an Freiheitsgraden führt unvermeidbar zu hochdimensionalen Gleichungssystemen, was eine direkte Berechnung des resultierenden Gleichungssystems im Zeitbereich verhindert. Aus diesem Grund werden bei der strukturmechanischen Auslegung von Werkzeugmaschinen im Allgemeinen die Eigenfrequenzen und deren zugehörige Schwingungsformen (Moden) herangezogen (vgl. Abschnitt 2.4.3).

### 2.4.2.3 Elastische Mehrkörpersysteme

Eine Kombination aus starren Mehrkörpersystemen und Finite-Elemente-Modellen stellen die sog. elastischen oder flexiblen Mehrkörpersysteme dar. Durch die Integration von FEM-Strukturen in das Mehrkörpersystem lassen sich die elastischen Verformungen der flexiblen Körper mit den Starrkörperbewegungen überlagern, wodurch eine umfassende Beschreibung des dynamischen Verhaltens von Maschinen ermöglicht wird.

Für die direkte Einbindung der flexiblen Strukturkomponenten in das Mehrkörpersystem wurde die Methode des bewegten Bezugssystems eingeführt. Die Knotenverschiebungen werden hierfür in kartesischen Koordinaten relativ zum Bezugssystem beschrieben (SCHWERTASSEK & WALLRAPP 1999). Dabei werden die Bewegungsgleichungen des MKS um die Einträge der Massen-, der Steifigkeit- und, falls vorhanden, der Dämpfungsmaatrix der flexiblen Struktur ergänzt. Die Formulierung der elastischen Struktur erlaubt nach der Theorie der FEM nur die Abbildung kleiner linearer Verformungen, da die Massenmatrix lediglich für einen bestimmten Ausgangszustand gültig ist. Um auch große Bewegungen der elastischen Strukturen in hybriden Mehrkörpersystemen zu ermöglichen, entwickelten SHABANA & CHRISTENSEN (1997) eine Formulierung auf Basis absoluter Knotenkoordinaten, welche die Knotenverschiebungen und -verdrehungen direkt im Inertialsystem definiert. Die resultierenden Elementformulierungen erlauben damit die Beschreibung nichtlinearer elastischer Verformungen. Um die Recheneffizienz bei Betrachtung großer Bewegungen flexibler Strukturen in Mehrkörpersystemen weiter zu erhöhen, erweiterten CHOI ET AL. (2006) den oben dargestellten Ansatz. Der Kern ihrer neuen Methode ist die Beschreibung der Knotenverschiebungen jeweils relativ zu den benachbarten Koordinaten, womit auch die Berechnung von MKS mit vielen nodalen, d. h. den vollständigen FE-Freiheitsgraden der jeweiligen Strukturkomponente, ermöglicht wird.

Der Vorteil der direkten Einbindung elastischer Komponenten ist neben den großen darstellbaren Verformungen darin zu sehen, dass alle Knotenfreiheitsgrade des Finite-Elemente-Netzes ansprechbar sind. Damit besitzt diese Methode prinzipiell das Potenzial, große Führungsbewegungen in Werkzeugmaschinenstrukturen zu simulieren. Hierbei liegt allerdings die Herausforderung in der korrekten Abbildung der wechselnden Kontaktbedingungen während des Verfahrens (SIEDL 2008). Darüber hinaus bleibt die sehr hohe Rechendauer bestehen, da das resultierende Gleichungssystem für alle nodalen Freiheitsgrade im Zeitbereich gelöst werden muss, weshalb dieser Ansatz für die Simulation komplexer Werkzeugmaschinenstrukturen i. d. R. nicht praktikabel ist.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass die elastischen Mehrkörpersysteme bei direkter Einbindung der flexiblen Strukturkomponenten die vollständigste Beschreibungsform für das dynamische Verhalten von Werkzeugmaschinen darstellen. Die zum Teil inakzeptablen Berechnungszeiten sind aber bis heute ein Hemmnis für den industriellen Einsatz, weshalb sich der Einsatz der flexiblen Mehrkörpersysteme für die Simulation von Werkzeugmaschinen noch weitgehend auf den akademischen Bereich beschränkt.

### 2.4.3 Strukturmechanische Berechnung

Die Verwendung von FEM-Modellen stellt seit Jahren ein Standardverfahren im allgemeinen Maschinenbau zur strukturmechanischen Berechnung für die Konstruktion dar und hat sich auch zur Analyse des statischen und dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinenstrukturen in der Praxis etabliert (KLEIN 2007, WITT 2007). Aufgrund der kleinen auftretenden Schwingungen ist die linearisierte Darstellung der Bewegungen um einen Betriebspunkt zur Beurteilung des Maschinenentwurfs gerechtfertigt (OERTLI 2008). Im Folgenden werden daher die Grundlagen zur strukturmechanischen Berechnung, auf die auch im weiteren Verlauf dieser Arbeit Bezug genommen wird, zusammenfassend dargestellt.

Als Ergebnis der FEM-Modellbildung liegen die Massen-, die Steifigkeits- und, falls berücksichtigt, die Dämpfungsmaatrix vor. Zusammen mit den auftretenden Kräften beschreiben diese das Systemverhalten und führen unter der Annahme eines linearen Verhaltens der Bewegungen zu einem Differenzialgleichungssystem zweiter Ordnung in der Form von Gleichung (2.3). Die Dimension und die Bandbreite der Systemmatrizen werden durch den Grad der Diskretisierung, die Art der verwendeten finiten Elemente sowie durch die Topologie der modellierten Struktur definiert. In der Regel entstehen durch die lineare FEM-Formulierung symmetrische, dünnbesetzte Matrizen mit Bandstrukturen (STEINKE 2010). Die Bandbreite bestimmt den Kopplungsgrad der Gleichungen und damit den Aufwand zum Lösen des Gleichungssystems. Um diesen Vorgang so effizient wie möglich zu gestalten, hat sich in der Strukturmechanik und für die Berechnung von Werkzeugmaschinen die sogenannte Modaltransformation etabliert (MILBERG 1995, GAWRONSKI 2004). Dabei wird der Übergang auf generalisierte Koordinaten vollzogen, wodurch eine Diagonalisierung der Matrizen und somit die vollständige Entkopplung des Gleichungssystems erreicht wird. Hierfür wird eine Transformationsmatrix  $\Phi$  gesucht, mit deren Hilfe die dynamischen Verschiebungen in generalisierten Koordinaten dargestellt werden können:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi \mathbf{q}(t). \quad (2.6)$$

Zur Berechnung der Transformationsmatrix  $\Phi$  wird die homogene Gleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (2.7)$$

des ungedämpften Systems aus Gleichung (2.3) betrachtet. Diesem Ansatz liegt die Annahme zu Grunde, dass sich die Dämpfungswirkung in Werkzeugmaschinen gleichmäßig verteilt und sich linear proportional zur Massen- und zur Steifigkeitsmatrix verhält. Für diesen Fall stimmen die Eigenschwingungsformen des gedämpften und des ungedämpften Systems überein, weshalb die Dämpfungsmaatrix  $\mathbf{D}$  zunächst vernachlässigbar ist.

Für die Lösung des ungedämpften Differenzialgleichungssystems (2.7) wird der harmonische Ansatz herangezogen, wobei die Sinus-Funktion gewählt wird, da die Verschiebungen zu Beginn Null sind:

$$\mathbf{x}(t) = \phi \cdot \sin(\omega t). \quad (2.8)$$

Das Einsetzen von Gleichung (2.8) und von deren zeitlichen Ableitungen in das homogene Differenzialgleichungssystem (2.7) führt zum verallgemeinerten Eigenwertproblem

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M})\phi_i = \mathbf{0}, \quad (2.9)$$

dessen nicht-triviale Lösungen durch die Eigenwerte  $\omega_i^2$  gegeben sind, wenn die Bedingung

$$\det(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (2.10)$$

gilt. Auf diese Weise ergeben sich  $n$  reelle Eigenwerte  $\omega_i^2$ , wobei  $n$  die Anzahl der aus dem FEM-Modell resultierenden Freiheitsgrade darstellt und  $\omega_i$  die  $i$ -te Eigenkreisfrequenz genannt wird. Das Einsetzen der Werte  $\omega_i$  in Gleichung (2.9) liefert zu jedem Eigenwert  $\omega_i^2$  den dazugehörigen reellen Eigenvektor  $\phi_i$ , der auch die  $i$ -te Eigenmode oder Eigenschwingungsform genannt wird. Um das Gleichungssystem (2.7) entkoppeln zu können, ist die Orthogonalität der Eigenvektoren  $\phi_i$  eine wichtige Voraussetzung. Für die Modaltransformation wird in der Regel die Massen-Orthonormalität als Normierungsvorschrift befolgt, sodass  $\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i = 1$  gilt. Die generalisierten Verschiebungen  $\mathbf{q}(t) = \Phi^T \mathbf{x}(t)$  beschreiben demnach die Bewegungen von Einheitsmassen. (GAWRONSKI 2004)

Zur Vereinfachung können die Eigenvektoren  $\phi_i$  spaltenweise zur Eigenvektormatrix

$$\Phi = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_n] \quad (2.11)$$

und die Eigenwerte  $\omega_i^2$  in der diagonalen Eigenwertmatrix

$$\boldsymbol{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \omega_1^2 < \omega_2^2 < \dots < \omega_n^2 \quad (2.12)$$

zusammengefasst werden.

Die Lösung des Eigenwertproblems (2.9) lautet damit:

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Omega}^2 = \mathbf{0}. \quad (2.13)$$

Eine linksseitige Erweiterung dieser Gleichung mit der Matrix  $\boldsymbol{\Phi}$  zeigt auf, dass auf Grund der Massen-Orthonormalität das Gleichungssystem diagonalisierbar ist und somit entkoppelt werden kann:

$$\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Omega}^2. \quad (2.14)$$

Damit beschreibt jede der Eigenlösungen eine Schwingungsform der Struktur. Aus diesem Grund wird die Matrix  $\boldsymbol{\Phi}$  auch Modalmatrix und die Transformation (2.6) als Modaltransformation bezeichnet. Die Knotenverschiebungen  $\boldsymbol{x}$  können somit durch eine Linearkombination der Eigenvektoren  $\boldsymbol{\phi}_i$  mit den generalisierten Verschiebungen  $\boldsymbol{q}$  ausgedrückt werden. Die Werte der Vektoren  $\boldsymbol{\phi}_i$  entsprechen dabei den normierten Verschiebungen jedes einzelnen Freiheitsgrades der FEM-Struktur und stellen die Schwingungsform einer Mode mit der zugehörigen Eigenkreisfrequenz  $\omega_i$  dar.

Die Anwendung der Modaltransformation (2.6) auf das ursprüngliche, gekoppelte Differenzialgleichungssystem (2.3) führt nach einer linksseitigen Erweiterung mit  $\boldsymbol{\Phi}^T$  zu der entkoppelten Beschreibung in den modalen Koordinaten  $\boldsymbol{q}(t)$ :

$$\tilde{\boldsymbol{M}}\ddot{\boldsymbol{q}}(t) + \tilde{\boldsymbol{D}}\dot{\boldsymbol{q}}(t) + \tilde{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{q}(t) = \tilde{\boldsymbol{F}}(t) \quad (2.15)$$

mit

$$\tilde{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I}, \quad \tilde{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{\Phi}, \quad \tilde{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Omega}^2, \quad \tilde{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{F}.$$

$\tilde{\boldsymbol{M}}$ ,  $\tilde{\boldsymbol{D}}$  und  $\tilde{\boldsymbol{K}}$  werden dabei als die modale Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix bezeichnet. Aufgrund der Normierungsvorschrift ist die modale Massenmatrix  $\tilde{\boldsymbol{M}} = \mathbf{I}$  eine Einheitsmatrix und die modale Steifigkeitsmatrix  $\tilde{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{\Omega}^2$  entspricht der Eigenwertmatrix aus Gleichung (2.12), wodurch das ungedämpfte Gleichungssystem diagonalisiert und vollständig entkoppelt ist. Die Diagonalisierung der Dämpfungsmaatrix  $\boldsymbol{D}$  gelingt hingegen nur für den

Sonderfall einer zur Massen- und Steifigkeitsmatrix proportionalen Dämpfung (siehe Abschnitt 2.4.4).

#### 2.4.4 Berücksichtigung des Dämpfungsverhaltens

Das Dämpfungsverhalten von Werkzeugmaschinen spielt in der dynamischen Untersuchung von Werkzeugmaschinen eine große Rolle, da Dämpfungseffekte neben dem Ein- bzw. Ausschwingverhalten auch die Amplituden der Schwingungen sowie das Stabilitätsverhalten unmittelbar beeinflussen. Die Vielzahl von Einflussgrößen erschwert dabei die Bestimmung der physikalischen Dämpfungsparameter, da diese häufig gekoppelt wirken. Für die Berechnung des dynamischen Verhaltens stellt die Berücksichtigung der Dämpfung daher eine besondere Herausforderung dar.

Die in mechanischen Strukturen auftretenden Dämpfungskräfte können nach KLEIN (2007) in drei Kategorien unterteilt werden:

- Struktur- oder Hysteresekräfte:  
Diese Kräfte werden durch die Massenverteilung in der Struktur bestimmt und resultieren aus der inneren Materialreibung. Die Materialdämpfung kommt insbesondere bei den Biege- und Torsionsmoden zum Tragen, wenn die Maschinenkomponenten kleinen Verformungen unterliegen (WECK & BRECHER 2006a).
- Coulomb´sche Reibung:  
Die Reibungskräfte entstehen an den Koppel- und Verbindungsstellen wie bspw. in Verschraubungen und Führungen, wenn kleine Relativbewegungen auftreten. Diese führen auch bei Starrkörper- und Verfahrbewegungen zu einer dämpfenden Wirkung und haben bei Werkzeugmaschinen eine größere Bedeutung als die Strukturdämpfung (WECK & BRECHER 2006a).
- Viskose Dämpfung:  
Diese Kräfte können durch örtlich wirkende und ggf. nachträglich angebrachte visko-elastische Elemente hervorgerufen werden. An Werkzeugmaschinen kommen hierfür bspw. Tilger sowie aktive oder passive Dämpfersysteme zum Einsatz. Diese können entweder auf bestimmte Betriebsfrequenzen abgestimmt sein oder durch eine intelligente Regelung auch größere Frequenzbänder bedämpfen.

Bild 2.7 stellt die genannten Dämpfungsarten und deren Berücksichtigung in einer beispielhaften FEM-Modellstruktur dar. Die Strukturdämpfung wird dabei den Materialeigenschaften der finiten Elemente zugewiesen. Dadurch wirken diese Dämpfungskräfte gleichmäßig in der gesamten Struktur. Für die Fügestellendämpfung müssen diskrete Kontaktlemente mit definierten, z. T.

nichtlinearen Reibungs- bzw. Dämpfungseigenschaften zwischen den Fügepartnern berücksichtigt werden. Im Sinne einer möglichst einfachen Handhabung der Reibungsdämpfung wird diese meist über linearisierte Ersatzmodelle der viskosen Dämpfungsmaßmatrix zugeordnet (KLEIN 2007). Darüber hinaus können viskose Dämpferelemente modelliert werden, aus denen die Dämpfungskräfte geschwindigkeitsproportional hervorgehen.

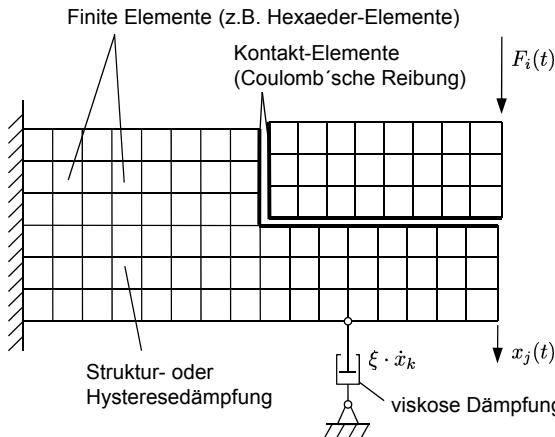


Bild 2.7: Dämpfungsmechanismen in FEM-Modellen (nach KLEIN 2007)

Beim Aufstellen der Systemmatrizen werden die Dämpfungsanteile ebenso wie die Massen- und die Steifigkeitsmatrix basierend auf den elementweisen Beiträgen zusammengesetzt. Die viskosen Dämpfungsanteile werden in der viskosen Dämpfungsmaßmatrix  $\mathbf{D}$  zusammengefasst. Sie sind geschwindigkeitsproportional und demnach auch proportional zur Anregungsfrequenz. Die Anteile der Strukturdämpfung hingegen gehen als komplexe Anteile  $\imath\mathbf{C}$  in die Steifigkeitsmatrix ein und wirken proportional zur Verlagerung, sind dabei aber frequenzinvariant (KIRCHKNOPF 1989, PIETRZKO 1992, WITT 2007). Daraus folgt die Bewegungsgleichung eines viskos und strukturell gedämpften Systems:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) + [\mathbf{K} + \imath\mathbf{C}]\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t). \quad (2.16)$$

Gleichung (2.16) enthält physikalisch gesehen eine unzulässige Mischung aus Zeit- und Frequenzoperationen, weshalb die strukturelle Dämpfung ausschließlich für Untersuchungen im Frequenzbereich anwendbar ist. Die Eigenlösungen von Gleichung (2.16) sind auf Grund der komplexen Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K} + \imath\mathbf{C}$  ebenfalls komplex, was auch die physikalische Interpretation der Eigen schwingungsvektoren schwierig macht (PIETRZKO 1992). Die Schwierigkeiten

bei der transienten Analyse strukturell gedämpfter Systeme wurden bereits von CRANDALL (1970) diskutiert. Er verdeutlichte den Verlust der Kausalität zwischen Anregung und Antwort eines strukturell gedämpften Systems bei Impulsanregung.

Gleichzeitig postulierte CRANDALL (1970) aber auch eine ausreichend hohe Genauigkeit der viskosen Dämpfungsmatrix zur Modellierung des Dämpfungsverhaltens bei schwach gedämpften Systemen. Werkzeugmaschinen sind typischerweise schwach gedämpfte Systeme (TÖNSHOFF 1995), weshalb für die Modellierung von Werkzeugmaschinen mit Hilfe der FEM i. d. R. auf Strukturdämpfung verzichtet und der viskose Dämpfungsansatz herangezogen wird. Dieser hat den Vorteil, dass er aufgrund seiner geschlossenen mathematischen Form sowohl für Analysen im Zeit- als auch im Frequenzbereich angewendet werden kann. Darüber hinaus ist das viskose Dämpfungsmodell physikalisch einfach interpretierbar (PIETRZKO 1992).

Geht man nun vom viskos gedämpften System zweiter Ordnung der Form (2.3) aus, in welchem die symmetrische Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}$  beliebig aus Einzelementen zusammengesetzt ist, so ist diese nicht mit Hilfe der reellen Modalmatrix  $\Phi$  diagonalisierbar (GROSSMANN & RUDOLPH 2008). Um das Gleichungssystem dennoch entkoppeln zu können, muss das quadratische Eigenwertproblem der homogenen Differenzialgleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

gelöst werden. Das Einsetzen des harmonischen Ansatzes  $\mathbf{x} = e^{\lambda_i t} \psi_i$ , dargestellt im Frequenzbereich, führt auf das quadratische Eigenwertproblem:

$$(\lambda_i^2 \mathbf{M} + \lambda_i \mathbf{D} + \mathbf{K}) \cdot \psi_i = \mathbf{0}. \quad (2.18)$$

Dieses besitzt für den oben angenommenen Fall symmetrischer Koeffizientenmatrizen  $2n$  paarweise komplexe konjugierte Eigenwerte  $\lambda_i$ . Der resultierende Rechtseigenvektor  $\psi_i$  zu  $\lambda_i$  stellt dann auch gleichzeitig einen Linkseigenvektor  $\bar{\psi}_i$  zum konjugiert komplexen Eigenwert  $\bar{\lambda}_i$  dar (TISSEUR & MEERBERGEN 2001):

$$\bar{\psi}_i \cdot (\bar{\lambda}_i^2 \mathbf{M} + \bar{\lambda}_i \mathbf{D} + \mathbf{K}) = \mathbf{0}. \quad (2.19)$$

Die aus Gleichung (2.18) resultierenden Eigenwerte  $\lambda_i$  lassen sich weiter in den Abklingkoeffizienten  $\delta_i$  (Realteil) und die Eigenfrequenz des gedämpften Systems  $\omega_{D,i}$  (Imaginärteil) unterteilen:

$$\lambda_i = \delta_i \pm \imath \omega_{D,i}. \quad (2.20)$$

Dabei gilt der Zusammenhang, dass sich die  $i$ -te Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems  $\omega_i$  aus dem Abklingkoeffizienten und der Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems bestimmen lässt:

$$\omega_i = \sqrt{\delta_i^2 + \omega_{D,i}^2}. \quad (2.21)$$

Die Eigenvektoren aus Gleichung (2.19) sind hierbei ebenfalls komplex, d. h. der Linkseigenvektor ist zum jeweiligen Rechtseigenvektor komplex konjugiert. Diese können analog zum reellen Eigenwertproblem zu einer komplexen Modalmatrix zusammengesetzt werden, mit der dann das gedämpfte Gleichungssystem entkoppelt werden kann. An dieser Stelle soll nicht näher auf die exakte Lösung des quadratischen Eigenwertproblems eingegangen werden, hierzu sei auf weiterführende Literatur (z. B. KIRCHKNOPF 1989, PIETRZKO 1992, TISSEUR & MEERBERGEN 2001) verwiesen.

Unter numerischen Gesichtspunkten betrachtet ist die Berechnung des quadratischen Eigenwertproblems deutlich aufwendiger und zeitintensiver als die Lösung des reellen Eigenwertproblems ungedämpfter Systeme. Hinzu kommt, dass hierfür eine detaillierte Modellierung lokaler Dämpfungseffekte im Strukturmodell nötig ist. Während die Massen- und die Steifigkeitsmatrix schon mit derzeit verfügbaren Methoden mit guter Genauigkeit in einem FEM-Modell abgebildet werden können, ist die Vorhersage der auftretenden Dämpfungseffekte und ihrer Verteilung in der Struktur nach wie vor kaum möglich (FRISWELL & MOTTERSHEAD 1995, NEBELING 1999, WITT 2007).

In der praktischen Anwendung werden aus diesem Grund nach der Lösung des reellen Eigenwertproblems (2.9) häufig die sogenannten modalen Dämpfungsmaße herangezogen. Dieser Ansatz geht von der Annahme aus, dass jede Eigenmode für sich gedämpft wird, wobei eine Kopplung zwischen den Eigenfrequenzen infolge der Dämpfungseffekte vernachlässigt wird. Für den Sonderfall einer zur Massen- und zur Steifigkeitsmatrix proportionalen Dämpfungsmaß gelingt die Diagonalisierung dieser Matrix mit Hilfe der Eigenvektoren  $\phi_i$ . Somit gilt

$$\phi_i^T \cdot D \cdot \phi_j = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 2\omega_i D_{L,i} & \text{für } i = j \end{cases} \quad (2.22)$$

mit der  $i$ - bzw.  $j$ -ten Eigenmode, der Eigenkreisfrequenz  $\omega_i$  und dem Lehr'schen Dämpfungsmaß  $D_{L,i}$  der  $i$ -ten Eigenfrequenz des ungedämpften Systems. Die Werte für die Lehr'schen Dämpfungsmaße  $D_{L,i}$  sind bei entsprechender Erfahrung entweder aus anderen Anwendungsfällen abzuleiten (z. B. aus vorangegangenen experimentellen Modalanalysen) oder müssen geschätzt werden. Nach ALBERTZ (1995) liegen die Lehr'schen Dämpfungen der einzelnen Eigenformen

in einem sehr kleinen Bereich zwischen 1% und 3,5%. Dabei ist zudem eine Abhängigkeit von der Schwingungsform vorhanden. Tendenziell weisen Moden mit hohen Verformungen in Fügestellen ein höheres Dämpfungsmaß als Biege- und Torsionsmoden der Strukturkomponenten auf. Um die Lehr'schen Dämpfungen der einzelnen Eigenformen in den entkoppelten Bewegungsgleichungen (2.15) berücksichtigen zu können, wird die Lehr'sche Dämpfungsmaatrix der Form

$$\mathbf{D}_L = \text{diag}(D_{L,i}) \quad (2.23)$$

aufgestellt. Damit lässt sich die für die modale Darstellung der Bewegungsgleichungen geforderte Diagonalform der Dämpfungsmaatrix  $\tilde{\mathbf{D}}$  herbeiführen:

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{D} \mathbf{\Phi} = 2\mathbf{\Omega} \mathbf{D}_L = \text{diag}(2\omega_i D_{L,i}). \quad (2.24)$$

Der Vorteil des modalen Dämpfungsansatzes ist, dass für jede Mode ein entsprechendes Dämpfungsmaß bestimmt werden kann und höherfrequente Moden, welche einen geringeren Energieinhalt besitzen, ebenfalls prozentual bedämpft werden. Als Nachteil ist aber zu nennen, dass für die modale Beschreibung die Eigenwerte und -vektoren vorliegen müssen, was die numerisch aufwendige Lösung des Eigenwertproblems voraussetzt.

Eine andere Möglichkeit zur Modellierung des Dämpfungsmaßes komplexer Strukturen ist die Verwendung eines proportionalen Dämpfungsansatzes. Dieser wurde von CAUGHEY & O'KELLY (1965) allgemein als Reihenentwicklung formuliert:

$$\mathbf{D} = \mathbf{M} \cdot \sum_{k=0}^{r-1} a_k (\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{K})^k. \quad (2.25)$$

Da die Matrix  $\mathbf{D}$  für  $r > 2$  eine vollbesetzte Matrix ohne Bandstruktur ist, welche das Lösen des resultierenden Gleichungssystems um ein Vielfaches aufwendiger gestalten würde, hat sich in der Praxis die sog. Rayleigh-Dämpfung mit  $r = 2$  als Sonderfall von (2.25) etabliert (BATHE 2001). Hierbei handelt es sich um einen globalen Ansatz, der die durch Dämpfungseffekte dissipierte Energie näherungsweise beschreibt. In diesem Fall ergibt sich die Dämpfungsmaatrix aus der Linearkombination

$$\mathbf{D} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (2.26)$$

der Massen- und der Steifigkeitsmaatrix, wobei  $a_0 = \alpha$  und  $a_1 = \beta$  gilt. Die Koefizienten  $\alpha$  und  $\beta$ , die keine physikalische Bedeutung besitzen, können bspw. aus zwei bekannten modalen Dämpfungsmaßen bestimmt werden (OERTLI 2008). Sind solche nicht vorhanden, müssen Erfahrungswerte über das Dämpfungsverhalten ähnlicher Strukturen herangezogen werden, d. h. es werden exakt oder annähernd die gleichen Faktoren wie zur Berechnung einer ähnlichen bekannten

Struktur verwendet (BATHE 2001).

Ein Vorteil des Rayleigh-Dämpfungsansatzes ist, dass die Dämpfungsmatrix mit Hilfe der Modalmatrix  $\Phi$  diagonalisiert werden kann. Dies führt auf die Gleichung

$$\tilde{D} = \Phi^T (\alpha M + \beta K) \Phi = \alpha I + \beta \Omega^2 = \text{diag}(d_i), \quad (2.27)$$

wobei  $d_i = \alpha + \beta \omega_i^2$  gilt. Auch für den Fall einer proportionalen Dämpfung kann durch Gleichsetzen von (2.24) und (2.27) das  $i$ -te Lehr'sche Dämpfungsmaß  $D_{L,i}$  berechnet werden:

$$\alpha + \beta \omega_i^2 = 2\omega_i D_{L,i} \Rightarrow D_{L,i} = \alpha \cdot \frac{1}{2\omega_i} + \beta \cdot \frac{\omega_i}{2}, \quad \text{für } i = 1, \dots, n. \quad (2.28)$$

Der proportionale Ansatz hat darüber hinaus den weiteren Vorteil, dass für die Definition der Dämpfungsmatrix die Lösung des Eigenwertproblems prinzipiell nicht nötig ist, sofern die Linearfaktoren  $\alpha$  und  $\beta$  aus ähnlichen Strukturen vorliegen. Als Nachteil bleibt allerdings festzuhalten, dass mit zwei Linearfaktoren auch nur zwei Eigenmoden betragsmäßig exakt bedämpft werden können, wie dies beim modalen Dämpfungsansatz möglich ist. Hinzu kommt, dass die höherfrequenten Moden viel stärker bedämpft werden als die niederfrequenten, für die die Linearfaktoren bestimmt worden sind (BATHE 2001).

Zusammenfassend bleibt festzuhalten, dass es sich bei den genannten Ansätzen nur um Näherungslösungen handelt, da sich die Abschätzung der realen Dämpfungswerte als äußerst schwierig gestaltet und noch immer Gegenstand der Forschung ist (GROSSMANN ET AL. 2010). Im Kontext der vorliegenden Arbeit, welche sich mit Ordnungsreduktionsverfahren großer Gleichungssysteme beschäftigt, gerät der modale Dämpfungsansatz in den Hintergrund, da hierfür stets die aufwendige Berechnung der Eigenfrequenzen nötig ist. Um den Einfluss der Dämpfung auf das dynamische Verhalten von Werkzeugmaschinen berücksichtigen zu können, wurde bei den für diese Arbeit verwendeten FEM-Modellen zunächst die Rayleigh-Dämpfung angewendet. In Abschnitt 4.5 wird zudem ein neues, auf Krylov-Unterräumen zweiter Ordnung basierendes Verfahren vorgestellt, welches auch in der Lage ist, Strukturmodelle von Werkzeugmaschinen zu reduzieren, die lokale viskose Dämpfungsanteile besitzen.

## 2.5 Simulation des mechatronischen Gesamtsystems

### 2.5.1 Überblick

Moderne Werkzeugmaschinen müssen hohe Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bei gleichzeitig ausreichender statischer und dynamischer Steifigkeit aufweisen. Dies erfordert geringe bewegte Massen und hoch eingestellte Reglerparameter, was im ungünstigen Fall, wenn sich die Eigenfrequenzen des elektrischen Antriebs und die unteren mechanischen Eigenfrequenzen gegenseitig beeinflussen, zu negativen Wechselwirkungen zwischen der Strukturmechanik und der Antriebsregelung führen kann. Zur Vermeidung von Instabilitäten müssen folglich die Reglerparameter entsprechend herabgesetzt werden, was die Bandbreite der Vorschubachsen beeinträchtigt. (HOFFMANN 2008)

Zur Berechnung des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen wird heute deshalb häufig die Simulation des mechatronischen Gesamtsystems herangezogen. Darunter wird die integrierte Maschinensimulation der Gestellstrukturen, der Antriebsmechanik sowie der zugehörigen Regelung verstanden. Das Ziel dieser Berechnungen ist es, die auftretenden Wechselwirkungen zwischen der Strukturmechanik und der Antriebsregelung zu analysieren und somit die Abstimmung der Teilsysteme hinsichtlich ihrer gegenseitigen Beeinflussung zu optimieren (ALTINTAS ET AL. 2005, WITT 2007, OERTLI 2008). Hierfür werden die Modelle der verschiedenen Teilsysteme in der Simulationsumgebung miteinander gekoppelt. Für die Modellierung der elektrischen Antriebe und der dazugehörigen Regelung wird häufig die Blockschaltbild-orientierte Simulation, auch Digitale Blocksimulation (DBS) genannt, angewendet, welche die Teilsysteme jeweils als in sich geschlossene Gleichungssysteme mit dem entsprechenden Übertragungsverhalten beschreibt. Die Kopplung der einzelnen Teilsysteme erfolgt durch die signaltechnische Verknüpfung der entsprechenden Ein- bzw. Ausgangsgrößen (z. B. Kraft, Moment, Weg, Geschwindigkeit etc.) und ergibt auf diese Weise das zu lösende Gleichungssystem des betrachteten Gesamtsystems. Bild 2.8 stellt das gekoppelte mechatronische Gesamtmodell einer Werkzeugmaschine schematisch dar.

Wie in Abschnitt 2.2.2 dargestellt, ist jede Maschinenstruktur als nachgiebiges System anzusehen, welches mit einer definierten Verlagerung auf äußere Kräfte reagiert. Diese Eigenschaft wird auch durch das aus der FEM resultierende Differenzialgleichungssystem zweiter Ordnung wiedergegeben. Folglich stellen die von den Antriebsmotoren produzierten Kräfte bzw. Momente die Eingangsgrößen für das Teilsystem der mechanischen Maschinenstruktur dar, welche entsprechend mit Verlagerungen reagiert, die ihrerseits als Eingangsgrößen für

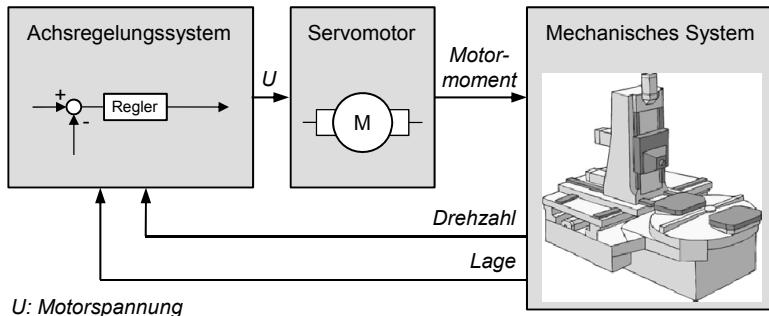


Bild 2.8: Signaltechnische Verknüpfung der einzelnen Teilsysteme zum gekoppelten mechatronischen Gesamtmodell

das Modell der Reglerstruktur dienen. Auf diese Weise wird der Signalfluss vervollständigt, wodurch sich eine geschlossene Lösung für das Gleichungssystem des mechatronischen Gesamtsystems ergibt.

Für die Verwendung der Bewegungsgleichungen der FEM in der Mechatroniksimulation ist deren Transformation in ein Differenzialgleichungssystem erster Ordnung, die sog. Zustandsraumdarstellung, üblich:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}\quad (2.29)$$

In dieser Darstellung entspricht  $\mathbf{z}$  den Zuständen des Systems, d. h. den Positionen und Geschwindigkeiten. Das eigentliche Systemverhalten der Maschinenstruktur ist in der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  enthalten. Über die Eingangsmatrix  $\mathbf{B}$  können die Eingänge  $\mathbf{u}$  des Systems den jeweiligen Zuständen zugewiesen werden. In der Ausgangsmatrix  $\mathbf{C}$  werden die Systemausgänge definiert, welche aus den Systemzuständen berechnet werden können. Die Durchgangsmatrix  $\mathbf{D}$  beschreibt diejenigen Systemeingänge, welche direkt auf die Systemausgänge  $\mathbf{y}$  wirken, ohne in Wechselwirkung mit dem System zu stehen. Bei mechanischen Modellen ist  $\mathbf{D}$  i. d. R.  $\mathbf{0}$ , da die auf die Struktur wirkenden Kräfte stets eine entsprechende Reaktion hervorrufen. Hierbei ist zu beachten, dass die Zustandsraumdarstellung eine Linearisierung in einem bestimmten Arbeitspunkt darstellt. Dieser wird durch die im FEM-Modell abgebildeten Positionen der Schlitzen und Vorschubachsen festgelegt und in den Systemmatrizen beschrieben. Folglich können in der Simulation lediglich kleine Bewegungen durchgeführt werden, große Führungsbewegungen der Linearachsen sind mit dem beschriebenen Vorgehen nicht abbildung. Für die Regelungstechnische Analyse des mechatronischen Gesamtsystems ist die Betrachtung dieser kleinen Bewe-

gungen aber hinreichend, da bei im linearen Bereich arbeitenden Regelungen die Regeldifferenzen im Vergleich zu den Führungsbewegungen ohnehin klein sind (FÖLLINGER 1994). Darüber hinaus lassen sich die relevanten Leistungs- und Qualitätskennwerte einer Regelung durch Frequenzbereichsverfahren oder über das Antwortverhalten auf regelungstechnische Testfunktionen wie bspw. Sprungfunktionen ermitteln (GROSS ET AL. 2006). Zu diesen Kennwerten gehören u. a. die einstellbaren Reglerparameter, wie Verstärkungsfaktoren und Zeitkonstanten, und die damit erzielbaren Verhaltenskennwerte der Regelkreise, wie Regelabweichungen, Einschwingzeiten oder die Eckfrequenzen der regelbaren Bandweiten.

Um die erreichbare Leistungsfähigkeit einer Werkzeugmaschine, die aus dem dynamischen Zusammenwirken der regelungstechnischen, elektrischen und mechanischen Teilsysteme resultiert, auch im Modell möglichst realitätsnah abzubilden, ist die Qualität der Teilmodelle von essenzieller Bedeutung. Die FEM kommt dieser Forderung durch die feine Diskretisierung der mechanischen Struktur nach, erzeugt aber große Gleichungssysteme. Aus diesem Grund ist es nicht möglich, das vollständige, mit Hilfe der FEM generierte Gleichungssystem in die gekoppelte Simulation zu integrieren. In der Praxis werden deshalb heute geeignete Ordnungsreduktionsverfahren eingesetzt (siehe Abschnitt 3.8), welche in der Lage sind, die elastischen Verformungen der Strukturkomponenten wiederzugeben, gleichzeitig aber die Dimension des Gleichungssystems so stark zu reduzieren, so dass dieses effizient berechnet werden kann.

### 2.5.2 Simulation von Gestellstrukturen

Die Finite-Elemente-Methode wird schon seit vielen Jahren für die Simulation von Maschinengestellen verwendet. Durch die rasante Entwicklung von Berechnungshard- und -software fand die Simulation Einzug in die Entwicklungsphasen von Werkzeugmaschinen und stellt seitdem den Stand der Technik zur Lösungsfindung dar (SCHNEIDER 2000). Anfänglich war der Einsatz zunächst auf die Analyse des statischen Verformungsverhaltens beschränkt (NOPPEN 1973, HEIMANN 1977). Weiterführende Arbeiten beschäftigten sich mit der Modellfindung für Gesamtmaschinen (GROSSMANN 1976) und mit Kopplungsmethoden der mechanischen Maschinenkomponenten durch Feder- und Dämpferelemente (FINKE 1977). Die Kenntnis von Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften der Fügestellen und Verbindungselemente ist dabei stets von grundlegender Bedeutung für die Berechnung von Baugruppen. In Werkzeugmaschinen sind dies typischerweise Schraubverbindungen sowie gleit- oder wälzgelagerte Linearführungen, für die diverse Modelle und Berechnungsmethoden entwickelt wurden (u. a. PETUELLI 1983, SCHNEIDER 1991, ISPAYLAR 1997).

Eine der größten Herausforderungen bleibt bis heute die korrekte Bestimmung der Dämpfungsparameter, sowohl für die Struktur- als auch für die Verbindungselemente und Fügestellen. Sofern bereits ein Prototyp des simulierten Systems vorliegt, können die Dämpfungsparameter durch den Abgleich mit Messdaten ermittelt werden, indem das Systemverhalten des Modells iterativ an die experimentell ermittelten Parameter angepasst wird (NEBELING 1999). Für die entwicklungsbegleitende Simulation ist dieses Vorgehen in Ermangelung eines realen Prototyps aber nicht möglich. Hierfür wird meist das konservative System ohne Dämpfung modelliert, welchem nach dem Übergang in die modalen Koordinaten (siehe Abschnitt 2.4.3) ein globales Dämpfungsmaß (siehe Abschnitt 2.4.4) hinzugefügt wird. Für die Modellierung schwach gedämpfter Systeme, wie bspw. der Gestellstrukturen von Werkzeugmaschinen, hat sich dieser Ansatz bewährt (KIRCHKNOPF 1989, EUBERT 1992, ALBERTZ 1995, BERKEMER 2003, OERTLI 2008, SCHWARZ 2010). Es bleibt aber anzumerken, dass damit keinerlei Rückschlüsse auf die Entstehung von Dämpfungseffekten innerhalb der Maschinenstruktur möglich ist.

### 2.5.3 Simulation der Antriebskomponenten

Zur Beurteilung der dynamischen Leistungsfähigkeit einer Werkzeugmaschine mit Hilfe der Simulation ist eine genaue Abbildung der regelungstechnischen Eigenschaften der Vorschubantriebe erforderlich. Hierfür werden entsprechende Modelle der Antriebsstränge benötigt, welche das Übertragungsverhalten der Regelstrecke zwischen dem Motor und dem Messsystem hinreichend genau beschreiben. Diese ermöglichen die Auslegung der Antriebsstränge hinsichtlich deren statischer und dynamischer Steifigkeiten, um damit im Betrieb eine stabile und genaue Regelung der Vorschubachsen in einem möglichst großen Frequenzbereich zu gewährleisten (PRITSCHOW 1996).

Da die mechanischen Übertragungssysteme aufgrund ihrer Elastizitäten in den Verbindungselementen (z. B. Lager, Kupplungen, Riemen, Kugelgewindetriebe etc.) mehrere Eigenfrequenzen besitzen, müssen diese auch als Mehrmassensysteme modelliert werden (SUMMER 1986, LASCHET 1988). Um noch höherwertige Ergebnisse bezügl. der berechneten Eigenfrequenzen und Schwingungsformen, wie bspw. der Torsionsmoden der Gewindespindel, erzielen zu können, implementierten und erweiterten SIMON (1986) und EUBERT (1992) eine Elementbibliothek für Vorschubantriebe von Werkzeugmaschinen mit Kugelgewindetrieb auf Basis der FEM. Die Verwendung elastischer Balkenelemente zur Abbildung von Motorwelle und Gewindespindel (siehe Bild 2.9) wurde in mehreren Arbeiten aufgegriffen (u. a. WITT 2007, OERTLI 2008, SCHWARZ 2010) und stellt somit den Stand der Technik dar.

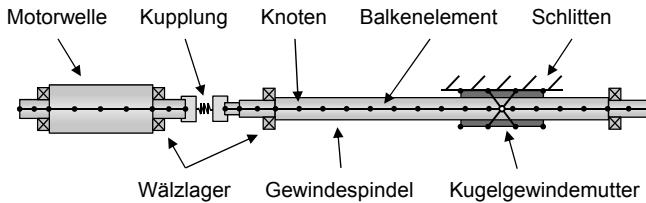


Bild 2.9: FEM-Modell eines Kugelgewindetriebes aus elastischen Balkenelementen (nach SIMON 1986 und EUBERT 1992)

Die Integration der Antriebe in das Strukturmodell des Maschinengestells erfolgt durch die Modellierung der Lager sowie der Kugelgewindemutter, welche die Bindeglieder der Komponenten einer Linearachse darstellen. Die Elemente Lager und Kupplung werden in der Regel als masselos angesehen und mit Feder- und Dämpferelementen modelliert. Die Kugelgewindemutter ist dagegen deutlich komplexer. Diese setzt die vom Motor erzeugte Rotation der Vorschubspindel in eine Translation der Mutter und des mit derselben verschraubten Schlittens um. In mehreren Arbeiten wurden hierfür Ersatzsteifigkeiten eingesetzt, welche die Axialsteifigkeit der Spindel-Mutter-Verbindung wiedergeben (z. B. EUBERT 1992, WEIKERT 2000, BÜRGEL 2001). Dagegen stellte OERTLI (2008) eine neue Elementformulierung zur Abbildung der elastischen und kinematischen Zusammenhänge zwischen der Gewindespindel und der -mutter auf. Die entwickelte Übertragungsmatrix kann über einfache Federelemente zwischen den Referenzknoten von Spindel und Mutter im FEM-Programm realisiert werden. Die Besonderheit besteht darin, dass sowohl die Axial- als auch die Radial- als auch die Kippsteifigkeiten der Gewindemutter wiedergegeben werden. Zudem werden durch zusätzliche Schraubsteifigkeiten die Verknüpfungen zwischen den Translations- und Rotationsfreiheitsgraden in bzw. um die Spindelachsrichtung hergestellt. Auf diese Weise findet keine mechanische Fesselung der Vorschubachsen statt, weshalb in den Lösungen der Bewegungsgleichungen Starrkörperbewegungen (von OERTLI (2008) auch als Mechanismenmoden bezeichnet) enthalten sind. Somit ist nach der Integration des Antriebsmodells in das mechatronische Gesamtmodell die Simulation kleiner Führungsbewegungen möglich, was eine wichtige Voraussetzung zur Abbildung der dynamischen Wechselwirkungen zwischen Antriebsstrang und Maschinengestell darstellt.

#### 2.5.4 Mechatronisches Gesamtmodell

Das mechatronische Gesamtmodell entsteht, wie bereits in Bild 2.8 schematisch dargestellt, durch die Kopplung des Zustandsraummodells der mechanischen

Struktur mit den Modellen der elektrischen Antriebe sowie den zugehörigen Regelungssystemen. Da die mechanischen Eigenschaften der Vorschubmotoren, die insbesondere durch die Trägheitsmomente der Rotorwellen bestimmt werden, bereits im strukturmechanischen Modell enthalten sind, wird im Gesamtmodell zusätzlich nur noch das elektrodynamische Verhalten abgebildet. Für die Regelung der Vorschubachsen von Werkzeugmaschinen kommt heute fast ausschließlich die sog. Kaskadenregelung zum Einsatz (WECK & BRECHER 2006b). Darunter wird ein Lageregelkreis mit unterlagertem Geschwindigkeits- und Stromregelkreis verstanden. Diese kaskadierte Struktur ist entsprechend die Basis für das Regelungsmodell. Eine detaillierte Beschreibung zur Modellierung der elektrischen Komponenten sowie der Regelung ist z. B. BERKEMER (2003) oder OERTLI (2008) zu entnehmen.

Mit einem gekoppelten mechatronischen Gesamtmodell sind Untersuchungen von Werkzeugmaschinen im Zeit- und im Frequenzbereich möglich, die die Optimierung der Reglerparameter oder die Analyse der Wechselwirkungen zwischen den Antrieben, der Regelung und der Strukturmechanik adressieren. Die auf den beschriebenen Grundlagen basierende Gesamtmaschinensimulation stellt heute den Stand der Technik dar und wird bei Werkzeugmaschinenherstellern bereits teilweise als entwicklungsbegleitendes Werkzeug eingesetzt (KEHL 2004). BERKEMER & KNORR (2002) verwendeten das beschriebene Vorgehen für die Reglerauslegung und Genauigkeitsbewertung von Werkzeugmaschinen mit Lineardirektantrieben. Um seinen neuen Modellierungsansatz für Kugelgewindetriebe zu validieren, setzte OERTLI (2008) die mechatronische Simulation an einem Bearbeitungszentrum ein und analysierte die Wechselwirkungen zwischen den Antriebssträngen und den Gestellstrukturen. Einen allgemeinen umfassenden Überblick über die mechatronische Simulation von Werkzeugmaschinen, unter anderem mit Hilfe der gekoppelten Simulation von FEM-Modellen und der Regelungsstrukturen, geben ALTINTAS ET AL. (2005).

Darüber hinaus gibt es weitere Arbeiten, in welchen ein derartiges mechatronisches Gesamtmodell für unterschiedliche Zielanwendungen zum Einsatz kommt. Allen ist jedoch gemeinsam, dass eine effiziente Berechnung im Zeitbereich nicht möglich ist, sofern das vollständige FEM-Strukturmodell herangezogen wird.

### 2.5.5 Gekoppelte Struktur-Prozess-Simulation

Eine weitere Möglichkeit der gekoppelten Simulation stellt die Berechnung der Struktur-Prozess-Wechselwirkungen in Werkzeugmaschinen dar. Wie in Abschnitt 2.2.3 beschrieben, gehören die auftretenden Kräfte eines Bearbeitungsprozesses zu den relevanten Beanspruchungen der Maschinenstruktur und

bilden, bei der regelungstechnischen Betrachtungsweise, eine Rückkopplung auf das nachgiebige System.

Für die gekoppelte Simulation des Betriebsverhaltens gilt es demnach geeignete Beschreibungsformen zur Abbildung des Bearbeitungsprozesses und der resultierenden Kräfte zu finden. Die Modellierung der Zerspankräfte steht bereits seit vielen Jahren im Mittelpunkt der Forschungstätigkeiten im Bereich der Fertigungstechnik und ist aufgrund der Vielfältigkeit der bestehenden Prozesse sowie aufgrund der Abhängigkeit von der Werkstoff-Schneidstoff-Kombination und der Schneidengeometrie noch immer Gegenstand der Forschung.

Für die gekoppelte Simulation müssen die Teilmodelle so miteinander verbunden werden, dass der Einfluss der Strukturverlagerung im Zerspankraftmodell Berücksichtigung findet und die berechneten Bearbeitungskräfte wiederum auf die Maschinenstruktur wirken können (Bild 2.3). Hierfür eignet sich, wie in Abschnitt 2.5 erläutert, die Zustandsraumdarstellung des Strukturmodells, weil somit die relevanten Ein- und Ausgangsgrößen auf die entsprechenden Freiheitsgrade wirken. Zur Modellierung der Kraft besteht einerseits die Möglichkeit, diese numerisch mit Hilfe der FEM zu bestimmen (z. B. SÖHNER 2003, HÖVEL 2008). Dies resultiert allerdings in einem erheblichen Rechenaufwand. Zum anderen können die Kräfte experimentell ermittelt und mit einem Maschinenmodell gekoppelt werden. Auf diese Weise sind Variationen der Prozessparameter stets mit weiteren Experimenten verbunden und das empirische Modell kann nicht dynamisch auf Schwingungserscheinungen des Strukturmodells reagieren. Deshalb eignet sich für die gekoppelte Struktur-Prozess-Simulation am besten eine analytische Beschreibung der Kräfte, welche häufig durch experimentell bestimmte Korrekturfaktoren unterstützt wird (z. B. KIENZLE & VICTOR 1957, TLUSTY & MACNEIL 1975, ALTINTAS 2000).

Mit diesen gekoppelten Modellen lassen sich z. B. Untersuchungen bezüglich der Prozessstabilität durchführen. Durch Parametervariation können stabile und instabile Bereiche identifiziert und sogenannte Stabilitätskarten berechnet werden (z. B. ALTINTAS & WECK 2004, FAASEN 2007, HENNINGER 2009). Dieser gekoppelte Simulationsansatz kann für verschiedene Bearbeitungsprozesse angewendet werden. In HENNINGER (2009) und KALVERAM (2005) werden Methoden zur Analyse der dynamischen Stabilität beim Fräsen vorgestellt. SCHWARZ (2010) entwickelte ein modulares Zerspankraftmodell zur Simulation der Wechselwirkungen während der Drehbearbeitung. Für Schleifprozesse wurde von AURICH ET AL. (2009) ein umfassender Überblick über potenzielle Modellierungsansätze zur Berechnung der Wechselwirkungen in Schleifmaschinen präsentiert.

Die genannten Arbeiten stellen nur einen kleinen Auszug aus diesem Bereich dar. Alle Ansätze haben allerdings die Gemeinsamkeit, dass für die korrekte Wiedergabe des Strukturverhaltens der Werkzeugmaschine ein möglichst genaues Modell benötigt wird. Deshalb wird hierfür, wie in Abschnitt 2.4.2 erläutert, meist auf detaillierte FEM-Modelle zurückgegriffen, die wiederum eine hohe Anzahl von Freiheitsgraden in das zu lösende Gleichungssystem einbringen.

### 2.6 Zusammenfassung

Um das Verhalten des komplexen Systems Werkzeugmaschine, welches durch die Interaktionen zwischen der Maschinenstruktur, den geregelten Antriebssystemen und den Zerspankräften während des Betriebes bestimmt wird, möglichst früh im Entwicklungsprozess vorhersagen und hinsichtlich der Lastenheftziele optimieren zu können, ist der Einsatz von Simulationsmethoden heute unumgänglich. Das Potenzial der Simulation kann dabei umso besser genutzt werden, je früher diese zur Anwendung kommt. Zur Unterstützung der Entwurfs- und Detaillierungsphasen im Entwicklungsprozess von Werkzeugmaschinen hat sich dabei insbesondere die FEM als Standardmethode durchgesetzt. Neben ihrem Einsatz zur Festigkeitsbestimmung oder zur Berechnung statischer und dynamischer Nachgiebigkeiten bietet die Verwendung von FEM-Modellen für die gekoppelte Simulation mit den elektromechanischen Antrieben große Potenziale zur Abschätzung der Leistungsfähigkeit des Systementwurfs. Ein Qualitätsmerkmal des FEM-Modells ist dabei der Grad der Diskretisierung der kontinuierlichen Struktur. Je feiner die Netzstruktur gewählt wird, desto größer ist die zu erwartende Approximationsgüte, was allerdings auch ein größeres zu lösendes Gleichungssystem hervorruft. Bei der Betrachtung ganzer Werkzeugmaschinenstrukturen können somit Modelle mit mehreren hunderttausend Freiheitsgraden oder mehr entstehen. Eine gekoppelte Simulation im Zeitbereich auf Basis dieser Modelle zusammen mit den Regelungstechnischen Komponenten ist auf gewöhnlichen Simulationsrechnern und unter industriellen Ansprüchen daher meist nicht durchführbar.

Eine Möglichkeit, die dazu führt, dass das gekoppelte System dennoch berechnet werden kann, ist der Einsatz von Modellordnungsreduktionsverfahren. Das Ziel dieser Verfahren ist es, ein System deutlich kleinerer Dimension zu finden, welches die Eigenschaften des Originalsystems bestmöglich approximiert und dabei selbst in einer akzeptablen Zeit berechnet werden kann. Im folgenden Kapitel werden daher diverse Möglichkeiten zur Ordnungsreduktion großer Gleichungssysteme behandelt.

## 3 Verfahren zur Modellordnungsreduktion

### 3.1 Inhalt des Kapitels

Im vorangegangenen Kapitel wurde die Notwendigkeit einer Ordnungsreduktion während des Einsatzes von Simulationsmethoden im Entwicklungsprozess von Werkzeugmaschinen erläutert. Daher folgt in diesem Kapitel eine Beschreibung verschiedener Verfahren zur Modellreduktion von großen Differenzialgleichungssystemen. Hierfür werden in Abschnitt 3.2 zunächst die relevanten Grundlagen der linearen Algebra sowie der Systemtheorie erläutert, welche als Hilfsmittel zur Beschreibung und zur Analyse von Differenzialgleichungen dienen.

Im Hauptteil des Kapitels wird in Abschnitt 3.3 zunächst eine allgemeine Einordnung der Modellreduktion in die Vorgehensabfolge während der Simulation gegeben. Aufgrund der Vielzahl von Reduktionsverfahren, welche in der Mathematik und in der Systemtheorie existieren bzw. Gegenstand der Forschung sind, wird in Abschnitt 3.4 eine Einschränkung hinsichtlich der in der vorliegenden Arbeit betrachteten Verfahren getroffen. Im Anschluss beschreibt Abschnitt 3.5 allgemein das Prinzip der Reduktion mit Hilfe einer Projektion, bevor in Abschnitt 3.6 unterschiedliche Ausprägungen der modalen Reduktion vorgestellt werden. Darauf folgt eine detaillierte Vorstellung der Krylov-Unterraum-basierten Reduktionsverfahren und deren mathematischer Zusammenhänge (Abschnitt 3.7).

Abschließend werden in Abschnitt 3.8 bisherige Arbeiten betrachtet, in denen Ordnungsreduktionsverfahren für die Simulation von Werkzeugmaschinen zum Einsatz kamen. Eine Zusammenfassung und die Erläuterung des noch ausstehenden Handlungsbedarfes schließen dieses Kapitel ab.

### 3.2 Grundlagen der linearen Algebra und der Systemtheorie

#### 3.2.1 Eigen- und Singulärwertzerlegung

Das Eigenwertproblem besteht darin, zu einer gegebenen Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$  diejenigen Vektoren  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{K}^n$  und die dazugehörigen Parameter  $\lambda_i \in \mathbb{K}$  zu finden, sodass

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_i = \lambda_i \cdot \mathbf{x}_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

gilt. Die Vektoren  $\mathbf{x}_i$  werden die Eigenvektoren der Matrix  $\mathbf{A}$  zu den zugehörigen Eigenwerten  $\lambda_i$  genannt. Die nicht-trivialen Lösungen des Eigenwertproblems

erhält man durch die Eigenwerte  $\lambda_i$ , welche sich als die Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $p(\lambda)$

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \quad (3.2)$$

berechnen lassen. Das Einsetzen der Werte  $\lambda_i$  in (3.1) liefert zu jedem Eigenwert  $\lambda_i$  den korrespondierenden Eigenvektor  $\mathbf{x}_i$ , der die Gleichung erfüllt.

Existieren  $n$  linear unabhängige Eigenvektoren  $\mathbf{x}_i$  und werden diese spaltenweise zu einer Matrix  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n] \in \mathbb{K}^{n \times n}$  zusammengefügt, so ist damit eine Ähnlichkeitstransformation

$$\mathbf{X}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1 \ \dots \ \lambda_n) \quad (3.3)$$

gegeben. Die Matrix  $\mathbf{X}$  wird auch Transformationsmatrix bzw. in der Strukturodynamik Modalmatrix genannt.  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_i)$  stellt eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten  $\lambda_i$  auf der Hauptdiagonalen dar.

Die eigentliche Eigenwertzerlegung von  $\mathbf{A}$  resultiert dann aus der Multiplikation von Gleichung (3.3) mit  $\mathbf{X}$  von links und mit  $\mathbf{X}^{-1}$  von rechts:

$$\mathbf{A} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{X}^{-1}. \quad (3.4)$$

Eine Verallgemeinerung des oben erläuterten speziellen Eigenwertproblems stellt das allgemeine Eigenwertproblem

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n \quad (3.5)$$

dar, bei dem die Matrix  $\mathbf{E}$  unter Umständen singulär sein kann. Auch beim allgemeinen Eigenwertproblem werden die nicht-trivialen Lösungen durch Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \quad (3.6)$$

bestimmt. Für den Fall, dass die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{E}$  hermitesch sind, d. h. im Reellen symmetrisch, und  $\mathbf{E}$  zusätzlich positiv definit ist, sind auch alle Eigenwerte  $\lambda_i$  reell und es existiert eine Basis aus  $n$  unabhängigen Eigenvektoren  $\mathbf{x}_i$  (ZURMÜHL & FALK 1986). Ist  $\mathbf{E}$  singulär, so liegt mindestens ein Eigenwert im Unendlichen. Der zugehörige Eigenvektor liegt für  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  dann im Nullraum von  $\mathbf{E}$ , d. h.

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (3.7)$$

Wie im Fall des speziellen Eigenwertproblems können die berechneten Eigenvektoren  $\mathbf{x}_i$  spaltenweise zu einer Transformationsmatrix  $\mathbf{X}$  zusammengefügt

werden, mit der folgende Ähnlichkeitstransformation gilt:

$$\mathbf{X}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \text{diag}(\lambda_i), \quad (3.8)$$

$$\mathbf{X}^{-1} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{I}. \quad (3.9)$$

Nahe verwandt mit dem Eigenwertproblem ist das Singulärwertproblem. Dieses kann auch für nicht-quadratische Matrizen formuliert werden. Als Singulärwerte werden nach ANTOULAS (2005) die reellen Diagonalelemente der Matrix  $\Sigma$  bezeichnet, die sich bei der Faktorisierung einer Matrix  $\mathbf{S} \in \mathbb{K}^{n \times m}$  gemäß

$$\mathbf{S} = \mathbf{U} \cdot \Sigma \cdot \mathbf{V}^* \quad (3.10)$$

mit den unitären Matrizen  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und  $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{m \times m}$  sowie der Diagonalmatrix

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_k & \\ \hline & 0 & & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (3.11)$$

mit

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k \geq 0, \quad k = \min \{n, m\} \quad (3.12)$$

ergeben.

Nach (3.10) ist jedem Singulärwert  $\sigma_i$  ein Links- und ein Rechtssingulärvektor zugeordnet. Ähnlich wie auch in der Eigenvektormatrix entsprechen diese jeweils der  $i$ -ten Spalte der Matrizen  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{V}$ . Aus der Zerlegung folgt, dass

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}_i = \sigma_i \cdot \mathbf{u}_i \quad \text{und} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{S}^* \cdot \mathbf{u}_i = \sigma_i \cdot \mathbf{v}_i \quad (3.14)$$

gilt. Durch Umformen der Gleichungen (3.13) und (3.14) lässt sich der Zusammenhang mit dem Eigenwertproblem (3.1) verdeutlichen:

$$\underbrace{(\mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S})}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\mathbf{v}_i}_{\mathbf{x}_i} = \underbrace{\sigma_i^2}_{\lambda_i} \cdot \underbrace{\mathbf{v}_i}_{\mathbf{x}_i} \quad (3.15)$$

$$\underbrace{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^*)}_{\mathbf{A}^*} \cdot \underbrace{\mathbf{u}_i}_{\mathbf{x}_i} = \underbrace{\sigma_i^2}_{\lambda_i} \cdot \underbrace{\mathbf{u}_i}_{\mathbf{x}_i}. \quad (3.16)$$

Damit bietet die Singulärwertzerlegung etliche Einsatzmöglichkeiten für die numerische Analyse von Problemen aus der linearen Algebra. Nach SOPPA (2011) ist im Kontext der Modellreduktion besonders die Darstellung einer Matrix als Reihe interessant. Die Matrix  $\mathbf{S}$  lässt sich mit Hilfe der Singulärwertzerlegung

als Summe dyadischer Produkte beschreiben:

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^k \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i. \quad (3.17)$$

Wird die Reihe nach dem  $s$ -ten Glied abgebrochen, so erhält man eine Approximation von  $\mathbf{S}$  vom Rang  $s = \text{rang}(\tilde{\mathbf{S}})$ :

$$\tilde{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^s \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i \quad (3.18)$$

### 3.2.2 Matrix-Zerlegungen

Die Zerlegung einer Matrix in ein Produkt von zwei oder mehreren Teilmatrizen stellt ein wichtiges Hilfsmittel in der linearen Algebra und bei der Anwendung von Ordnungsreduktionsverfahren dar. Die nötigen und in der vorliegenden Arbeit verwendeten Zerlegungen werden in diesem Abschnitt vorgestellt, wobei nicht detaillierter auf die Berechnung der Teilmatrizen eingegangen wird. Hierfür wird auf einschlägige Fachliteratur wie z. B. GOLUB & VAN LOAN (1996) verwiesen, aus der die folgenden Definitionen resultieren.

Eine Zerlegung, die auch zur Lösung von Gleichungssystemen verwendet wird, ist die sogenannte  **$LU$ -Zerlegung** einer Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$  in das Produkt einer linken unteren Dreiecksmatrix  $\mathbf{L}$  und einer rechten oberen Dreiecksmatrix  $\mathbf{U}$ :

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U} \quad (3.19)$$

mit

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} * & 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & * & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & * & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dots & \ddots & * & 0 & \dots \\ * & \dots & * & * & \dots \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n} \text{ und } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} * & * & \dots & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & \dots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dots & \ddots & * & * & \dots \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}.$$

Aufgrund der Dreiecksstruktur der Matrizen  $\mathbf{L}$  und  $\mathbf{U}$  ist die Lösung des Gleichungssystems  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  mit  $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^n$  effizient mit einer Rückwärts- und einer Vorwärtssubstitution berechenbar. Besonders für sehr große Gleichungssysteme kann daher die Lösung mit Hilfe der  **$LU$ -Zerlegung** mit weniger Aufwand als bei der direkten Berechnung gefunden werden.

Eine weitere in der vorliegenden Arbeit verwendete Zerlegung ist die  **$QR$ -Zerlegung** einer Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$  in das Produkt einer orthogonalen Matrix  $\mathbf{Q}$ , d. h.  $\mathbf{Q}^* \mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$ , und einer rechten oberen Dreiecksmatrix  $\mathbf{R}$ , jeweils der Dimension  $n$ :

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}. \quad (3.20)$$

Von Letzterer existieren mit der sog. reduzierten  **$QR$ -Zerlegung** und der **Rank-Revealing- $QR$ -Zerlegung** zwei relevante Varianten. Für eine rechteckige Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n \times s}$  mit  $s \leq n$  bricht die reduzierte  **$QR$ -Zerlegung** nach  $s$  berechneten Spalten der Matrix  $\mathbf{Q} \in \mathbb{K}^{n \times s}$  und  $\mathbf{R} \in \mathbb{K}^{s \times s}$  ab. Bei der Rank-Revealing- **$QR$ -Zerlegung** findet während der Berechnung eine zusätzliche Spaltenpermutation der Matrix  $\mathbf{A}$  mit Hilfe einer Permutationsmatrix statt. Die Permutation richtet sich dabei nach dem Absolutbetrag der Diagonaleinträge der Matrix  $\mathbf{R}$ . Für die rechteckige Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n \times s}$  mit  $s \leq n$  und  $\text{rang}(\mathbf{A}) = l$  ( $l \leq \min\{n, s\}$ ) lautet die Rank-Revealing- **$QR$ -Zerlegung**:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{P}^*. \quad (3.21)$$

Das Produkt besteht aus der orthogonalen Matrix  $\mathbf{Q} \in \mathbb{K}^{n \times s}$  ( $\mathbf{Q}^* \mathbf{Q} = \mathbf{I}_s$ ), der Permutationsmatrix  $\mathbf{P} \in \mathbb{K}^{s \times s}$ , der oberen Dreiecksmatrix  $\mathbf{R}_{11} \in \mathbb{K}^{l \times l}$  mit  $|r_{1,1}| > \dots > |r_{l,l}|$  und der Matrix  $\mathbf{R}_{12} \in \mathbb{K}^{l \times (s-l)}$ , wobei gilt:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{s \times s}. \quad (3.22)$$

### 3.2.3 Projektionen

Durch eine Projektion wird ein Vektor eines bestimmten Vektorraumes auf einen Untervektorraum abgebildet. Dabei wird die Projektion durch eine Projektionsrichtung und einen Projektionsraum bestimmt. Zur Erläuterung sei ein Vektor  $\mathbf{x}$  im dreidimensionalen Raum des  $\mathbb{R}^3$  betrachtet, der auf eine Ebene projiziert und mit  $\mathbf{x}_{\text{pro}}$  bezeichnet wird. Diese Ebene ist dabei als eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$  zu sehen und wird durch die Basisvektoren  $\mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}_2$  aufgespannt, die somit die Basis  $\mathbf{V}$  definieren. Die Projektionsrichtung wird durch eine weitere Ebene  $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2]$  festgelegt, zu welcher die Projektion senkrecht erfolgt.

Die Forderung, dass die Projektionsrichtung senkrecht zum Unterraum  $\mathcal{W}$  ist, lässt sich verallgemeinert durch

$$\mathbf{W}^* \cdot (\mathbf{x}_{\text{pro}} - \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_{\text{pro}}, \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n, \mathbf{W} \in \mathbb{K}^{n \times r} \quad (3.23)$$

<sup>1</sup> englisch: Rang aufdeckend. Diese Matrix-Zerlegung wird so genannt, weil sie den Rang der zerlegten Matrix aufdeckt.

ausdrücken, wenn  $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_r]$  eine Basis des Unterraumes  $\mathcal{W}$  darstellt. Zusätzlich muss das Projektionsbild durch eine Basis  $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r]$  des Unterraumes  $\mathcal{V}$  beschreibbar sein:

$$\mathbf{x}_{pro} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{x}_{red} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_{red} \in \mathbb{K}^r, \mathbf{V} \in \mathbb{K}^{n \times r}. \quad (3.24)$$

Der Vektor  $\mathbf{x}_{red}$  repräsentiert dabei den Vektor  $\mathbf{x}_{pro}$ , welcher in der Basis  $\mathbf{V}$  definiert ist. Das Einsetzen der Bedingung (3.24) in (3.23) und Umformen mit der Voraussetzung, dass  $\mathbf{W}^* \mathbf{V}$  regulär ist, beschreibt eine Beziehung eines Vektors des  $\mathbb{K}^n$  zur natürlichen Basis und eines Vektors des  $\mathbb{K}^r$  zur Basis  $\mathbf{V}$ , wobei  $r < n$  ist:

$$\mathbf{x}_{red} = (\mathbf{W}^* \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^* \cdot \mathbf{x}. \quad (3.25)$$

Diese Beziehung ist für die Reduktionsverfahren durch Projektion besonders wichtig, denn sie beschreibt eine Reduktion der Ordnung.

Nach einer Linksmultiplikation mit der Basis  $\mathbf{V}$  wird schließlich das Ergebnis der Projektion beschrieben:

$$\mathbf{x}_{pro} = \underbrace{\mathbf{V}(\mathbf{W}^* \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^*}_{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{x}. \quad (3.26)$$

Die Matrix  $\mathbf{P} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ , die die Projektionsabbildung bewirkt, wird demnach Projektor genannt. Wenn die Matrizen  $\mathbf{W}$  und  $\mathbf{V}$  biorthonormal sind, d. h.  $\mathbf{W}^* \mathbf{V} = \mathbf{I}$ , gilt für die Matrix des Projektors:

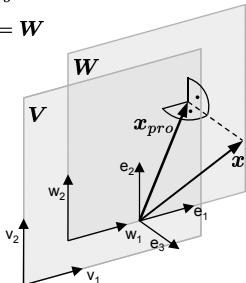
$$\mathbf{P} = \mathbf{V} \mathbf{W}^*. \quad (3.27)$$

Werden für die Projektion zwei unterschiedliche Matrizen  $\mathbf{W}$  und  $\mathbf{V}$  verwendet, so wird von einer *Petrov-Galerkin*- oder auch schiefen Projektion gesprochen. Wird hingegen  $\mathbf{W} = \mathbf{V}$  mit  $\mathbf{V}^* \mathbf{V} = \mathbf{I}$  verwendet, wird dies eine orthogonale oder *Galerkin*-Projektion genannt (SAAD 2003, ANTOULAS 2005). Die zwei verschiedenen Arten von Projektionen sind in Bild 3.1 für den Fall des  $\mathbb{R}^3$  dargestellt.

Der Projektor  $\mathbf{P}$  teilt somit den Raum  $\mathbb{K}^n$  in die zwei Unterräume  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$ . Der zu Beginn dieses Abschnitts erwähnte Projektionsraum ist entsprechend durch den Unterraum  $\mathcal{V}$  und die Projektionsrichtung durch eine Orthogonale auf den Unterraum  $\mathcal{W}$  gegeben. Für detailliertere Erläuterungen sei auf entsprechende Fachliteratur (z. B. SAAD 2003, ANTOULAS 2005) verwiesen.

$$\mathbf{x}_{pro} = \mathbf{V}\mathbf{W}^T \mathbf{x}$$

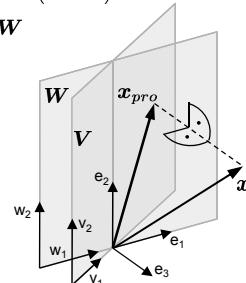
$$\mathbf{V} = \mathbf{W}$$



(a) Orthogonale Projektion

$$\mathbf{x}_{pro} = \mathbf{V}(\mathbf{W}^T \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{V} \neq \mathbf{W}$$



(b) Schiefe Projektion

 Bild 3.1: Schematische Darstellung einer orthogonalen und einer schiefen Projektion, wobei  $V$  und  $W$  je eine Basis von  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$  darstellen

### 3.2.4 Darstellung von Systemen

Das Verhalten vieler technischer Systeme wird mit Hilfe von Differenzialgleichungen beschrieben. Je nach Spezifikation und Modellierungsansatz entsteht dabei ein Differenzialgleichungssystem erster oder zweiter Ordnung. Wie in Abschnitt 2.2.2 bereits angedeutet, ist ein System dadurch gekennzeichnet, dass es vorhandene, zeitlich veränderliche Signale, die an den Eingängen anliegen, in andere Signale umwandeln kann, welche als Ausgänge das System verlassen.

Für die Beschreibung linearer mechanischer Systeme wird in der Regel die Bewegungsdifferenzialgleichung zweiter Ordnung (2.3) herangezogen. Aus systemtheoretischer Sicht ist es sinnvoll, den Kraftvektor  $\mathbf{F}$  als Produkt aus der zeitinvarianten Eingangsmatrix  $\mathbf{B} \in \mathbb{K}^{n \times m}$  und dem zeitabhängigen Eingangsvektor  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{K}^m$  darzustellen. Da die Anzahl der Ausgänge des Systems nicht zwangsweise der Anzahl der Zustände entsprechen muss, wird eine Ausgangsgleichung für das System eingeführt, mit der die relevanten Ausgänge  $\mathbf{y}(t)$  berechnet werden können. Hierfür werden die Ausgangsmatrizen  $\mathbf{C}_p \in \mathbb{K}^{q \times n}$  und  $\mathbf{C}_v \in \mathbb{K}^{q \times n}$  für die verschiebungsproportionalen (Index  $p$ ) und geschwindigkeitsproportionalen (Index  $v$ ) Ausgänge eingesetzt. Dadurch entsteht ein lineares, zeitinvariantes System zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_p\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}_v\dot{\mathbf{x}}(t) \end{aligned} \tag{3.28}$$

mit  $\mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{K} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Die Linearität des Systems ist dadurch gegeben, dass die Koeffizientenmatrizen der Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitseigenschaften nicht von den Zuständen abhängig sind. Aus diesem Grund treten die

Unbekannten des Systems nur in linearen Zusammenhängen auf. Da die Koeffizientenmatrizen zudem nicht von der Zeit abhängig sind, wirkt sich der Zeitpunkt des Auftretens von Eingangssignalen nicht auf die Ausprägung der Ausgänge aus. Das System gilt daher als zeitinvariant. (UNBEHAUEN 2002)

Um das Gleichungssystem im Zeitbereich lösen zu können, muss es von einem System zweiter Ordnung in ein System erster Ordnung überführt werden. Hierfür wird häufig die sog. Zustandsraumdarstellung herangezogen, welche u. a. für Regelungstechnische Anwendungen oder in der digitalen Blocksimulation zum Einsatz kommt. Für die Transformation in den Zustandsraum wird der Zustandsvektor  $z$  aus der Position  $x$  und deren Ableitung, der Geschwindigkeit  $\dot{x}$ , gebildet:

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Mit diesem Vektor lässt sich schließlich die Transformation durchführen:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}}_E \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{z}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & N \\ -K & -D \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}}_{z(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} u(t) \quad (3.30)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} C_p & C_v \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}}_{z(t)},$$

woraus sich das verallgemeinerte Zustandsraummodell erster Ordnung

$$\begin{aligned} E\dot{z}(t) &= \tilde{A}z(t) + \tilde{B}u(t) \\ y(t) &= Cz(t) \end{aligned} \quad (3.31)$$

mit  $E, \tilde{A} \in \mathbb{K}^{2n \times 2n}$ ,  $\tilde{B} \in \mathbb{K}^{2n \times m}$  und  $C \in \mathbb{K}^{q \times 2n}$  ableiten lässt.

Die Matrix  $N \in \mathbb{K}^{n \times n}$  in Gleichung (3.30) muss lediglich der Forderung genügen, nicht singulär zu sein. Häufig wird sie daher mit der  $n \times n$ -Einheitsmatrix  $I_n$  gleichgesetzt. Werden die  $N$ -Blöcke in (3.30) allerdings durch  $-K$  ersetzt, führt dies auf symmetrische Systemmatrizen  $E$  und  $\tilde{A}$ , sofern  $M$  und  $K$  symmetrisch sind. Da diese Eigenschaft bei linearen FEM-Modellen i. d. R. gegeben ist, können somit positive mathematische Effekte hinsichtlich der Recheneffizienz erreicht werden.

Im Gegensatz zu einer einzelnen Differenzialgleichung kann es beim Gleichungssystem (3.31) vorkommen, dass zusätzlich algebraische Nebenbedingungen enthalten sind, was zu einer singulären Matrix  $E$  führen kann. In diesem

Fall spricht man von einem diffenzial-algebraischen Gleichungssystem oder auch Deskriptorsystem. Ist die Matrix  $E$  hingegen invertierbar, so lässt sich die klassische Zustandsraumdarstellung des linearen, zeitinvarianten Systems<sup>2</sup> erzeugen, welche auch für die gekoppelte Simulation angewendet wird:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{z}(t)\end{aligned}\tag{3.32}$$

mit

$$A = E^{-1} \check{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & N \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = E^{-1} \check{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ M^{-1}F \end{bmatrix}.$$

Nach der Zustandsraumtransformation liegt ein Differenzialgleichungssystem erster Ordnung vor, welches für eine Lösung im Zeitbereich geeignet ist. Dabei ist zu beachten, dass die Dimension  $n$  des ursprünglichen Systems (3.28) auf  $2n$  verdoppelt wurde. Bild 3.2 zeigt eine allgemeine, signaltechnische Darstellung eines linearen Zustandsraummodells. Die Differenzialgleichung wird dabei durch den Integrationsblock mit dem Diagonalstrich in der Mitte symbolisiert. Der Vollständigkeit halber ist auch die Durchgriffsmatrix  $D$  dargestellt, die in Gleichung (3.32) enfällt, da  $D = 0$  gilt.

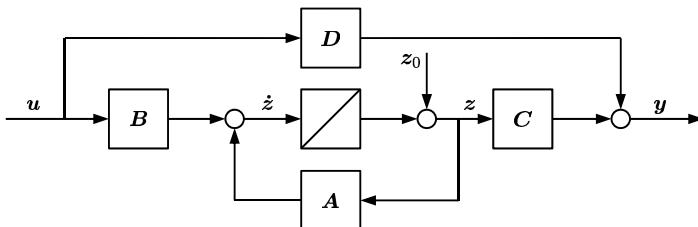


Bild 3.2: Signaltechnische Darstellung eines linearen Zustandsraummodells

### 3.2.5 Systemeigenschaften

### 3.2.5.1 Stabilität und Passivität

Zur Beurteilung der Systemeigenschaft *Stabilität* können ausgehend vom System (3.32) zwei Konzepte abgeleitet werden. Unter externer Stabilität wird die Eigenschaft verstanden, dass aus einem beschränkten Eingangssignal  $u(t)$

---

<sup>2</sup> Diese Form wird in der Systemtheorie auch LTI-System (engl.: linear time-invariant) genannt.

auch ein beschränktes Ausgangssignal  $\mathbf{y}(t)$  folgt (ANTOULAS 2005). Für die Untersuchung der inneren Stabilität wird hingegen das Anfangswertproblem

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 \quad (3.33)$$

herangezogen. Liegt für alle  $t \geq 0$  eine beschränkte Lösung  $\mathbf{z}(t)$  des Anfangswertproblems (3.33) vor, so gilt das System als stabil. Mechanisch gesehen bedeutet dies, dass Letzteres nach einer Auslenkung aus der Ruhelage wieder in eine Ruhelage zurückkehrt. Gilt darüber hinaus

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}(t) = \mathbf{0}, \quad (3.34)$$

so wird das System asymptotisch stabil genannt. Ein Schwingungssystem wird in diesem Fall in endlicher Zeit wieder in der Ausgangslage zur Ruhe kommen. Einen Spezialfall stellt die Grenzstabilität dar. Diese liegt vor, wenn die Energie im System konstant bleibt, was für das Schwingungssystem bedeutet, dass es ohne Amplitudenabfall gleichmäßig weiterschwingt. Zudem gilt, dass ein intern stabiles System auch extern stabil ist, was jedoch umgekehrt nicht ausnahmslos folgt (LEHNER 2007). In der vorliegenden Arbeit bezieht sich die Verwendung des Begriffes Stabilität stets auf die innere Stabilität.

Für die Bewertung der Stabilität spielen die Eigenwerte des Systems (siehe Abschnitt 3.2.1) eine entscheidende Rolle (MÜLLER 1977, KNOBLOCH & KWAKERNAAK 1985). Wenn alle Eigenwerte nur negative Realteile besitzen, liegt asymptotische Stabilität vor. Dagegen gilt das System als stabil oder grenzstabil, wenn sämtliche Eigenwerte keine positiven Realteile aufweisen und zusätzlich alle rein imaginären endlichen Eigenwerte die Vielfachheit 1 aufweisen. Für die weitergehende Stabilitätsanalyse sei auf ANTOULAS (2005) verwiesen. Von MÜLLER & SCHIEHLEN (1976) werden darüber hinaus Kriterien diskutiert, mit deren Hilfe die Stabilität eines Systems ohne direkte Berechnung der Eigenwerte beurteilt werden kann.

Die Bestimmung der Stabilität von Differenzialgleichungssystemen zweiter Ordnung, die in der Regel bei mechanischen schwingungsfähigen Systemen vorliegen, erfolgt nach der Transformation in ein System erster Ordnung nach den oben beschriebenen Kriterien. Alternativ lassen sich Letztere auch auf das Originalsystem anwenden. Hierfür werden der Zustandsvektor  $\mathbf{z} = [\mathbf{x}^T \dot{\mathbf{x}}^T]^T$  und die Matrizen  $\mathbf{E}$  und  $\check{\mathbf{A}}$  aus (3.30) in die Eigenwertgleichung  $(\lambda\mathbf{E} - \check{\mathbf{A}})\mathbf{z} = \mathbf{0}$  eingesetzt. Nach Elimination von  $\dot{\mathbf{x}}$  entsteht das quadratische Eigenwertproblem der Dimension  $n$ :

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{D} + \mathbf{K})\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (3.35)$$

Dieses System ist genau dann stabil bzw. grenzstabil, wenn der Realteil aller

Nullstellen  $\lambda \in \mathbb{C}$  des Polynoms  $p(\lambda) := \det(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{D} + \mathbf{K})$  kleiner bzw. gleich Null ist und diejenigen Nullstellen, welche auf der imaginären Achse liegen, nur die Vielfachheit eins besitzen. Befinden sich alle Nullstellen vollständig in der offenen linken Halbebene von  $\mathbb{C}$ , d. h.  $\operatorname{Re}(\lambda_n) < 0$ , so ist das System asymptotisch stabil. (ANTOULAS 2005)

An dieser Stelle sei auf die Bedeutung der Dämpfungsmaatrix hinsichtlich der Stabilität eines Systems hingewiesen. Die Nullstellen  $\lambda_i$  mit  $i = 1, \dots, n$ , die gleichzeitig die Eigenwerte des Systems darstellen, liegen stets als konjugiert komplexe Paare vor. Wie in Gleichung (2.20) in Abschnitt 2.4.4 dargestellt, besteht jeder Eigenwert aus einer Abklingkonstante  $\delta$  (Realteil) sowie der Eigenfrequenz des gedämpften Systems  $\omega_D$  (Imaginärteil). Für ein ungedämpftes System, d. h. wenn  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ , ergibt die Lösung des Eigenwertproblems  $n$  rein imaginäre Eigenwertpaare (PIETRZKO 1992). Daraus geht hervor, dass nur ein gedämpftes System asymptotisch stabil ist und ein entsprechendes Abklingverhalten aufweist (Bild 3.3). Die parabelförmige, zur reellen Achse symmetrische Verteilung der Eigenwerte ist dabei einem proportionalen Dämpfungsansatz geschuldet, wonach die größeren Eigenwerte stärker bedämpft werden als die kleineren.

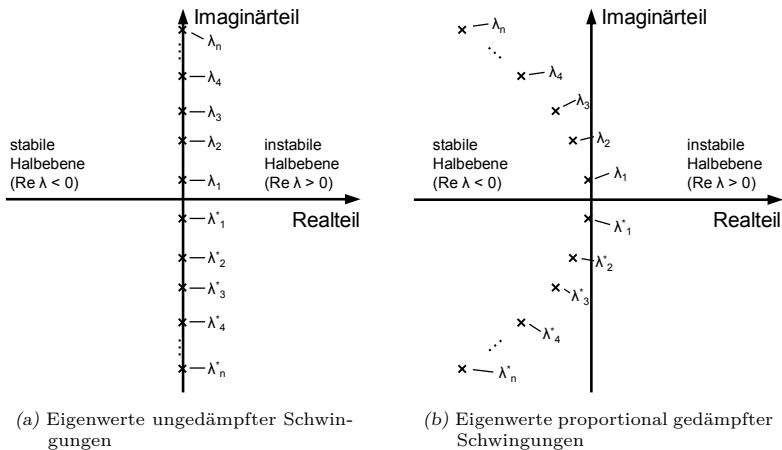


Bild 3.3: Schematische Darstellung der Eigenwertverteilung in der komplexen Ebene eines ungedämpften und eines gedämpften Systems

Die Eigenschaft *Passivität* eines Systems ist dann gegeben, wenn dieses intern keine Energie generiert. Das System gilt zudem als strikt passiv, wenn es Eingangsenergie verbraucht bzw. dissipiert (SORENSEN 2005, FASSBENDER & BENNER 2006). Die zu einem bestimmten Zeitpunkt in einem passiven System

gespeicherte Energie kann demnach nie größer sein, als die Summe der zum Anfangszeitpunkt gespeicherten und der im zeitlichen Betrachtungsintervall zugeführten Energie. Zur Beurteilung der Passivität wird die Energie, die über die Eingänge dem System zugeführt wird, mit derjenigen verrechnet, welche über die Ausgänge abgeführt wird. Aus diesem Grund sind physikalische Systeme mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfungsmaatrix nach Gleichung (3.28) mathematisch gesehen nur dann passiv, wenn als Ausgänge die Geschwindigkeiten der Freiheitsgrade anstelle der Verschiebungen betrachtet werden (BROGLIATO ET AL. 2007). Die Passivität ist damit eine Eigenschaft, welche auch Einfluss auf die Stabilität des Systems haben kann.

### 3.2.5.2 Steuer- und Beobachtbarkeit

Das Kriterium *Steuerbarkeit* beschreibt, inwieweit die Zustände  $z(t)$  eines Systems durch die Eingänge  $u(t)$  beeinflusst werden können. Nach der Theorie von Kalman gilt ein System als vollständig steuerbar, wenn es für jeden Anfangszustand  $z(t_0)$  eine Steuerfunktion  $u(t)$  gibt, mit der das System innerhalb einer endlichen Zeitspanne  $t_0 \leq t \leq t_1$  in einen beliebigen Endzustand  $z(t_1)$  überführt werden kann (KALMAN 1961, LUNZE 2008). Für den Fall, dass der Endzustand nicht von jedem Anfangszustand aus erreicht wird, entfällt der Zusatz „vollständig“ und das System gilt als steuerbar. Da für lineare zeitinvariante kontinuierliche Systeme dieser Fall nicht auftreten kann (UNBEHAUEN 2007), wird ohne die Gefahr eines Missverständnisses hierfür gewöhnlich nur der Begriff *Steuerbarkeit* verwendet.

Zur Beurteilung der Steuerbarkeit eines Systems der Form (3.32) wird meist das Kriterium von Kalman herangezogen, welches sich auf die Steuerbarkeitsmatrix

$$S_S = [\mathbf{A} \ \mathbf{AB} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{2n-1}\mathbf{B}] \quad (3.36)$$

bezieht. Das Paar  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  gilt demnach als steuerbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix den Rang  $2n$  hat:

$$\text{rang } (S_S) = 2n. \quad (3.37)$$

Das Konzept der *Beobachtbarkeit* beschreibt die Kopplung zwischen dem Zustand  $z(t)$  des Systems und seinen Ausgängen  $y(t)$ . Ein lineares zeitinvariantes System wird demnach vollständig beobachtbar genannt, wenn der Anfangszustand  $x_0$  aus dem bekannten Verlauf der Eingangsgröße  $u(t)$  und der Ausgangsgröße  $y(t)$  im endlichen Intervall  $[0, t_1]$  bestimmt werden kann (LUNZE 2008).

Auch für die Beobachtbarkeit gibt es ein Kalmankriterium, welches sich auf die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{S}_B = [\mathbf{C} \ \mathbf{CA} \ \mathbf{CA}^2 \ \dots \ \mathbf{CA}^{2n-1}]^T \quad (3.38)$$

bezieht. Analog zu (3.37) ist das Paar  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  genau dann vollständig beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix den Rang  $2n$  hat:

$$\text{rang} (\mathbf{S}_B) = 2n. \quad (3.39)$$

Dem Beobachtungsproblem liegt die Tatsache zu Grunde, dass bei den meisten technischen Systemen nicht alle Zustandsvariablen messbar sind. Statt dessen kann nur ein definierter Ausgangsvektor  $\mathbf{y}(t)$  erfasst werden. Da die Dimension von  $\mathbf{y}$  kleiner als die von  $\mathbf{x}$  ist, kann aus Dimensionsgründen nicht der aktuelle Wert  $\mathbf{x}(t)$  des Zustandsvektors aus dem aktuellen Wert  $\mathbf{y}(t)$  des Ausgangsvektors berechnet werden. Bei einem beobachtbaren System können mehr Informationen über den Zustand erfahren werden, wenn die Bewegung des Systems nicht nur in einem Zeitpunkt  $t_1$ , sondern über ein bestimmtes Zeitintervall beobachtet wird. Aus der Trajektorie  $\mathbf{y}(t)$  ( $0 \leq t \leq t_1$ ) kann auf diese Weise mit Hilfe des Modells und der bekannten Systembeeinflussung  $\mathbf{u}(t)$  der aktuelle Zustand rekonstruiert werden.

### 3.2.6 Übertragungsverhalten

Um globale Aussagen über das dynamische Verhalten von mechanischen Strukturen, welche in systemtechnischer Darstellung vorliegen, treffen zu können, wird häufig das Übertragungsverhalten im Frequenzbereich betrachtet. Hierfür werden die Übertragungsfunktionen zwischen den Eingängen des Systems, d. h. bei Werkzeugmaschinen den Orten der Krafteinleitung, und den Ausgängen, an welchen die Systemantworten abgegriffen werden, betrachtet.

Für die Berechnung des Übertragungsverhaltens ist der Übergang vom Zeit- in den Frequenzbereich mit Hilfe einer Laplace-Transformation nötig:

$$\mathbf{F}(s) := \mathcal{L}[\mathbf{f}(t)](s) = \int_0^{\infty} \mathbf{f}(t) e^{-st} dt. \quad (3.40)$$

Mit dieser Transformation wird die Funktion  $\mathbf{f}(t)$  in ihre Laplace-Transformierte  $\mathbf{F}(s)$  mit der komplexen Frequenzvariable  $s = \sigma + i\omega$  überführt. Weitere Informationen zur Laplace-Transformation können u. a. FÖLLINGER (1994) oder UNBEHAUEN (2008) entnommen werden.

Wird die Laplace-Transformation auf das Differenzialgleichungssystem zweiter Ordnung (3.28) angewendet, so entsteht unter der Voraussetzung homogener Anfangsbedingungen, d. h.  $\mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ , das algebraische Gleichungssystem

$$\begin{aligned} s^2 \mathbf{M} \mathbf{X}(s) + s \mathbf{D} \mathbf{X}(s) + \mathbf{K} \mathbf{X}(s) &= \mathbf{B} \mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{C}_p \mathbf{X}(s) + s \mathbf{C}_v \mathbf{X}(s) \end{aligned} \quad (3.41)$$

mit dem komplexwertigen Parameter  $s$  und  $\mathbf{X}(s)$ ,  $\mathbf{U}(s)$  sowie  $\mathbf{Y}(s)$  als den Laplace-Transformierten von  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$  und  $\mathbf{y}(t)$ . Die anschließende Elimination von  $\mathbf{X}(s)$  in (3.41) führt auf

$$\mathbf{Y}(s) = \underbrace{(\mathbf{C}_p + s \mathbf{C}_v)(s^2 \mathbf{M} + s \mathbf{D} + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(s)}_{\mathbf{H}(s)}, \quad (3.42)$$

woraus sich die  $(q \times m)$ -wertige Funktion

$$\mathbf{H}(s) = (\mathbf{C}_p + s \mathbf{C}_v)(s^2 \mathbf{M} + s \mathbf{D} + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{B} \quad (3.43)$$

ableiten lässt, welche die Übertragungsfunktion des Systems zweiter Ordnung genannt wird (SALIMBAHRAMI & LOHMANN 2006). Für die Funktion gilt, dass der Ausdruck  $(s^2 \mathbf{M} + s \mathbf{D} + \mathbf{K})$  regulär sein muss, die Matrizen  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{K}$  hingegen dürfen jede für sich singulär sein (RICKELT-ROLF 2009). Aus strukturmechanischer Sicht wird mit der Gleichung (3.43) ein Antwortverhalten auf eine frequenzabhängige Anregung beschrieben, weshalb das Ergebnis der Funktion auch Frequenzgang genannt wird. Da in dieser Arbeit stets harmonische Anregungen betrachtet werden, gilt  $\sigma = 0$ , sodass für die komplexe Frequenzvariable  $s = i\omega = 2\pi i f$  resultiert.

Analog zum System zweiter Ordnung lässt sich die Übertragungsfunktion auch für Systeme erster Ordnung bestimmen. Diese lautet für das allgemeine Zustandsraummodell (3.31):

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}. \quad (3.44)$$

Im Fall des klassischen Zustandsraummodells (3.32) ergibt sich die Übertragungsfunktion zu:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}. \quad (3.45)$$

Auch für die Gleichungen (3.44) bzw. (3.45) gilt die Forderung, dass die Ausdrücke  $(s \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$  bzw.  $(s \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  regulär sein müssen.

Wird der Fall harmonisch erregter dynamischer Systeme ( $s = i\omega$ ) betrachtet, so entsteht der sog. Frequenzgang

$$\hat{\mathbf{H}}(\omega) = (\mathbf{C}_p + i\omega \mathbf{C}_v)(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{D} + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{B}, \quad (3.46)$$

der die Übertragungseigenschaften eines dynamischen Systems für sinusförmige Eingangsgrößen beschreibt. Der Frequenzgang setzt sich aus dem Amplitudengang  $|\hat{\mathbf{H}}(\omega)|$  und dem Phasengang  $\phi(\omega)$  zusammen, die üblicherweise übereinander und (doppelt-)logarithmisch in einem sog. Bode-Diagramm dargestellt werden. In dieser Form lässt sich die Amplitudenverstärkung und die zugehörige Phasenverschiebung der Systemantwort auf eine harmonische Eingangsschwingung ablesen.

Wurde für das betrachtete Gleichungssystem das Eigenwertproblem bereits gelöst, so dass das entkoppelte Differenzialgleichungssystem (2.15) vorliegt, dann lässt sich auch hierfür die Übertragungsfunktion aufstellen. Unter der Annahme des modalen Dämpfungsansatzes nach Gleichung (2.24) erhält man für harmonische Anregungen die stationären Lösungen  $\mathbf{q}$ :

$$\mathbf{q} = (-\mathbf{I}\omega^2 + i2\mathbf{D}_L\Omega\omega + \Omega^2)^{-1}\tilde{\mathbf{F}}. \quad (3.47)$$

Mit Hilfe der Modaltransformation (2.6) kann die Verschiebungsantwort  $\mathbf{x}$  in kartesischen Koordinaten berechnet werden:

$$\mathbf{x} = \Phi(-\mathbf{I}\omega^2 + i2\mathbf{D}_L\Omega\omega + \Omega^2)^{-1}\Phi^T\mathbf{F}. \quad (3.48)$$

Unter Berücksichtigung der Definition der Übertragungsfunktion als Verhältnis zwischen der Systemantwort und der anregenden Kraft (vgl. Gleichung (2.5)) wird für den vorliegenden Fall die Übertragungsmatrix  $\mathbf{N}(\omega)$  mit den dynamischen Nachgiebigkeiten sämtlicher Übertragungspfade im Inneren der Struktur definiert:

$$\mathbf{N}(\omega) := \mathbf{x}\mathbf{F}^{-1} = \Phi(-\mathbf{I}\omega^2 + i2\mathbf{D}_L\Omega\omega + \Omega^2)^{-1}\Phi^T. \quad (3.49)$$

Bei Werkzeugmaschinen stellen die Relativbewegungen und somit die Relativnachgiebigkeit zwischen Werkzeug und Werkstück ein wichtiges Kriterium zur Beurteilung der strukturdynamischen Eigenschaften dar. Für diesen Sonderfall des Übertragungsverhaltens werden die selben Systemfreiheitsgrade für die Anregungskräfte wie auch für die Verlagerungspunkte betrachtet.

Die dynamische Nachgiebigkeit kann aufgrund der entkoppelten Form der oben stehenden Gleichung (3.49) auch als Summe der Beiträge  $N_i(\omega)$  zur Gesamtübertragungsmatrix der einzelnen Moden  $i$  dargestellt werden:

$$\mathbf{N}(\omega) = \sum_i N_i(\omega) \quad \text{mit} \quad N_i(\omega) = \frac{\phi_i \phi_i^T}{-\omega^2 + i2D_{L,i}\omega_i\omega + \omega_i^2}. \quad (3.50)$$

Nach SUMMER (1986) lässt sich durch Umformen für jede Mode  $i$  ein dimensionsloser Frequenzgang  $S_i(\omega)$  bestimmen, der die Dynamik der Mode  $i$  unabhängig

vom Ein- bzw. Ausgangsfreiheitsgrad beschreibt:

$$N_i(\omega) = \frac{\phi_i \phi_i^T}{\omega_i^2} \cdot S_i(\omega) \quad \text{mit} \quad S_i(\omega) = \frac{1}{1 + \iota 2D_{L,i} \frac{\omega}{\omega_i} - \frac{\omega^2}{\omega_i^2}}. \quad (3.51)$$

### 3.2.7 Momente einer Funktion

Die im Freuquenzbereich definierte Übertragungsfunktion  $\mathbf{H}(s)$  in (3.44) kann nach ihrer Umformung auch als

$$\mathbf{H}(s) = -\mathbf{C} \cdot (\mathbf{I} \cdot s\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad (3.52)$$

geschrieben werden. Unter der Annahme, dass  $(\mathbf{I} \cdot s\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E})$  nicht singulär ist, und unter Zuhilfenahme einer Neumann-Reihenentwicklung (siehe z. B. GRIMME 1997, EID 2009)

$$(\mathbf{I} - \eta\mathbf{G})^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (\eta\mathbf{G})^j \quad (3.53)$$

lässt sich die Funktion  $\mathbf{H}(s)$  in eine Potenzreihe um die Entwicklungsstelle  $s_0 = 0$  entwickeln:

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} -\mathbf{C}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E})^j \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} s^j = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{T}_j(0) s^j, \quad (3.54)$$

wobei die Koeffizienten der Reihe  $\mathbf{T}_j$  als Momente bezeichnet werden (GRIMME 1997, ANTOULAS 2005):

$$\mathbf{T}_j(0) = -\mathbf{C}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E})^j \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{j!} \left. \frac{\partial^j \mathbf{H}(s)}{\partial s^j} \right|_{s=s_0=0} \quad \text{mit} \quad j = 0, 1, \dots. \quad (3.55)$$

Die Übertragungsfunktion kann demnach durch eine unendliche Reihe dargestellt werden. Wird diese vorzeitig abgebrochen, so sind Funktion und Reihendarstellung nicht mehr identisch. Im Rahmen der *moment-matching*-Methoden wird nun gefordert, dass eine bestimmte Anzahl an Momenten des Originalsystems mit den Momenten des reduzierten Systems übereinstimmt.

Wird die Übertragungsfunktion im Rahmen der Reduktion durch eine Reihenentwicklung um den Nullpunkt ( $s_0 = 0$ ) approximiert, so wird dies eine Padé-Approximation genannt, welche die niederfrequenten Anteile des Systems gut annähert (RICKELT-ROLF 2009).

Darüber hinaus kann die Entwicklung einer Reihe auf beliebige Punkte  $s_0 \in \mathbb{C}$ , die keine Pole der Übertragungsfunktion darstellen, erweitert werden. Die Formulierung der *geshifften*<sup>3</sup> Übertragungsfunktion sowie deren Potenzreihendarstellung um die Entwicklungsstelle  $s_0$  lautet nach ANTOULAS (2005):

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(s) &= \mathbf{C}((s - s_0)\mathbf{E} - (\mathbf{A} - s_0\mathbf{E}))^{-1}\mathbf{B} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} -\mathbf{C}((\mathbf{A} - s_0\mathbf{E})^{-1}\mathbf{E})^j(\mathbf{A} - s_0\mathbf{E})^{-1}\mathbf{B}(s - s_0)^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{T}_j(s_0)(s - s_0)^j,\end{aligned}\tag{3.56}$$

wobei sich die Momente  $\mathbf{T}_j$  durch

$$\mathbf{T}_j(s_0) = -\mathbf{C}((\mathbf{A} - s_0\mathbf{E})^{-1}\mathbf{E})^j(\mathbf{A} - s_0\mathbf{E})^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j \mathbf{H}(s)}{\partial s^j} \Big|_{s=s_0}\tag{3.57}$$

mit  $j = 0, 1, \dots$  darstellen lassen. Die Wahl des Entwicklungspunktes<sup>4</sup>  $s_0$  bestimmt dabei, in welchem Frequenzbereich die Übertragungsfunktion gut wiedergegeben wird. Einen Spezialfall stellt die Reihe um einen Entwicklungspunkt im Unendlichen, d. h.  $s_0 = \infty$ , dar, deren Momente Markov-Parameter genannt werden. Die Potenzreihenentwicklung von  $\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$  für  $s_0 \rightarrow \infty$  ist dabei definiert als

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{T}_j(s_0)s^{-j-1}\tag{3.58}$$

mit den Markov-Parametern

$$\mathbf{T}_j(s_0) = \mathbf{C}(\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A})^j\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B} \quad \text{mit} \quad j = 0, 1, \dots.\tag{3.59}$$

Analog lassen sich nach SU ET AL. (2004) auch die Momente für die Übertragungsfunktion eines Differenzialgleichungssystems zweiter Ordnung der Form (3.43) bestimmen. Für die Entwicklung um eine beliebige Entwicklungsstelle  $s_0 \in \mathbb{C}$ , so dass  $(s_0^2\mathbf{M} + s_0\mathbf{D} + \mathbf{K})^{-1}$  existiert, ergibt sich die zu (3.43)

<sup>3</sup> Der Begriff stammt vom englischen Verb *to shift*, welches mit *verschieben* übersetzt werden kann. Der englische Ausdruck wird in der numerischen Mathematik mangels einer treffenden Übersetzung auch im Deutschen verwendet (SOPPA 2011).

<sup>4</sup> Die Begriffe Entwicklungspunkt (EP) und Entwicklungsstelle (ES) werden in dieser Arbeit synonym verwendet. Gemeint ist dabei stets ein Funktionswert  $s_0$ , um welchen eine Reihe entwickelt wird bzw. für welchen ein oder mehrere Momente zur Übereinstimmung gebracht werden.

äquivalente Darstellung als geshiftete Übertragungsfunktion an der Stelle  $s$ :

$$\mathbf{H}(s) = (\check{\mathbf{C}}_p + (s - s_0)\mathbf{C}_v)((s - s_0)^2 \mathbf{M} + (s - s_0)\check{\mathbf{D}} + \check{\mathbf{K}})^{-1} \mathbf{B}, \quad (3.60)$$

wobei gilt:

$$\check{\mathbf{D}} = 2s_0 \mathbf{M} + \mathbf{D}, \quad (3.61)$$

$$\check{\mathbf{K}} = s_0^2 \mathbf{M} + s_0 \mathbf{D} + \mathbf{K} \quad \text{und} \quad (3.62)$$

$$\check{\mathbf{C}}_p = \mathbf{C}_p + s_0 \mathbf{C}_v. \quad (3.63)$$

Im nächsten Schritt wird die Gleichung (3.60) zu

$$\mathbf{H}(s) = (\check{\mathbf{C}}_p + (s - s_0)\mathbf{C}_v)((s - s_0)^2 \check{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{M} + (s - s_0)\check{\mathbf{K}}^{-1} \check{\mathbf{D}} + \mathbf{I})^{-1} \check{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{B} \quad (3.64)$$

umgeformt, so dass unter Berücksichtigung der Substitution

$$((s - s_0)^2 \check{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{M} + (s - s_0)\check{\mathbf{K}}^{-1} \check{\mathbf{D}}) = -\mathbf{L} \quad (3.65)$$

in Gleichung (3.64)

$$\mathbf{H}(s) = (\check{\mathbf{C}}_p + (s - s_0)\mathbf{C}_v)(\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} \check{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{B} \quad (3.66)$$

entsteht. Auf diese Gleichung kann nun unter der Annahme, dass  $(\mathbf{I} - \mathbf{L})$  nicht singulär ist, eine Neumann-Reihenentwicklung nach (3.53) angewendet werden. Damit kann die Übertragungsfunktion  $\mathbf{H}(s)$  um eine beliebige Entwicklungsstelle  $s_0 \in \mathbb{C}$  in eine Potenzreihe

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{T}_j(s_0) (s - s_0)^j \quad (3.67)$$

entwickelt werden.

Die Koeffizienten

$$\mathbf{T}_j(s_0) = \left. \frac{1}{j!} \frac{\partial^j \mathbf{H}(s)}{\partial s^j} \right|_{s=s_0} \quad \text{mit } j = 0, 1, \dots \quad (3.68)$$

sowie

$$\mathbf{T}_j(s_0) = \begin{cases} \check{\mathbf{C}}_p \Theta_j(s_0), & \text{für } j = 0 \\ \mathbf{C}_v \Theta_{j-1}(s_0) + \check{\mathbf{C}}_p \Theta_j(s_0) & \text{für } j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.69)$$

und

$$\Theta_j(s_0) = \begin{cases} \check{K}^{-1}B, & \text{für } j = 0 \\ \check{K}^{-1}(-\check{D}\Theta_0(s_0)), & \text{für } j = 1 \\ \check{K}^{-1}(-\check{D}\Theta_{j-1}(s_0) - M\Theta_{j-2}(s_0)) & \text{für } j = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.70)$$

stellen demnach die Momente zweiter Ordnung der Übertragungsfunktion (3.60) um die Entwicklungsstelle  $s_0$  dar (SU ET AL. 2004).

### 3.2.8 Normen

#### 3.2.8.1 Allgemeines

Normen dienen in der Systemtheorie dazu, das Verhalten unterschiedlicher Systeme hinsichtlich bestimmter Eigenschaften quantifizierbar und somit vergleichbar zu machen. Sie können auf Vektoren, Matrizen oder Funktionen angewendet werden. Die Normierung bildet die zu normierende Größe aus dem Vektorraum  $\mathcal{V}$  auf die positiven reellen Zahlen ab und schafft somit eine Vergleichbarkeit mit den anderen Größen desselben Raumes (ANTOULAS 2005, BRONSTEIN ET AL. 2008):

$$\|\cdot\| : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}. \quad (3.71)$$

#### 3.2.8.2 Vektornormen

Für Vektoren stellt die sog.  $p$ -Norm eine geeignete und häufig verwendete Klasse dar, die nach BRONSTEIN ET AL. (2008) wie folgt für reelle Zahlen definiert ist:

$$\|\mathbf{x}\| = \begin{cases} \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } 1 \leq p < \infty \\ \max_{i \in \{1, \dots, n\}} (|x_i|) & \text{für } p = \infty \end{cases} \quad (3.72)$$

Für  $p = 2$  ergibt sich die sog. euklidische Norm, deren besondere Bedeutung darin liegt, dass sie für Vektoren des  $\mathbb{R}^3$  die Längen im dreidimensionalen Raum bestimmt:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x}}. \quad (3.73)$$

Geht  $p$  ins Unendliche, so dominiert der größte Eintrag des Vektors immer mehr, was durch die Maximumsfunktion in (3.72) ausgedrückt wird.

### 3.2.8.3 Matrixnormen

Eine für den Kontext der vorliegenden Arbeit relevante, auf Matrizen anwendbare Norm ist die sog. Schatten- $p$ -Norm, welche die Singulärwerte (vgl. Gleichung (3.11)) der Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n \times m}$  heranzieht (ANTOULAS 2005):

$$\|\mathbf{A}\|_{S,p} = \begin{cases} \left( \sum_{k=1}^{\min\{n,m\}} \sigma_k^p(\mathbf{A}) \right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } 1 \leq p < \infty \\ \max_{1 \leq k \leq \min\{n,m\}} (\sigma_k(\mathbf{A})) & \text{für } p = \infty \end{cases} \quad (3.74)$$

Der Sonderfall für  $p = 2$  wird Frobenius-Norm genannt und entspricht der euklidischen Norm im  $(n \times m)$ -dimensionalen Raum. Dies wird durch den Index  $F$  gekennzeichnet und kann wie in (3.74) über die Summe der Quadrate der Singulärwerte  $\sigma_k$  oder für eine quadratische  $(n \times n)$ -Matrix auch über die Spur berechnet werden (ANTOULAS 2005):

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2(\mathbf{A})} = \sqrt{\text{spur}(\mathbf{A}^* \mathbf{A})}. \quad (3.75)$$

### 3.2.8.4 Signalnormen

Eine weitere Klasse repräsentieren die sog. Signalnormen, welche sich auf vektor- oder matrixwertige Funktionen anwenden lassen. Für Funktionen des Zeitbereichs wird hierfür wieder die  $p$ -Norm herangezogen. Diese lautet für die im Intervall  $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$  stetige Funktion  $f(t)$ :

$$\|f(t)\|_p = \begin{cases} \left( \int_{t \in \mathcal{I}} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } 1 \leq p < \infty \\ \sup_{t \in \mathcal{I}} (|f(t)|) & \text{für } p = \infty \end{cases} \quad (3.76)$$

Für den Grenzwert  $p \rightarrow \infty$  dominiert das Supremum der Funktion  $f(t)$  im Intervall  $\mathcal{I}$ . Im Fall  $\|f\|_\infty = \gamma$  bedeutet dies, dass  $\gamma$  den kleinsten Wert im betrachteten Intervall darstellt, der von den Funktionswerten nicht mehr überschritten wird.

Liegt eine Funktion dagegen im Frequenzbereich vor, so kommen die sogenannten  $\mathcal{H}$ -Normen zum Tragen. Dazu wird die komplexwertige Funktion  $\mathbf{F}$  betrachtet, welche in der offenen rechten Halbebene  $\mathbb{C}_+ \subset \mathbb{C}$  mit der Frequenzvariablen  $s = \sigma + i\omega, \sigma > 0$  analytisch ist, was bedeutet, dass die Funktion in

jedem Punkt von  $\mathbb{C}_+$  in eine Taylorreihe entwickelt werden kann. Die  $\mathcal{H}_p$ -Norm lautet demnach für die Funktion:

$$\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}_p} = \begin{cases} \left( \frac{1}{2\pi} \sup_{\beta > 0} \int_{-\infty}^{\infty} \|\mathbf{F}(\sigma + i\omega)\|_{S,p}^p d\omega \right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } 1 \leq p < \infty \\ \sup_{s \in \mathbb{C}_+} (\|\mathbf{F}(s)\|_{S,p}) & \text{für } p = \infty \end{cases} \quad (3.77)$$

Es ist zu erkennen, dass innerhalb der  $\mathcal{H}_p$ -Norm die Schatten- $p$ -Norm angewendet wird.

Im Kontext der Modellreduktion sind insbesondere die Normen mit  $p = 2$  und  $p = \infty$  relevant, die als

$$\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}_2} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{spur}(\mathbf{F}^*(-i\omega) \cdot \mathbf{F}(i\omega)) d\omega} \quad (3.78)$$

und

$$\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}(\mathbf{F}(i\omega)) \quad (3.79)$$

definiert sind (ANTOULAS 2005).

### 3.2.8.5 Systemnormen

Werden die vorgestellten Normen auf stabile LTI-Systeme der Form (3.32) angewendet, so kommen die Übertragungsfunktionen  $\mathbf{H}(s)$  des betrachteten Systems zum Tragen. Die  $\mathcal{H}_2$ -Norm eines LTI-Systems  $\Sigma_{1o}$  lautet:

$$\|\Sigma_{1o}\|_{\mathcal{H}_2} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{spur}(\mathbf{H}^*(-i\omega) \cdot \mathbf{H}(i\omega)) d\omega}. \quad (3.80)$$

Der Ausdruck  $\text{spur}(\mathbf{H}^*(-i\omega) \cdot \mathbf{H}(i\omega))$  definiert die Summe der quadrierten Amplitudenverstärkungen der Anteile am Übertragungsverhalten. Demnach kann die  $\mathcal{H}_2$ -Norm als durchschnittliche Verstärkung des Eingangssignals über den gesamten Frequenzbereich interpretiert werden und repräsentiert somit ein Maß für die in der Impulsantwort des Systems enthaltene Energie (GAWRONSKI 2004).

Ebenfalls lässt sich die  $\mathcal{H}_\infty$ -Norm auf LTI-Systeme anwenden. Äquivalent zu Gleichung (3.79) lautet diese:

$$\|\Sigma_{1o}\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}(\mathbf{H}(i\omega)). \quad (3.81)$$

Dabei ist  $\sigma_{max}(\mathbf{H}(\omega))$  der größte Singulärwert von  $\mathbf{H}(\omega)$ . Für den Fall eines SISO-Systems ergibt die Berechnung der  $\mathcal{H}_\infty$ -Norm den größten Wert, den die Amplitudenverstärkung im betrachteten Frequenzbereich annimmt. Sie gibt somit die größte Verstärkung an, die ein Eingangssignal bei einer bestimmten Anregungsfrequenz erfahren kann.

Diese Normen stellen ein bewährtes Mittel für die quantitative Bewertung eines Systems dar. Sollen bspw. die Amplituden der Übertragungsfunktion eines Systems hinsichtlich der o. g. Normen minimiert werden, so bedeutet dies bei Verwendung der  $\mathcal{H}_2$ -Norm eine Reduktion der durchschnittlichen richtungsunabhängigen Amplitudenverstärkung über den gesamten Frequenzbereich, da die Summe aller Singulärwerte über alle Frequenzen hinweg minimiert wird. Die Anwendung der  $\mathcal{H}_\infty$ -Norm hingegen führt zur Reduktion desjenigen Funktionswerts der Übertragungsfunktion, welcher den größten Betrag aufweist und sich somit auf eine Anregungsfrequenz und -richtung bezieht (GAWRONSKI 2004).

Liegt ein System in modaler Beschreibung vor, welches durch die einzelnen entkoppelten Anteile beschrieben wird, so lassen sich nach GAWRONSKI (2004) die Normen auch auf die Beiträge der einzelnen Moden anwenden. Der Frequenzgang einer einzelnen Mode ist durch ein globales Maximum bei der zugehörigen Eigenfrequenz gekennzeichnet. Die  $\mathcal{H}_\infty$ -Norm gibt dann den Betrag des Maximums wieder, während die  $\mathcal{H}_2$ -Norm die Fläche unter dem Frequenzgang repräsentiert. Damit besteht die Möglichkeit, einzelne Moden miteinander vergleichbar zu machen oder auch Auswirkungen von Systemänderungen auf einzelne Moden zu quantifizieren.

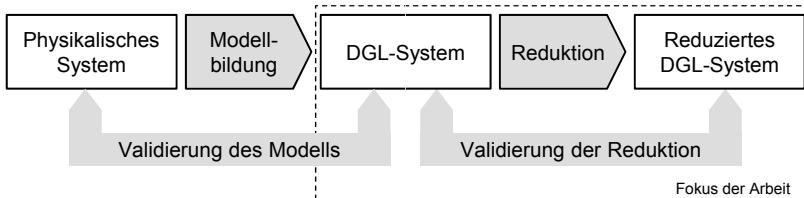
Die erläuterten Normen werden in der Ordnungsreduktion beispielsweise angewendet, wenn das reduzierte System mit dem Originalsystem verglichen werden soll, indem der Approximationsfehler bezüglich einer geeigneten Norm berechnet wird und das Übertragungsverhalten somit quantifiziert wird. Je nach Anwendungsfall und Untersuchungsfokus wird dann eine der beschriebenen Normen herangezogen.

### 3.3 Allgemeines zur Modellordnungsreduktion

Modellordnungsreduktionsverfahren kommen in der Regel dann zum Einsatz, wenn bei der Modellierung von physikalischen Systemen sehr große Gleichungssysteme entstehen. Insbesondere die detailgetreue Abbildung von Werkzeugmaschinen mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode führt zu einem hochdimensionalen Gleichungssystem, dessen Lösung extrem zeitaufwendig ist. Das Ziel aller Modellordnungsreduktionsverfahren liegt in der Bestimmung eines bedeutend kleineren Systems, das eine Berechnung einer Lösung mit erheblich geringerem

Zeit- und Speicheraufwand ermöglicht und dabei das Originalsystem möglichst gut approximiert. Gleichzeitig sollen die Eigenschaften wie bspw. Stabilität, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit (siehe Abschnitt 3.2.5) erhalten bleiben.

Die Einordnung des Reduktionsprozesses in die Vorgehensabfolge vom physikalischen System bis hin zum reduzierten Gleichungssystem ist in Bild 3.4 dargestellt. Im Rahmen der Modellbildung gilt es, eine geeignete mathematische Beschreibung zu finden, welche die Realität möglichst genau abbildet. Um dies zu überprüfen, muss das Modell einer Validierung unterzogen werden. Hierfür kommt häufig ein messtechnischer Abgleich zum Einsatz, bei dem die Berechnungsergebnisse des Modells mit den Messergebnissen des physikalischen Systems verglichen und ggf. iterativ Anpassungen des Modells vorgenommen werden. Im nächsten Schritt wird das hochdimensionale Modell dann einer Ordnungsreduktion unterzogen, welche als Ergebnis ein Gleichungssystem kleinerer Dimension ausgibt. Die Überprüfung der Approximationsqualität wird im Rahmen der Validierung der Reduktion durchgeführt. Hierzu werden die Berechnungsergebnisse des reduzierten Modells mit denen des Originalmodells verglichen und nach definierten Kriterien oder Normen (siehe Abschnitt 3.2.8) ausgewertet.



*Bild 3.4: Einordnung des Reduktionsprozesses in die Vorgehensabfolge vom physikalischen System bis zum reduzierten Gleichungssystem im Rahmen der entwicklungsbegleitenden Simulation*

Da der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit auf Ordnungsreduktionsverfahren und auf deren Einsatz im Rahmen der Simulation von Werkzeugmaschinen liegt, wird der Schritt der Modellvalidierung hier nicht betrachtet. Für die nachfolgenden Darlegungen dieser Arbeit werden Differenzialgleichungssysteme verwendet, die das Verhalten von Werkzeugmaschinen beschreiben und deren Modellgüte bereits gegenüber der Realität verifiziert wurde.

### 3.4 Betrachtete Verfahren

In den Disziplinen der Mathematik und der Regelungstheorie gibt es eine Vielzahl von Ordnungsreduktionsverfahren für diverse Anwendungen. Für die Reduktion eines linearen Gleichungssystems mit sehr großen, dünn besetzten Koeffizientenmatrizen, wie es durch die Modellierung des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen mit Hilfe der FEM entsteht, kommen bislang nahezu ausschließlich die modalen Reduktionsverfahren zum Einsatz. Hierbei wird das Originalsystem mit Hilfe eines Satzes berechneter Eigenvektoren in einen kleineren Raum, den modalen Raum, projiziert. Dies führt dazu, dass die Eigenwerte des Originalsystems auch im reduzierten Modell exakt erhalten bleiben (RICKELT-ROLF 2009), der Approximationsfehler allerdings nicht vorab bestimmt werden kann (VARGA 1995).

Die Krylov-Unterraum-basierten Verfahren, welche ebenfalls zu den Projektionsverfahren zählen, besitzen großes Potenzial für die Anwendung auf strukturmechanische Modelle, da sie hinsichtlich ihrer Automatisierbarkeit etliche Vorteile bieten. Zudem besteht mit Hilfe sog. Fehlerschätzer die Möglichkeit, vorgegebene Fehlerschranken einzuhalten (GRIMME 1997).

Ein weitere Methode, welche sich für lineare Systeme prinzipiell eignet, ist das balancierte Abschneiden, auch *Balanced Truncation Approximation* genannt. Hinsichtlich der erreichbaren Approximationsqualität und des Einsatzes von Fehlerschranken stellt sich dieses Verfahren als nahezu ideal dar. Aufgrund des hohen mathematischen Aufwandes, um die sog. balancierte Form des Systems zu erreichen, leidet die Recheneffizienz des Verfahrens stark, weshalb es unter industriellen Ansprüchen nicht sinnvoll auf große Gleichungssysteme der FEM anwendbar ist (LEHNER 2007).

Bild 3.5 stellt die wichtigsten Eigenschaften der genannten Verfahren mit Blick auf den Einsatz im Rahmen der Simulation von Werkzeugmaschinen einander gegenüber. Neben dieser Auswahl gibt es ein Vielzahl weiterer Reduktionsverfahren für spezielle Anwendungen, die hier nicht näher betrachtet werden. Im Mittelpunkt dieser Arbeit stehen die Krylov-Unterraum-basierten Verfahren, deren Eignung für die Anwendung auf strukturmechanische Modelle von Werkzeugmaschinen untersucht werden soll.

	Modale Reduktion	Krylov-Unterraum-basierte Verfahren	Balanced Truncation Approximation		
Anwendbarkeit auf sehr große Modelle	●	●	●		
Automatisierbarkeit	●	●	●		
Genauigkeit	●	●	●		
Einsatz von Fehlerschranken	○	●	●		
Legende:	● sehr gut	● gut	● mittel	● schlecht	○ nicht möglich

Bild 3.5: Gegenüberstellung wichtiger Eigenschaften der *modalen Reduktion*, der *Krylov-Unterraum-basierten Verfahren* sowie der Methode *Balanced Truncation Approximation*

### 3.5 Reduktion durch Projektion

Eine Vielzahl von Ordnungsreduktionsverfahren basiert auf der Grundidee, das hochdimensionale Originalsystem mit Hilfe eines Projektors auf einen Unterraum kleinerer Dimension zu projizieren, wie es in Abschnitt 3.2.3 beschrieben ist. Hierzu wird der Unterraum  $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{K}^n$  der Dimension  $r$  herangezogen. Dieser wird durch die Matrix  $\mathbf{V}_r \in \mathbb{K}^{n \times r}$  aufgespannt, deren Spaltenvektoren den Raum  $\mathcal{V}$  definieren, d. h.  $\text{colspan}(\mathbf{V}_r) = \mathcal{V}$ . Der Unterraum ist dabei so zu wählen, dass gilt:

$$\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{V}_r \hat{\mathbf{x}}(t). \quad (3.82)$$

Wird Gleichung (3.82) in das System (3.28) eingesetzt, so wird dieses im Unterraum  $\mathcal{V}$  dargestellt:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{V}_r \ddot{\hat{\mathbf{x}}}(t) + \mathbf{D}\mathbf{V}_r \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{V}_r \hat{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\epsilon}(t) \\ \mathbf{y}(t) &\approx \mathbf{C}_p \mathbf{V}_r \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_v \mathbf{V}_r \hat{\mathbf{x}}(t). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Dies alleine führt aber noch zu keiner Reduktion der Systemdimension. Wie in Gleichung (3.83) zu erkennen ist, bleibt in dem überbestimmten System ein Residuum  $\boldsymbol{\epsilon}(t) \neq 0$  bestehen, an welches Nebenbedingungen in Form von Orthogonalitätsbedingungen bezüglich eines zweiten Unterraumes  $\mathcal{W}$ , auch *Petrov-Galerkin-Bedingungen* genannt, gestellt werden. Um diesen nachzukommen, wird die Matrix  $\mathbf{W}_r$ , deren Spaltenvektoren eine Basis des Unterraumes  $\mathcal{W}$  aufspannen und die dieselbe Dimension wie  $\mathbf{V}_r$  besitzt, herangezogen. Die

geforderte Bedingung wird durch eine Linksmultiplikation mit  $\mathbf{W}_r^*$  erfüllt:

$$\mathbf{W}_r^*(\mathbf{M}\mathbf{V}_r\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\mathbf{V}_r\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{V}_r\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{B}\mathbf{u}(t)) = 0. \quad (3.84)$$

Unter der Annahme, dass  $\mathbf{W}_r^*\mathbf{V}_r$  nicht singulär ist, kann Gleichung (3.84) nach einer weiteren Multiplikation mit  $(\mathbf{W}_r^*\mathbf{V}_r)^{-1}$  von links für alle  $t$  wie folgt formuliert werden:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{W}_r^*\mathbf{V}_r)^{-1}\mathbf{W}_r^*\mathbf{M}\mathbf{V}_r\ddot{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{W}_r^*\mathbf{V}_r)^{-1}\mathbf{W}_r^*\mathbf{D}\mathbf{V}_r\dot{\mathbf{x}}(t) + \\ &(\mathbf{W}_r^*\mathbf{V}_r)^{-1}\mathbf{W}_r^*\mathbf{K}\mathbf{V}_r\hat{\mathbf{x}}(t) - (\mathbf{W}_r^*\mathbf{V}_r)^{-1}\mathbf{W}_r^*\mathbf{B}\mathbf{u}(t) = 0. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Dies liefert dann das reduzierte System zweiter Ordnung der Dimension  $r$  mit den Systemmatrizen

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{M}} &= \mathbf{W}^*\mathbf{M}\mathbf{V}, \quad \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{W}^*\mathbf{D}\mathbf{V}, \quad \hat{\mathbf{K}} = \mathbf{W}^*\mathbf{K}\mathbf{V}, \\ \hat{\mathbf{B}} &= \mathbf{W}^*\mathbf{B}; \quad \hat{\mathbf{C}}_p = \mathbf{C}_p\mathbf{V}, \quad \hat{\mathbf{C}}_v = \mathbf{C}_v\mathbf{V} \end{aligned} \quad (3.86)$$

mit

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_r \quad \text{und} \quad \mathbf{W}^* = (\mathbf{W}_r^*\mathbf{V}_r)^{-1}\mathbf{W}_r^*. \quad (3.87)$$

Für den Fall, dass die beiden Matrizen  $\mathbf{V}_r$  und  $\mathbf{W}_r$  biorthonormal sind, d. h. wenn  $\mathbf{W}_r^*\mathbf{V}_r = \mathbf{I}$  gilt, vereinfachen sich die Gleichungen (3.87) zu:

$$\mathbf{W}^* = \mathbf{W}_r^* \quad \text{und} \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_r. \quad (3.88)$$

Die Reduktion ist dabei nicht auf die Matrizen  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{W}$  beschränkt. Nach GRIMME (1997) oder LI (2000) ist die Wahl der Basen der Unterräume  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$  für die Berechnung des reduzierten Systems nicht von Bedeutung, denn wenn die Spaltenvektoren der Matrizen  $\bar{\mathbf{V}}$  und  $\bar{\mathbf{W}}$  ebenfalls eine Basis der Vektorräume  $\mathcal{V}$  bzw.  $\mathcal{W}$  bilden, dann ist das mit diesen Matrizen reduzierte System äquivalent dem durch die Matrizen  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{W}$  reduzierten System (3.86).

In Bild 3.6 ist die beschriebene Reduktion der Dimension eines Gleichungssystems zweiter Ordnung nochmals grafisch veranschaulicht.

Nachdem die Grundlagen zur Reduktion von Gleichungssystemen durch Projektionsmethoden nun aufbereitet wurden, folgt in den nächsten Abschnitten eine detailliertere Erläuterung der modalen sowie der auf Krylov-Unterräumen basierenden Reduktionsverfahren.

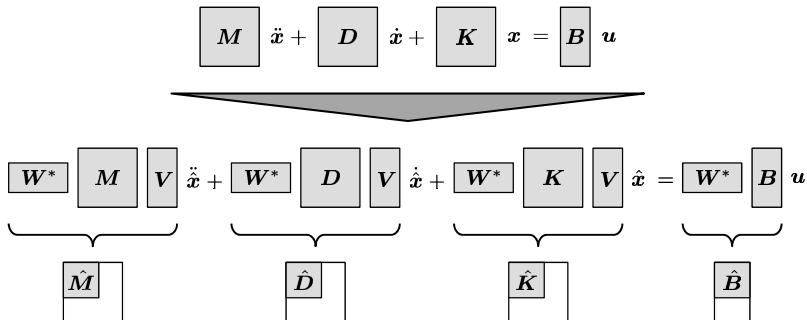


Bild 3.6: Schematische Darstellung der Reduktion durch Projektion und der resultierenden Verkleinerung der Dimension der Strukturmatrizen (BONIN ET AL. 2011b)

## 3.6 Modale Reduktion

### 3.6.1 Modales Abschneiden

Die *modale Reduktion* stellt in der Strukturdynamik bislang die am häufigsten eingesetzte Methode zur Modellordnungsreduktion dar. Hierbei werden die Strukturverformungen durch die Überlagerung einer Auswahl der berechneten Eigenvektoren abgebildet, was als *modale Synthese* bezeichnet wird. Der Begriff *modales Abschneiden* röhrt daher, dass für die *Modalsynthese* nur eine Auswahl von Eigenmoden verwendet und der Rest abgeschnitten und somit vernachlässigt wird. Da dies die Grundlage jeglicher Ausprägung der auf der Lösung des Eigenwertproblems basierenden Reduktionsverfahren bildet, wird hierfür in der vorliegenden Arbeit der übergeordnete Begriff *modale Reduktion* verwendet. Zur Erreichung einer kleineren Systemdimension sind bei der Anwendung der modalen Reduktion demnach drei Schritte nötig, welche in Bild 3.7 visualisiert sind.

Im ersten Schritt wird, wie in Abschnitt 2.4.3 beschrieben, das Eigenwertproblem (2.9) des ungedämpften Systems gelöst. Als Resultat liegen dann die Eigenvektormatrix  $\Phi$  und die Eigenwertmatrix  $\Omega^2$  vor, die jeweils die Dimension  $n$  des Orginalsystems besitzen. Im zweiten Schritt erfolgt die Auswahl der für die Transformation verwendeten Eigenvektoren, d. h. es werden die nicht relevanten Eigenvektoren spaltenweise aus der Eigenvektormatrix entfernt, was zu einer Verkleinerung derselben führt. Die Identifikation der relevanten Eigenvektoren stellt dabei den Kernpunkt der modalen Reduktion dar, da dies über die Approximationsqualität des reduzierten Modells entscheidet. In der

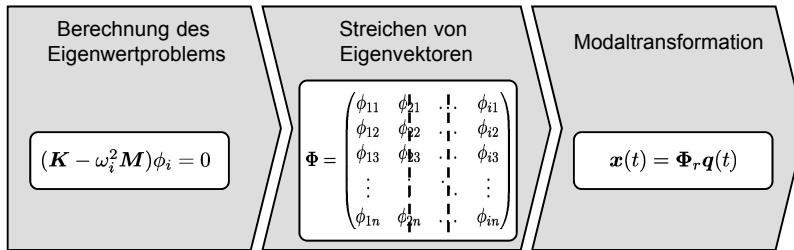


Bild 3.7: Vorgehen der modalen Reduktion

Praxis, d. h. in aktuellen FEM-Simulationsumgebungen, werden i. d. R. zunächst  $i$  Eigenfrequenzen mit ihren zugehörigen -vektoren bis zu einer bestimmten Grenzfrequenz berechnet. Alle Eigenfrequenzen oberhalb dieser Grenze werden vernachlässigt. Die Rechtfertigung hierfür liegt in der Annahme, dass die hochfrequenten Systemanteile keinen dominanten Einfluss auf das Systemverhalten haben. Wenngleich es keine festen Regeln für dieses Abschneiden gibt, sind in der Literatur Empfehlungen zu finden, dass alle Eigenmoden bis zum doppelten Wert der höchsten zu erwartenden Erregerfrequenz zu berücksichtigen sind (GASCH & KNOTHE 1989). Darüber hinaus können noch weitere Spaltenvektoren der berechneten Modalmatrix  $\Phi$  entfernt werden, die durchaus im betrachteten Frequenzbereich liegen, sofern diese als nicht-dominant erachtet werden. Im dritten Schritt kommt es zur eigentlichen Reduktion. Hierfür werden die verbliebenen Spaltenvektoren der Modalmatrix als Projektionsmatrix  $\Phi_r$  verwendet (siehe Abschnitt 3.5). Wie in Gleichung (3.86) allgemein angedeutet, werden die Strukturmatrizen hierbei jeweils durch eine Linksmultiplikation mit  $\Phi_r$  und Rechtsmultiplikation mit  $\Phi_r^T$  in den modalen Raum projiziert.

Für die entsprechende Auswahl der zu berücksichtigenden Eigenmoden wurden in der Vergangenheit verschiedene Ansätze vorgestellt. Hierzu sei bspw. das Verfahren nach LITZ (1979) erwähnt, welches aufbauend auf den Arbeiten von DAVISON (1966) und CHIDAMBARA (1969) die Bestimmung der wesentlichen Eigenwerte anhand von Dominanzmaßen vornimmt. Auf Basis der Gleichungen (3.50) und (3.51) lässt sich die Übertragungsfunktion als Überlagerung einzelner Moden für einen Übertragungspfad von einem definierten Eingang zu einem Ausgang der Struktur bestimmen. Daraus können die Litz'schen Übertragungsdominanzen abgeleitet werden, die eine quantitative Aussage über die Beteiligung der einzelnen Eigenwerte an einem bestimmten Übertragungsvorgang liefern und gleichzeitig als Maß für den durch die Vernachlässigung eines Eigenwerts entstandenen Fehler herangezogen werden können. Es sei aber erwähnt, dass für diese Fehlerbestimmung die Gesamtheit aller Eigenwerte als

Referenz benötigt wird, deren Berechnung bei hochdimensionalen Systemen aufgrund des beträchtlichen numerischen Aufwandes nicht mehr praktikabel ist. Der Reduktionsfehler gegenüber dem Originalmodell lässt sich demnach bei hohen Systemordnungen nicht mehr quantifizieren, was einen generellen Nachteil der modalen Reduktionsverfahren darstellt.

Eine weitere Möglichkeit zur Auswahl der relevanten Moden ist die Verwendung von Normen (GAWRONSKI 2004). Wie in Abschnitt 3.2.8.5 beschrieben, bietet die  $H_2$ -Norm eine Möglichkeit, die Beiträge einzelner Moden zum dynamischen Verhalten einer Struktur und zu dessen Übertragungsverhalten zu quantifizieren. Nach der Berechnung der Normen der einzelnen Moden wird die Modalmatrix spaltenweise umsortiert, wobei mit den größten Beträgen begonnen wird. Auf diese Weise wird sichergestellt, dass die dominanten Anteile im reduzierten System erhalten bleiben. Die Problematik, dass bei großen Systemdimensionen nur eine bestimmte Anzahl von Eigenfrequenzen und -moden berechnet werden kann, aus welchen dann die dominanten Anteile durch Sortieren und Abschneiden extrahiert werden, um das bestmögliche Reduktionsergebnis zu erzielen, hat aber weiter Bestand. Darüber hinaus besteht auch bei diesem Verfahren keine Möglichkeit, den Approximationsfehler zu bestimmen, sofern nicht alle Eigenwerte berechnet wurden, was i. d. R. aufgrund des Aufwandes und in der praktischen Anwendung nicht wirtschaftlich ist.

### 3.6.2 Substrukturtechnik

Die Substrukturtechnik, auch *Component Mode Synthesis* oder Superelementmethode genannt, kommt insbesondere in flexiblen Mehrkörpersystemen oder in großen FEM-Modellen, die diversen Iterationsrechnungen mit entsprechender Parametervariation unterzogen werden sollen, zur Anwendung (Bild 3.12). Der Grundgedanke besteht in der Unterteilung des Gesamtsystems in einzelne Substrukturen, die getrennt voneinander reduziert und im Anschluss wieder zusammengesetzt werden.

Die am weitesten verbreitete Methode hierzu wurde von CRAIG & BAMPTON (1968) vorgestellt und ist auch heute in vielen Simulationsumgebungen implementiert. Diese basiert auf einer sog. gemischten Kondensation, d. h. einer Kombination aus statischer und dynamischer (modaler) Kondensation. Die Kondensationsverfahren gehen zurück auf HURTY (1965) bzw. GUYAN (1965) und beruhen auf einer Einteilung des Systems in Haupt- und Nebenfreiheitsgrade. Als Hauptfreiheitsgrade dienen diejenigen Strukturpunkte, welche in Wechselwirkungen mit der Umgebung stehen. Auf diese Weise wird sowohl das statische als auch das dynamische Verhalten der Komponenten abgebildet. Da der modale Ansatz aber äußere Lasten nur unzureichend approximiert, wurde von CRAIG & BAMPTON (1968) die Verwendung sog. Korrekturmoden

vorgeschlagen. Hierfür wird die zu berechnende Komponente an den Knoten der Hauptfreiheitsgrade als fest eingespannt modelliert und die Eigenmoden der fixierten Struktur werden berechnet. Zusätzlich wird je ein Knotenpunkt von der Einspannung gelöst und mit einer Einheitsverschiebung beaufschlagt. Daraus lassen sich lokale Korrekturmoden berechnen, die ebenfalls in die Transformationsmatrix für die Reduktion aufgenommen werden. Weitere detaillierte Ausführungen sowie eine Literaturübersicht zur Substrukturtechnik sind z. B. in (GASCH & KNOTHE 1989, RICKELT-ROLF 2009) zu finden.

Allen modalen Ansätzen zur Reduktion großer FEM-Strukturen ist eine weitere Einschränkung im Hinblick auf die Wahl des Dämpfungsansatzes gemein. Nachdem der Bestimmung der Modalmatrix die Lösung des reellen Eigenwertproblems zugrunde liegt, wird in der Regel eine nachträglich erzeugte Dämpfungsmaßmatrix verwendet, die entweder über den Proportionalansatz oder unter Verwendung eines Lehr'schen Dämpfungsmaßes für jede der berechneten Eigenmoden erzeugt wurde. Dies stellt aber stets nur eine globale Beschreibung der Dämpfung dar und gibt keinerlei Informationen bezüglich lokaler Dämpfungseffekte wieder.

## 3.7 Krylov-Unterraum-Verfahren

### 3.7.1 Definition von Krylov-Unterräumen

Ein Krylov<sup>5</sup>-Unterraum ist ein Untervektorraum des Spaltenvektorraumes  $\mathbb{K}^n$ , der durch sich wiederholende Matrix-Vektor-Produkte der quadratischen Matrix  $\mathbf{P} \in \mathbb{K}^{n \times n}$  und den Spaltenvektor  $\mathbf{q} \in \mathbb{K}^n$  gegeben ist. Ein Krylov-Unterraum der Stufe  $m$  ist demnach definiert als (SAAD 2003, FREUND 2003):

$$\mathcal{K}_m(\mathbf{P}, \mathbf{q}) = \text{span}(\{\mathbf{q}, \mathbf{P}\mathbf{q}, \mathbf{P}^2\mathbf{q}, \dots, \mathbf{P}^{m-1}\mathbf{q}\}). \quad (3.89)$$

Der Vektor  $\mathbf{q}$  wird dabei Startvektor genannt. Die linear unabhängigen Vektoren der Sequenz

$$\{\mathbf{q}, \mathbf{P}\mathbf{q}, \mathbf{P}^2\mathbf{q}, \dots, \mathbf{P}^{m-1}\mathbf{q}\} \quad (3.90)$$

werden als Basisvektoren des Krylov-Unterraumes bezeichnet. Sobald der  $i$ -te Vektor ( $i < m$ ) der Sequenz (3.90) eine Linearkombination der vorangegangenen Vektoren bildet, können auch die folgenden Vektoren als Linearkombination der ersten ( $i - 1$ ) Vektoren geschrieben werden. Daher gelten lediglich die ersten

---

<sup>5</sup> Benannt nach dem russischen Schiffsbauingenieur und Mathematiker Aleksei Nikolaeivich Krylov (\*1863 †1945).

$i$  linear unabhängigen Vektoren als Basis des Krylov-Unterraumes  $\mathcal{K}_m(\mathbf{P}, \mathbf{q})$  (SOPPA 2011).

Liegt mehr als ein Startvektor  $\mathbf{q}$  vor (hier Anzahl  $k$ ), werden diese mehreren Startvektoren in der Startmatrix  $\mathbf{Q}$  für die sog. Blockversion des oben definierten Krylov-Unterraumes zusammengefasst. Der Block-Krylov-Unterraum der Stufe  $m$  zur Matrix  $\mathbf{P} \in \mathbb{K}^{n \times n}$  und einer Startmatrix  $\mathbf{Q} \in \mathbb{K}^{n \times k}$  ist demnach definiert als:

$$\mathcal{K}_m(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \text{colspan}(\{\mathbf{Q}, \mathbf{PQ}, \mathbf{P}^2\mathbf{Q}, \dots, \mathbf{P}^{m-1}\mathbf{Q}\}). \quad (3.91)$$

Auch hier gilt, dass die linear unabhängigen Vektoren eine Basis des Block-Krylov-Unterraumes ergeben. Der Block-Krylov-Unterraum  $\mathcal{K}_m(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$  mit  $k$  Startvektoren kann als Vereinigung von  $k$  Krylov-Unterräumen der Form (3.89) für jeden der Startvektoren angesehen werden (GOLUB & VAN LOAN 1996, SAAD 2003).

Darüber hinaus wurden auch sog. Block-Krylov-Unterräume zweiter Ordnung vorgestellt, die bspw. für die Reduktion von DGL-Systemen zweiter Ordnung in Frage kommen (z. B. SALIMBAHRAWI 2005, BAI & SU 2005b). Ein Block-Krylov-Unterraum zweiter Ordnung der Stufe  $m$  der zwei Matrizen  $\mathbf{P}_1 \in \mathbb{K}^{n \times n}$  und  $\mathbf{P}_2 \in \mathbb{K}^{n \times n}$  sowie einer Startmatrix  $\mathbf{Q} \in \mathbb{K}^{n \times k}$  ist definiert als:

$$\mathcal{G}_m(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{Q}) = \text{colspan}(\{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{m-1}\}), \quad (3.92)$$

wobei gilt:

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{Q}, \quad (3.93)$$

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{P}_1 \mathbf{X}_0, \quad (3.94)$$

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{P}_1 \mathbf{X}_{i-1} + \mathbf{P}_2 \mathbf{X}_{i-2}, \quad i = 2, 3, \dots, m-1. \quad (3.95)$$

Wie auch bei den oben beschriebenen (Block-)Krylov-Unterräumen bilden die linear unabhängigen Vektoren von (3.92) die Basisvektoren des Block-Krylov-Unterraumes zweiter Ordnung.

### 3.7.2 Approximation durch Momentenabgleich

Bei den Reduktionsverfahren auf der Basis von Krylov-Unterräumen handelt es sich ebenfalls um Projektionsverfahren. Im Gegesatz zu den modalen Methoden wird hierbei jedoch das Ein-/Ausgangsverhalten dynamischer Systeme approximiert. Dazu wird die Projektionsmatrix durch eine mathematische Systembewertung bestimmt, indem die in Abschnitt 3.2.6 definierte Übertragungsfunktion  $\mathbf{H}(s)$  mit Hilfe eines sog. Momentenabgleichs interpoliert wird.

Wie in Abschnitt 3.2.7 beschrieben, kann die Übertragungsfunktion als Potenzreihenentwicklung um die Stelle  $s_0 \in \mathbb{C}$  geschrieben werden (Gleichung 3.56). Momentenabgleich oder *moment-matching* bedeutet dann, dass ein reduziertes System bestimmt wird, dessen erste Momente mit den ersten Momenten der Übertragungsfunktion des Originalsystems am Entwicklungspunkt übereinstimmen. Auf diese Weise kann die Übertragungsfunktion durch Interpolation approximiert werden.

Prinzipiell besteht die Möglichkeit, den Momenentenabgleich explizit zu berechnen. Ein Ansatz dazu wurde unter dem Begriff *Asymptotic Waveform Evaluation (AWE)* von CHIPROUT & NAKHLA (1994) vorgestellt. Er birgt aber die Gefahr, dass Systeme, welche auf eine Dimension ( $r > 10$ ) reduziert wurden, numerisch instabil sind und daher nicht weiter zu verwenden sind. Daher werden i. d. R. implizite Verfahren zur Approximation des Originalsystems verwendet, bei denen die oben vorgestellten Krylov-Unterräume zur Anwendung kommen. Um den impliziten Momentenabgleich mit Hilfe von Krylov-Unterräumen zu veranschaulichen, wird die Reihenentwicklung der Übertragungsfunktion des klassischen Zustandsraummodells eines SISO-Systems (vgl. Gleichung (3.45)) herangezogen. Die Reihenentwicklung um eine beliebige Stelle  $s_0 \in \mathbb{C}$  kann auf zwei verschiedene Weisen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} H(s) &= - \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{c} \left[ ((\mathbf{A} - s_0 \mathbf{I})^{-1})^j (\mathbf{A} - s_0 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{b} \right] (s - s_0)^j \\ &= - \sum_{j=0}^{\infty} \left( \left[ ((\mathbf{A} - s_0 \mathbf{I})^{-1})^j (\mathbf{A} - s_0 \mathbf{I})^{-*} \mathbf{c}^* \right] \right)^* \mathbf{b} (s - s_0)^j. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Dabei ist jeweils ein Teil der Momente der Reihe durch den Rahmen hervorgehoben, wobei der Unterschied in der Einbeziehung der Vektoren  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  liegt. Auf diese Weise ergeben sich die gleichen Strukturen der Momente in der Reihenentwicklung. Führt man in dieser Darstellung die Matrizen  $\mathbf{P}_e$  und  $\mathbf{P}_a$ , sowie die Vektoren  $\mathbf{q}_e$  und  $\mathbf{q}_a$  mit

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_e &= (\mathbf{A} - s_0 \mathbf{I})^{-1}, & \mathbf{q}_e &= (\mathbf{A} - s_0 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{b} \\ \mathbf{P}_a &= (\mathbf{A} - s_0 \mathbf{I})^{-*}, & \mathbf{q}_a &= (\mathbf{A} - s_0 \mathbf{I})^{-*} \mathbf{c}^* \end{aligned} \quad (3.97)$$

ein, so wird die Ähnlichkeit der Strukturen noch deutlicher:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(s) &= -\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{c} \{ \mathbf{P}_e^j \mathbf{q}_e \} (s - s_0)^j \\ &= -\sum_{j=0}^{\infty} \{ \mathbf{P}_a^j \mathbf{q}_a \} \mathbf{b} (s - s_0)^j.\end{aligned}\quad (3.98)$$

Dabei bedeutet die Indizierung mit  $e$  bzw.  $a$ , dass einmal der Eingangs- und einmal der Ausgangsvektor verwendet wurde. Werden diese aus der Potenzreihe in (3.98) ausgeklammert, ist zu erkennen, dass das Produkt aus  $\mathbf{P}^j$  und  $\mathbf{q}$  jeweils auf einen Vektor führt und die Reihendarstellung demnach eine Vektorkette beschreibt:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{c} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}_e^j \mathbf{q}_e (s - s_0)^j \right) \text{ bzw. } \mathbf{H}(s) = \left( \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}_a^j \mathbf{q}_a (s - s_0)^j \right) \mathbf{b}. \quad (3.99)$$

Erst das Skalarprodukt mit dem Ein- oder Ausgangsvektor führt schließlich auf den skalarwertenigen Funktionswert der Übertragungsfunktion des SISO-Systems. Bild 3.8 zeigt schematisch, dass die vom Index  $j$  abhängige Summendarstellung (3.99) eine unendliche Vektorkette bildet. Aufgrund der Systemdimension ( $\dim(\mathbf{A}) = n \times n$ ) ist eine maximale Anzahl von  $n$  linear unabhängigen Vektoren gegeben. Weitere Vektoren, die in der Reihe auftreten, können entsprechend nur noch linear abhängig von den vorherigen sein. Durch die Begrenzung der Reihe in (3.99) auf eine Anzahl  $m < n$  ergibt sich eine Approximation der Übertragungsfunktion  $\mathbf{H}(s)$ .

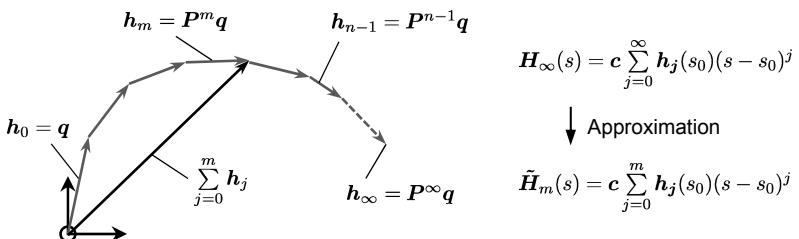


Bild 3.8: Schematische Darstellung der Approximation der Übertragungsfunktion im  $\mathbb{R}^3$ . Die Originalfunktion  $\mathbf{H}(s)$ , welche sich als Reihenentwicklung unendlicher Länge beschreiben lässt, wird hier durch eine Vektorkette aus  $m$  Einzelvektoren  $\mathbf{h}_j$  approximiert.

Bei der Betrachtung der Struktur der Momente in Gleichung (3.98) wird die Verbindung zu den Krylov-Unterräumen deutlich (vgl. (3.89)). Die Elemente der Krylov-Sequenz stimmen dabei mit den Eingangs- bzw. Ausgangsmomenten überein. Das ist die Voraussetzung dafür, die Momente der Übertragungsfunktion eines reduzierten Systems mit den Momenten der Übertragungsfunktion des Originalsystems implizit zur Übereinstimmung bringen zu können. Dies wiederum wird für die Reduktion des Systems ausgenutzt, indem der Zustandsvektor auf einen Untervektorraum projiziert wird, der von den ersten  $m$  Vektoren des Krylov-Unterraumes aufgespannt wird. Durch die Wahl der ersten Vektoren der Reihendarstellung in (3.99) ist implizit gewährleistet, dass die ersten  $m$  Momente der approximierten und der ursprünglichen Reihe übereinstimmen, was die Bezeichnung *Momentenabgleich* begründet. Je nachdem, wie  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{q}$  gewählt werden, d. h. ob die Eingangs- oder die Ausgangsmomente berücksichtigt werden, wird entweder der Eingangs-Krylov-Unterraum  $\mathcal{K}_m(\mathbf{P}_e, \mathbf{q}_e)$  der Stufe  $m$  oder der Ausgangs-Krylov-Unterraum  $\mathcal{K}_m(\mathbf{P}_a, \mathbf{q}_a)$  der Stufe  $m$  aufgespannt.

Zur Erläuterung des Momentenabgleichs wird die Übertragungsfunktion eines SISO-Systems nach Gleichung (3.45) herangezogen. Für ein allgemeines Zustandsraummodell (3.44) haben  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{q}$  nach SOPPA (2011) die Struktur:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_e &= (\mathbf{A} - s_0 \mathbf{E})^{-1} \mathbf{E}, & \mathbf{q}_e &= (\mathbf{A} - s_0 \mathbf{E})^{-1} \mathbf{b} \\ \mathbf{P}_a &= (\mathbf{A} - s_0 \mathbf{E})^{-*} \mathbf{E}^*, & \mathbf{q}_a &= (\mathbf{A} - s_0 \mathbf{E})^{-*} \mathbf{c}^*.\end{aligned}\quad (3.100)$$

Besitzt das System zudem mehrere Ein- bzw. Ausgänge, wird für den Momentenabgleich ein Block-Krylov-Unterraum, wie in Abschnitt 3.7.1 definiert, mit

$$\mathbf{Q}_e = (\mathbf{A} - s_0 \mathbf{E})^{-1} \mathbf{B} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{Q}_a = (\mathbf{A} - s_0 \mathbf{E})^{-*} \mathbf{C}^* \quad (3.101)$$

aufgespannt.

Ein Beweis dafür, dass die Momente des reduzierten und des originalen Modells für eine Reihenentwicklung um  $s_0$  tatsächlich übereinstimmen, ist anhand des nullten Moments  $h_0$  in LOHMANN & SALIMBAHRAMI (2004) gegeben. Mit diesem Beweisprinzip ist auch der Nachweis für die weiteren Momente möglich, der beispielsweise in SALIMBAHRAMI (2005) zu finden ist. Da die ersten Momente der Reihe den größten Einfluss auf die Approximationsgüte in der nahen Umgebung der Entwicklungsstelle haben, werden durch die ersten Vektoren der Krylovsequenz automatisch die wichtigsten Momente zur Übereinstimmung gebracht. Dies hat insbesondere bei der Entwicklung um die Stelle  $s_0 = 0$  eine besondere Bedeutung, da das Moment  $m_0$  die stationäre Verstärkung ausdrückt, welche dadurch bei dieser Art der Reduktion erhalten bleibt (LOHMANN & SALIMBAHRAMI 2004). Im Vergleich zur modalen Reduktion weisen die

Krylov-Unterraum-basierten Verfahren somit den Vorteil auf, dass das statische Verhalten ohne Verluste approximiert wird.

### 3.7.3 Ein- und zweiseitige Krylov-Unterraum-Verfahren

Für die eigentliche Ordnungsreduktion werden im nächsten Schritt die Projektionsmatrizen  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{W} \in \mathbb{K}^{n \times r}$  benötigt. Demnach muss eine Basis des Krylov-Unterraumes gefunden werden, um die geforderte Übereinstimmung der Momente zu gewährleisten. Wird hierfür der Eingangs-Krylov-Unterraum mit  $\mathbf{P}_e$  und  $\mathbf{q}_e$  bzw.  $\mathbf{Q}_e$  aus (3.97) herangezogen, ist eine Projektionsmatrix  $\mathbf{V}$  zu bestimmen, so dass gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_m(\mathbf{P}_e, \mathbf{q}_e) &\subseteq \mathcal{V} = \text{colspan}(\mathbf{V}) \quad \text{bzw.} \\ \mathcal{K}_m(\mathbf{P}_e, \mathbf{Q}_e) &\subseteq \mathcal{V} = \text{colspan}(\mathbf{V}).\end{aligned}\quad (3.102)$$

Gleichung (3.102) besagt somit, dass der Eingangs-Krylov-Unterraum  $\mathcal{K}_m$  der Stufe  $m$  eine Teilmenge des Vektorraumes  $\mathcal{V}$  ist, welcher von den Spaltenvektoren der Matrix  $\mathbf{V}$  aufgespannt wird. Um der Projektionsvorschrift aus Abschnitt 3.5 nachzukommen, bedarf es einer zweiten Matrix  $\mathbf{W}$ . Wird diese aus demselben Eingangs-Krylov-Unterraum ermittelt, so dass  $\mathbf{W} = \mathbf{V}$  gilt und die Matrix  $\mathbf{V}$  unitär ist, liegt ein einseitiges Krylov-Unterraum-Verfahren vor. Auf diese Weise werden die ersten  $m$  Momente der Reihenentwicklung der Übertragungsfunktion um den Entwicklungspunkt zur Übereinstimmung gebracht.

Alternativ kann auch der Ausgangs-Krylov-Unterraum für die Bestimmung der Projektionsmatrizen herangezogen werden. Die Spaltenvektoren der Matrizen  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{W}$  sind dann so zu wählen, dass gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_m(\mathbf{P}_a, \mathbf{q}_a) &\subseteq \mathcal{W} = \text{colspan}(\mathbf{W}) \quad \text{bzw.} \\ \mathcal{K}_m(\mathbf{P}_a, \mathbf{Q}_a) &\subseteq \mathcal{W} = \text{colspan}(\mathbf{W}),\end{aligned}\quad (3.103)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{W}, \quad \text{wobei } \mathbf{W}^* \mathbf{W} = \mathbf{I}.$$

Wird darüber hinaus von der Möglichkeit Gebrauch gemacht, unterschiedliche Matrizen  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{W}$  zu nutzen, um beide Vektorräume für die Projektion zu berücksichtigen, kann noch mehr Information der Übertragungsfunktion für deren Approximation aufgenommen werden. Dies wird das zweiseitige Krylov-Unterraum-Verfahren genannt. Somit lassen sich bis zu doppelt so viele Momente zur Übereinstimmung bringen. Die Begründung hierfür liegt in der Tatsache, dass die Übertragungsmatrix  $\mathbf{H}$  grundsätzlich sowohl von der Eingangs- als auch von der Ausgangsmatrix abhängt (EID 2009). Die Matrizen  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{W}$  sind dann jeweils orthonormale Basen des Eingangs- bzw. des Ausgangs-Krylov-Unterraumes.

### 3.7.4 Verwendung mehrerer Entwicklungspunkte

In den vorangegangen Abschnitten wurde die Approximation der Übertragungsfunktion auf der Grundlage einer Reihenentwicklung an einer einzigen Entwicklungsstelle  $s_0$  diskutiert. Damit lässt sich die Übertragungsfunktion in der Nähe der Entwicklungsstelle gut abbilden, während die Genauigkeit in Frequenzbereichen mit größerem Abstand zum Entwicklungspunkt stark abnehmen kann. Dadurch können sich auch die Approximationsergebnisse bei der Modellreduktion signifikant verschlechtern.

Abhilfe schafft hier die von GRIMME (1997) vorgestellte Methode der *Rationalen Interpolation*. Dazu werden mehrere Entwicklungsstellen für den Projektionsvektorraum berücksichtigt, wodurch die Genauigkeit in mehreren Bereichen der komplexen Ebene gesteigert werden kann. Bei diesem Vorgehen werden mehrere Vektorräume vereinigt, die jeweils einem der im Abschnitt 3.7.1 beschriebenen Krylov-Unterräume entsprechen:

$$\bigcup_{j=1}^n \mathcal{K}_{m_j}(\mathbf{P}_j, \mathbf{q}_j) = \mathcal{K}_{m_1}(\mathbf{P}_1, \mathbf{q}_1) \cup \mathcal{K}_{m_2}(\mathbf{P}_2, \mathbf{q}_2) \cup \dots \cup \mathcal{K}_{m_n}(\mathbf{P}_n, \mathbf{q}_n). \quad (3.104)$$

Die Gesamtprojektionsmatrix  $\mathbf{V}$  wird dann aus den Basismatrizen  $\mathbf{V}_j$  zusammengesetzt, die an den jeweiligen Entwicklungspunkten  $s_{0j}$  bestimmt wurden und verschiedene Stufen haben können, sodass gilt:

$$\bigcup_{j=1}^n \mathcal{K}_{m_j}(\mathbf{P}_j, \mathbf{q}_j) \subseteq \mathcal{V} = \text{colspan}(\mathbf{V}) = \text{colspan}([\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_n]). \quad (3.105)$$

Äquivalent dazu wird für den Fall des zweiseitigen Krylov-Unterraumverfahrens die Projektionsmatrix  $\mathbf{W}$  bestimmt. Die jeweiligen Matrizen  $\mathbf{P}_j$  und Startvektoren  $\mathbf{q}_j$  besitzen die in Gleichung (3.100) definierte Struktur und sind von der Lage der Entwicklungspunkte  $s_{0j}$  abhängig. Wie in (3.100) zu erkennen ist, muss für jeden Entwicklungspunkt die Inverse einer Matrix der Dimension des Originalsystems gefunden werden, was einen erheblichen Anteil am numerischen Gesamtaufwand des Verfahrens darstellt. Aus diesem Grund ist die Anzahl der verwendeten Entwicklungspunkte vom Standpunkt der Recheneffizienz stets umsichtig zu wählen.

Wenngleich das Verfahren als rationale Interpolation bezeichnet wird, lässt es sich nicht anhand der Übertragung auf eine einfache Reihenentwicklung verstehen. Da Letztere nicht für eine Entwicklung an mehreren Stellen formuliert werden kann, ist das Verfahren lediglich durch Vektorraumüberlegungen nachzuvollziehen, wie sie in Gleichung (3.104) wiedergegeben sind.

### 3.7.5 Bestimmung der Projektionsmatrizen

Wie in Abschnitt 3.5 erläutert, wird die eigentliche Ordnungsreduktion durch die Projektion mit Hilfe der orthonormalen Projektionsmatrizen  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{W}$  herbeigeführt. Die Orthonormalbasis ist dabei eine wichtige Voraussetzung für die Projektion, weil die Vektoren nur im Fall der Orthonormalität korrekt zerlegt und somit richtig im jeweiligen Unterraum dargestellt werden können. Für die Bestimmung der Projektionsmatrizen besteht eine Möglichkeit darin, die Krylov-Unterraumvektoren, wie sie in Abschnitt 3.7.1 definiert wurden, explizit zu berechnen und im Anschluss mit Hilfe einer  $QR$ -Zerlegung (vgl. Abschnitt 3.2.2) zu orthonormieren. Aus Gründen der numerischen Stabilität ist dieses Vorgehen aber nicht sinnvoll, da die Vektoren der Krylov-Sequenz (3.90) oft sehr schnell gegen den dominanten Eigenvektor konvergieren und die neu gebildeten Vektoren sich damit zunehmend einer linearen Abhängigkeit der bereits bestehenden annähern (FREUND 2003).

Um dieser Problematik entgegen zu wirken, bieten sich prinzipiell zwei Algorithmen an. Eine Möglichkeit, die Projektionsmatrizen für den Einsatz von zweiseitigen Krylov-Unterraummethoden zu bestimmen, ist die Anwendung des (unsymmetrischen) Lanczos-Algorithmus (ANTOULAS 2005, SALIMBAHARAMI 2005). Dieser erzeugt aus dem Ein- bzw. Ausgangs-Krylov-Unterraum die biorthonormalen Basen  $\mathbf{W}$  und  $\mathbf{V}$ , d. h.  $\mathbf{W}^* \mathbf{V} = \mathbf{I}$ .

Eine zweite Möglichkeit, die numerisch stabiler ist, stellt das sog. Arnoldi-Verfahren dar (ARNOLDI 1951), welches in der vorliegenden Arbeit weiter verfolgt wird. Der Algorithmus berechnet die Basen  $\mathbf{W}$  und  $\mathbf{V}$  in zwei getrennten Schritten, weshalb er auch effizient für einseitige Krylov-Unterraum-Verfahren anwendbar ist. Die resultierenden Basen entsprechen hierbei der Orthogonalitätsbedingung, d. h.  $\mathbf{W}^* \mathbf{W} = \mathbf{I}$  bzw.  $\mathbf{V}^* \mathbf{V} = \mathbf{I}$ .

Bei der Anwendung des Arnoldi-Verfahrens werden die Basisvektoren iterativ aus dem jeweils letzten berechneten orthonormalen Vektor der Projektionsmatrix berechnet, was durch die Gegenüberstellung in (3.106) angedeutet ist. Der Vorteil dieser Methode liegt somit darin, dass auf die explizite Berechnung der Krylov-Unterraum-Sequenz verzichtet werden kann. Es gilt:

$$\underbrace{\mathbf{K}_{(:,n+1)} = \mathbf{P}^{n-1} \mathbf{q}}_{\text{Vorgehen nach Krylov-Unterraumdefinition}} \Leftrightarrow \underbrace{\mathbf{K}_{(:,n+1)} = \mathbf{P} \mathbf{V}_{(:,n)}}_{\text{Arnoldi-Verfahren}} \quad (3.106)$$

In obiger Darstellung bezeichnet  $\mathbf{K}$  die Matrix der Krylov-Unterraumvektoren, die einmal aus der Krylovsequenz (3.90) und einmal nach dem Arnoldi-Verfahren gebildet wird. Die Matrix  $\mathbf{V}$  spiegelt dabei die Projektionsmatrix wider und enthält die bereits orthogonisierten Basisvektoren. Für die Ermittlung des  $(n+1)$ -ten Basisvektors wird somit der  $n$ -te Vektor aus  $\mathbf{V}$  verwendet. Um

der Forderung nachzukommen, dass der jeweils neu ermittelte Basisvektor orthonormal zu den bereits bestehenden Vektoren der Projektionsmatrix ist, kommt vorzugsweise das sog. Gram-Schmidt-Verfahren zum Einsatz. Dieses gehört zu den wichtigsten Orthonormierungsverfahren und ist bspw. in SAAD (2003) detailliert erläutert. Ziel des Verfahrens ist die Bestimmung einer Orthonormalbasis  $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  zu einer bestehenden Basis  $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Der erste Vektor  $\mathbf{q}_1$  von  $\mathbf{Q}$  wird durch eine Normierung des ersten Vektors  $\mathbf{b}_1$  der Basis  $\mathbf{B}$  erzeugt und bildet den Ausgangspunkt. Auf diesen wird der zweite Vektor  $\mathbf{b}_2$  projiziert und anschließend durch Subtraktion des Ergebnisses von  $\mathbf{b}_2$  orthogonalisiert. Die Normierung des neu entstandenen Vektors führt schließlich auf den zweiten Vektor  $\mathbf{q}_2$  der gewünschten Orthonormalbasis  $\mathbf{Q}$ . Jeder neue Vektor wird dann gegenüber allen vorherigen Vektoren orthonormiert, indem jeweils die Schritte *Projektion*, *Orthogonalisierung* und *Normierung* angewendet werden. In SAAD (2003) wird darüber hinaus eine Abwandlung des Schrittes der Orthogonalisierung beschrieben, um diesen numerisch effizienter zu gestalten. Dieses Vorgehen wird modifiziertes Gram-Schmidt-Verfahren (MGS-Verfahren) genannt und bildet aufgrund der rekursiven Bestimmung des jeweils nächsten orthonormalen Vektors der Basis die Grundlage für das Arnoldi-Verfahren.

Der grundsätzliche Ablauf des Arnoldi-Algorithmus zur Bestimmung einer orthogonalen Basis  $\mathbf{V}$  zum Krylovraum  $\mathcal{K}_m$  der Stufe  $m$  ist in Bild 3.9 als Strukturdiagramm veranschaulicht. Wie zu erkennen ist, wird die Schleife zur Bestimmung der Spaltenvektoren der Projektionsmatrix  $\mathbf{V}$  für alle  $m$  Momente durchlaufen. Dabei wird die gewünschte orthonormale Basis  $\mathbf{V}$  zur Matrix  $\mathbf{K}$  iterativ bestimmt. Die entstehende Matrix  $\mathbf{H}$  ist dabei als Transformationsmatrix zu verstehen und hat obere Dreiecksform. Da das Produkt  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{H}$  die Ausgangsmatrix  $\mathbf{K}$  ergibt, ist das Arnoldi-Verfahren als eine spezielle Form der  $\mathbf{QR}$ -Zerlegung zu verstehen.

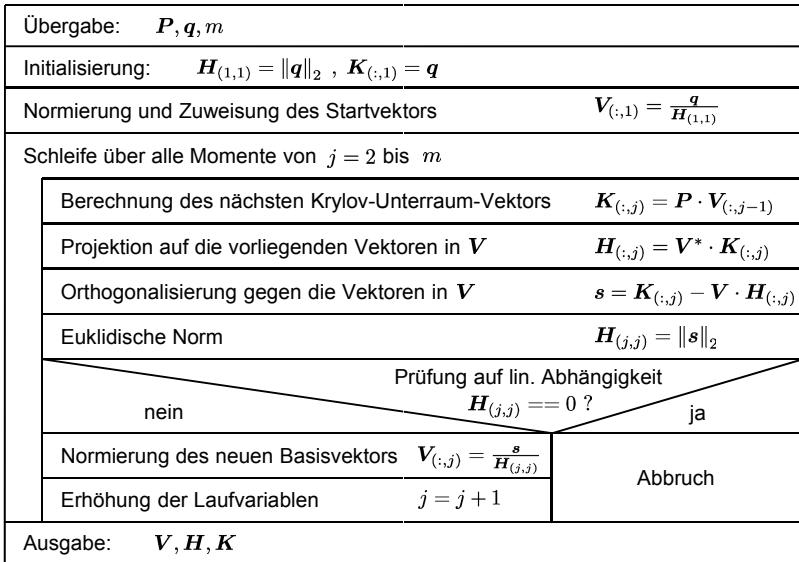


Bild 3.9: Ablauf des Arnoldi-Verfahrens nach SAAD (2003) und ANTOULAS (2005)

Das Verfahren wurde aus Gründen der Anschaulichkeit zunächst für den SISO-Fall mit nur einer Eingangsgröße erläutert. Für strukturmechanische Anwendungen, bei denen das LTI-System mehrere Eingangsgrößen aufweist, kommt dagegen die Blockversion des Arnoldi-Verfahrens zum Einsatz, bei welcher die Projektionsmatrix  $\mathbf{V}$  blockweise aufgebaut wird (Bild 3.10). Hierbei kommen anstelle eines einzelnen neuen Spaltenvektors stets mehrere zu einem Block zusammengefasste orthonormale Spaltenvektoren hinzu.

Die in Gleichung (3.101) definierte Matrix  $\mathbf{Q}$  ist dabei, analog dem Startvektor  $\mathbf{q}$  in Bild 3.9, die Startmatrix. Im Anschluss werden alle neuen Blöcke auf die bestehenden Vektoren der Krylov-Sequenz projiziert und gegenüber den bereits berechneten Spaltenvektoren der Projektionsmatrix  $\mathbf{V}$  orthogonalisiert.

Übergabe: $P, Q, m$
Initialisierung: $V = []$ , Festlegung des Startblockes: $V = [Q]$
Schleife über alle Momente von $j = 2$ bis $m$
Bestimmung des nächsten Blocks $W_{j-1} = PV_{j-1}$
Schleife über die Blöcke aller bisherigen Momente von $i = 1$ bis $j - 1$
Projektion auf den jeweiligen Block: $H_{i,j-1} = V_i^* W_{j-1}$
Orthogonalisierung gegen die bestehenden Blöcke: $W_{j-1} = W_{j-1} - V_i H_{i,j-1}$
Erhöhung der Laufvariablen: $i = i + 1$
Reorthogonalisierung mit Hilfe einer $QR$ -Zerlegung: $V_j R_{j-1} = W_{j-1}$
Aufbau der Projektionsmatrix $V$ : $V = [V \ V_j]$
Erhöhung der Laufvariablen: $j = j + 1$
Ausgabe: Projektionsmatrix $V$

Bild 3.10: Ablauf des Block-Arnoldi-Algorithmus mit blockweiser Orthogonalisierung nach SADKANE (1993) und SAAD (2003)

Ein wichtiger Aspekt, der auch bei Anwendung des Block-Arnoldi-Verfahrens berücksichtigt werden muss, ist die Gefahr der linearen Abhängigkeit der Spaltenvektoren des  $k$ -ten Blockes  $P^k Q$  der Block-Krylov-Sequenz in (3.91) von Spaltenvektoren in Blöcken, die vorher erzeugt wurden. Die Grundversion des Block-Arnoldi-Verfahrens in Bild 3.10 sorgt zwar dafür, dass jeder neu erzeugte Block in der Projektionsmatrix  $V$  gegenüber den bestehenden Spaltenvektoren linear unabhängig ist, garantiert aber nicht, dass dies auch für die Spaltenvektoren innerhalb dieses Blocks zutrifft. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, die neuen Basisvektoren der Blöcke einzeln und spaltenweise zu orthonormieren (SALIMBAHRAMI 2005), was aufgrund des erhöhten numerischen Aufwandes jedoch zu einer längeren Berechnungsdauer führt. Dieser Algorithmus ist in Bild 3.11 als Strukturdiagramm dargestellt.

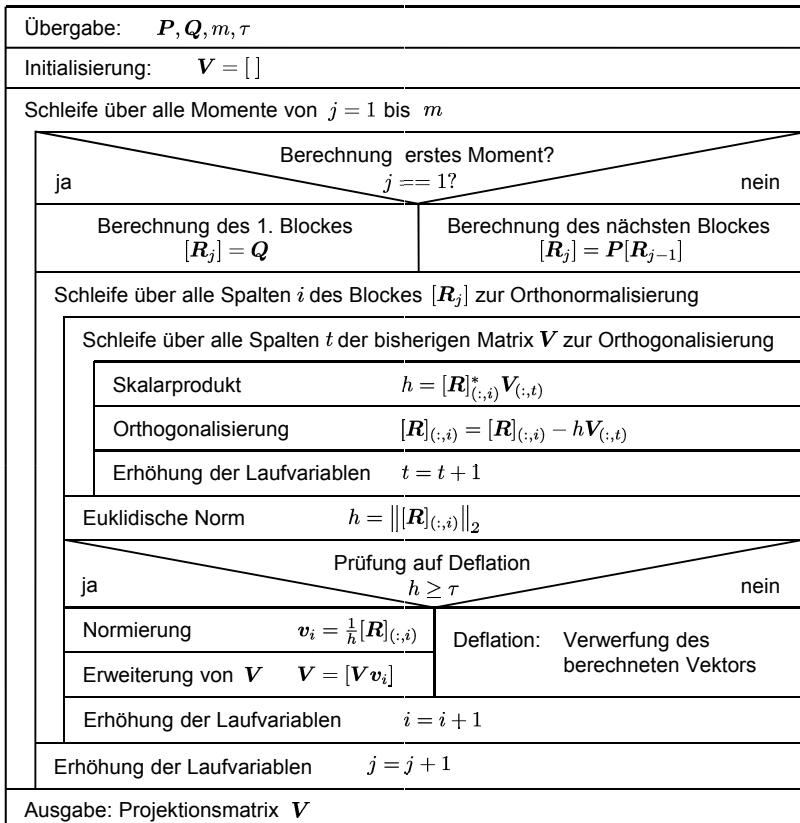


Bild 3.11: Strukturdiagramm zur Erläuterung des Block-Arnoldi-Verfahrens nach ANTOULAS (2005) und SALIMBAHRAMI (2005)

Um in der Praxis zu vermeiden, dass der Algorithmus bei einer auftretenden linearen Abhängigkeit eines neuen Basisvektors abbricht, wird dem Algorithmus in Bild 3.11 eine Toleranzgrenze  $\tau$  übergeben. Der zuletzt berechnete Spaltenvektor wird nur dann für die Projektionsmatrix  $V$  verwendet, sofern dessen Norm die Grenze betragsmäßig übersteigt. Andernfalls hat dieser Vektor einen zu kleinen Anteil an der neuen Dimension des Gesamtvektorraumes. Da aufgrund numerischer Ungenauigkeiten die Gefahr besteht, dass eine falsche Richtung hinzugefügt wird, wird der berechnete Vektor nicht weiter verwendet. Das Entfernen nahezu linear abhängiger Vektoren wird als Deflation bezeichnet.

und verhindert ein Abbrechen des Algorithmus. Dieses Vorgehen verursacht allerdings eine Verkleinerung des jeweiligen Abbildungsblockes, was insbesondere bei zweiseitigen Verfahren dazu führen kann, dass die Projektionsmatrizen  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{W}$  verschiedene Dimensionen besitzen. Um dies auszugleichen, können nach SOPPA (2011) bspw. weitere Basisvektoren über die angegebene Anzahl von Momenten hinaus erzeugt werden, bis die geforderte Dimension der Projektionsmatrix wieder erreicht ist.

Prinzipiell wäre der Einsatz der genannten Deflationstechniken auch für das Verfahren aus Bild 3.10 wünschenswert. Da in diesem Fall aber stets ein Block von Spaltenvektoren zur Projektionsmatrix hinzugefügt wird, lässt sich die Überprüfung auf lineare Abhängigkeit einzelner Vektoren schwer realisieren, weshalb bislang meist auf die numerisch aufwendigere Variante aus Bild 3.11 zurückgegriffen wird.

Mit dem oben dargestellten Block-Arnoldi-Verfahren lassen sich die Projektionsmatrizen zur Reduktion von MIMO-Systemen erstellen. Die Anzahl der Ein- und Ausgangsgrößen hat dabei einen direkten Einfluss auf die resultierende Dimension der Projektionsmatrix, die sich wiederum auf den Reduktionsgrad auswirkt. Die Anzahl der Spaltenvektoren der Projektionsmatrix  $\mathbf{V}$  ergibt sich mit

$$\text{Anzahl}(\mathbf{V}_{(1,:)}) = \text{Anzahl}(\mathbf{Q}_{(1,:)}) \cdot \text{Anzahl}(\text{Momente}) \cdot \text{Anzahl}(EP) \quad (3.107)$$

als Produkt aus der Anzahl der Startvektoren, die durch die Anzahl der Ein- bzw. Ausgänge bestimmt wird, der Anzahl der approximierten Momente und der Anzahl der Entwicklungspunkte (EP). Durch eine hohe Anzahl von Ein- bzw. Ausgängen nimmt bei einer festgelegten maximalen Dimension von  $\mathbf{V}$  entweder der Reduktionsgrad ab oder es werden weniger Momente zur Übereinstimmung gebracht. Dies wird durch die Überlegung, dass mit zunehmender Zahl von Ein- bzw. Ausgängen auch die Zahl der Übertragungspfade in der Matrix  $\mathbf{H}(s)$  zunimmt, deutlich. Dem entsprechend müssen auch mehrere Frequenzgänge als Reihe entwickelt werden. An dieser Stelle wird ein Unterschied zu den modalen Reduktionsverfahren deutlich, da deren Projektionsmatrix unabhängig von den Ein- und Ausgängen ist.

### 3.8 Modellordnungsreduktion in der Simulation von Werkzeugmaschinen

Für die Approximation des dynamischen Verhaltens einer modellierten Werkzeugmaschinenstruktur kommen heute meist die modalen Verfahren zum Einsatz. Hierbei werden die Strukturkomponenten nach der Lösung des Eigenwertproblems (siehe Abschnitt 2.4.3) in den modalen Raum transformiert, was die Grundlage für die Reduktion der Freiheitsgrade bildet. Durch die modale Superposition einfacher Schwingungsformen können somit komplexe Deformationen einer Struktur abgebildet werden. Dies kann sowohl auf einzelne Strukturkomponenten einer Maschine als auch auf das Gesamtmodell angewendet werden. Bild 3.12 zeigt die beiden am häufigsten angewandten Varianten der modalen Reduktion und resultierende Möglichkeiten zur Weiterverwendung der reduzierten Modelle.

Die Component Mode Synthesis (CMS) (siehe Abschnitt 3.6.2) gehört zu den Substrukturtechniken und hat sich aufgrund der Integration in kommerzielle FEM-Softwareprodukte stark verbreitet. Sie basiert auf einer Modaltransformation aller Freiheitsgrade der Komponente, für die die berechneten Eigenformen eines zu definierenden Frequenzbereiches berücksichtigt werden. Anschließend werden die Eigenschaften des FEM-Netzes der Komponente nach der Theorie von CRAIG & BAMPTON (1968) auf die Koppelknoten reduziert. Darunter sind diejenigen Freiheitsgrade zu verstehen, die für die Verbindung mit den übrigen Maschinenkomponenten nötig sind, wie beispielsweise Führungs- oder Lagerpunkte. Alle übrigen Freiheitsgrade sind nicht mehr in physikalischen Koordinaten vorhanden. Um den Fehler, der durch die Vernachlässigung von Eigenmoden ab einem bestimmten Frequenzbereich entsteht, zu kompensieren, wird von CRAIG & BAMPTON (1968) die Verwendung sog. Rest- oder Korrekturmoden vorgeschlagen. Insgesamt kann mit dem CMS-Verfahren die Systemdimension bei gleichzeitiger Berücksichtigung der Nachgiebigkeit der Komponente stark reduziert werden. Eine Anwendung ist insbesondere für Variationsrechnungen in der FEM-Software von Vorteil. Diejenigen Komponenten, deren Parameter nicht variiert werden sollen, werden als reduzierte Substruktur mit der nodalen, zu untersuchenden Komponente gekoppelt und müssen daher nicht ständig neu berechnet werden. Als nodale Komponente wird diejenige bezeichnet, welche als unreduziertes FEM-Netz vorliegt und deren Freiheitsgrade allesamt ansprechbar sind. Anwendungsbeispiele hierfür sind u. a. in (MELCHINGER & SCHMITZ 2006, MAGLIE 2009) zu finden. Ein weiteres Einsatzgebiet von Substrukturtechniken mit modal reduzierten Komponenten sind flexible Mehrkörpersysteme. SIEDL (2008) und HOFFMANN (2008) verwendeten diese Methode, um das dynamische Verhalten von Werkzeugmaschinen bei Ver-

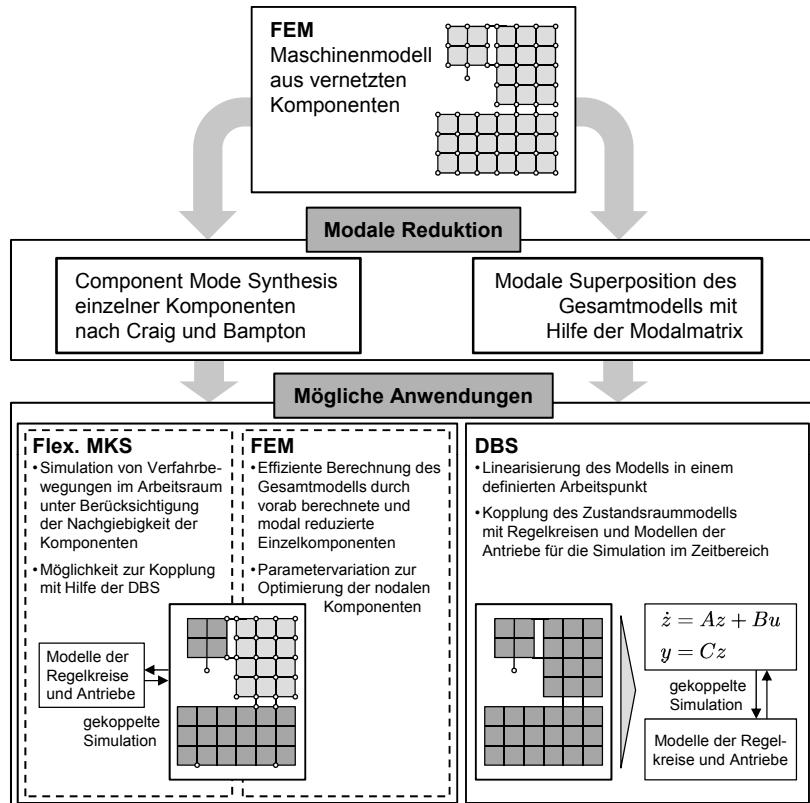


Bild 3.12: Varianten der modalen Reduktion und deren mögliche Anwendungen

fahrbewegungen der Maschinenachsen zu untersuchen. Auf diese Weise können große Führungsbewegungen realisiert und gleichzeitig auftretende Schwingungen analysiert werden. Darüber hinaus sind in der Literatur weitere Arbeiten auf Basis flexibler Mehrkörpersysteme unter Verwendung der CMS-Methode zur Untersuchung des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen zu finden, z. B. WEISSENBERGER (2002), QUEINS (2005) und KIPFMÜLLER (2010).

Als zweites Verfahren hat sich die Modaltransformation des Gesamtmodells etabliert. Hierbei werden alle Freiheitsgrade der vernetzten Maschinenstruktur in den modalen Raum projiziert. Die eigentliche Reduktion wird somit durch eine Auswahl der für die Projektion berücksichtigten dynamischen Eigenmoden

erreicht. Durch diese Einschränkung kann aber das statische und dynamische Verhalten des reduzierten Systems mit einem signifikanten Fehler behaftet sein, dem in der Regel durch einen größeren berücksichtigten Frequenzbereich der Eigenmoden entgegnet wird, was sich wiederum negativ auf den Reduktionsgrad auswirkt. Durch die Modaltransformation lässt sich das Gleichungssystem, wie in Abschnitt 2.4.3 erläutert, in den verallgemeinerten, modalen Koordinaten darstellen. Nach der Festlegung der für die Analysen benötigten Ein- und Ausgänge wird das System in die Zustandsraumdarstellung (Gleichung 2.29) überführt, wodurch die relevanten Übertragungspfade für das Systemverhalten definiert werden. Für diesen Fall stellte LITZ (1979) ein Verfahren zur Bestimmung von ein- und ausgangsgerichteten Dominanzindizes vor. Diese liefern eine quantifizierende Aussage über den Anteil einzelner Eigenmoden an einem Übertragungsvorgang, welcher als Auswahlkriterium herangezogen werden kann. Damit lassen sich diejenigen Moden für die Modaltransformation identifizieren, welche einen definierten Mindestdominanzgrad aufweisen.

Die modale Reduktion stellt aufgrund ihrer einfachen physikalischen Interpretierbarkeit heute ein Standardverfahren zur Reduktion der durch die FEM-Modellierung entstehenden Freiheitsgrade dar und wird sowohl im wissenschaftlichen (z. B. ALTINTAS ET AL. 2005, GROSSMANN ET AL. 2007, NEUGEBAUER ET AL. 2010) als auch im industriellen Umfeld (z. B. KEHL 2004) zur Simulation von Werkzeugmaschinen eingesetzt. Sie kommt dann zur Anwendung, wenn das Ziel in der Zeitbereichsberechnung liegt, wie es in Abschnitt 2.5.4 beschrieben ist. BERKEMER (2003) wandte die modale Reduktion unter Berücksichtigung der vorhandenen Starrkörpermoden der ungefesselten Linearachsen in seiner Arbeit an, um Strukturmodelle von Werkzeugmaschinen gekoppelt mit den geregelten Antriebssystemen zu simulieren. Er nutzte zudem bestimmte Rekonstruktionen der vernachlässigten Moden zur Minimierung des Reduktionsfehlers, welcher aber verfahrensbedingt nicht vollständig zu kompensieren ist. Auch OERTLI (2008) nutzte den Ansatz der gekoppelten Simulation für Werkzeugmaschinen mit geregelten Antriebsachsen, setzte aber das Dominanzmaß nach LITZ (1979) ein, um die für das Übertragungsverhalten relevanten Eigenmoden zu identifizieren, bevor die Modaltransformation durchgeführt wird. Des weiteren kommt die modale Reduktion auch bei SCHWARZ (2010) und GEBHARD (2011) zum Einsatz, um effizient zu berechnende Systemmodelle für die gekoppelte Simulation mit Prozessmodellen zu erhalten. Anstelle einer Kompensationsstrategie für den sich einstellenden Fehler wurde in diesen Arbeiten ein größerer Frequenzbereich berücksichtigt, d. h. eine große Anzahl an Eigenschwingformen, was wiederum in größeren Dimensionen der reduzierten Modelle resultierte.

Es bleibt festzustellen, dass für strukturmechanische Anwendungen und insbesondere für die Simulation von Werkzeugmaschinen meist die modale Reduktion verwendet wird, wenn es um die Erstellung eines effizient zu berechnenden Systemmodells für Betrachtungen im Zeitbereich geht. Die Vorteile sind in der einfachen Anwendung dieser Reduktionsmethode bei einer bislang als ausreichend bewerteten Genauigkeit zu sehen. Dafür müssen die verfahrensbedingten Nachteile und insbesondere die Unkenntnis über den entstandenen Approximationsfehler in Kauf genommen werden.

Erste Versuche, moderne Ordnungsreduktionsverfahren wie Krylov-Unterraum-Verfahren für die Werkzeugmaschinensimulation anzuwenden, sind von MAGLIE ET AL. (2010) präsentiert worden. Hierfür wurden die Einzelkomponenten einer Werkzeugmaschine mit Hilfe einer für die FEM-Software *ANSYS®* erhältlichen Toolbox (*MOR4ANSYS®*) reduziert. Daraus resultierten mehrere reduzierte Zustandsraummodelle der Einzelkomponenten. Um das Verhalten des Gesamtsystems darstellen zu können, wurden die reduzierten Einzelsysteme mit Feder-Dämpfer-Elementen zwischen den Verbindungsstellen gekoppelt. Eine Reduktion des Gesamtmaschinenmodells inkl. der modellierten Vorschubachsen ist auf diese Weise nicht möglich. *MOR4ANSYS®* ist ein auf Krylov-Unterräumen basierendes Reduktionsprogramm, welches für die Simulation mikro-elektromechanischer Systeme (MEMS) entwickelt wurde (RUDNYI & KORVINK 2004). Diese werden i. d. R. mit Hilfe von DGL-Systemen erster Ordnung (vgl. Gleichung 3.32) modelliert, weshalb das Programm auf die Reduktion dieses Gleichungstyps ausgelegt ist. Es kann daher nicht direkt auf die Koeffizientenmatrizen des Werkzeugmaschinenmodells angewendet werden. Hierfür muss zunächst eine Transformation vorgenommen werden, was die Dimension der Matrizen verdoppelt und damit erhöhte Speicheranforderungen nach sich zieht.

Einen vielversprechenden Ansatz zur Reduktion großer FEM-Strukturmodelle auf Basis von Krylov-Unterraum-Verfahren stellte SOPPA (2011) vor. Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der Implementierung eines iterativen Verfahrens zur Optimierung der Lage der Entwicklungsstellen, um das dynamische Verhalten der Strukturmodelle bestmöglich abzubilden. In dieser mathematisch geprägten Arbeit werden Komponenten von Werkzeugmaschinen als Anwendungsbeispiele herangezogen, welchen ein proportionaler Dämpfungsansatz zu Grunde liegt. Da mit dem Verfahren gute Ergebnisse für diese Beispiele erzielt werden konnten, wird es im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit noch näher beleuchtet (Abschnitt 4.4.6).

### 3.9 Zusammenfassung und Handlungsbedarf

Für die effiziente Berechnung großer Differenzialgleichungssysteme, wie sie beispielsweise aus Finite-Elemente-Modellen resultieren, sind entsprechende Methoden zur Ordnungsreduktion nahezu unumgänglich. Das Ziel aller Verfahren ist es dabei, das Originalsystem durch ein System kleinerer Dimension zu approximieren, sodass der entstehende Fehler möglichst gering ist. Der Approximationsansatz vieler Reduktionsverfahren besteht darin, das hochdimensionale Originalsystem mit Hilfe einer Projektionsmatrix auf einen Unterraum kleinerer Dimension zu projizieren. Das reduzierte System ist dann entsprechend schneller und mit weniger Speicheraufwand zu berechnen und kann für verschiedene Einsatzzwecke weiterverwendet werden.

In der Strukturdynamik stellen bislang die modalen Reduktionsverfahren die am häufigsten eingesetzten Methoden dar. Die Grundidee ist dabei, die auftretenden Strukturverformungen durch die Überlagerung einer Auswahl der zuvor berechneten Eigenschwingungsformen abzubilden. Hierfür wird nach der Lösung des reellen Eigenwertproblems die Eigenvektor- oder Modalmatrix als Projektionsmatrix herangezogen, um das Originalsystem damit in den modalen Raum zu projizieren. In der Regel werden für diese Transformation aber nicht alle Eigenvektoren des Systems verwendet, sondern lediglich eine Auswahl, wodurch die eigentliche Reduktion resultiert. Die Einschränkung der Anzahl der dynamischen Moden führt aber gleichzeitig dazu, dass das statische Verhalten mit einem signifikanten Fehler behaftet sein kann, der den statischen Residuen der nicht berücksichtigten Moden entspricht. Zudem geht auch die dynamische Information der vernachlässigten Moden verloren.

Hieraus resultiert die Problematik, dass der durch die Reduktion auftretende Fehler nicht bekannt ist. Für dessen Bestimmung wäre die Berechnung aller Eigenwerte und -vektoren nötig, was wiederum dem rechnerischen Aufwand für die Lösung des originären Gleichungssystems entspräche. In der Praxis werden daher Erfahrungswerte bezüglich der Anzahl der berücksichtigten Moden herangezogen, ohne dass dabei exakt bekannt ist, welchen Anteil die Ordnungsreduktion an der Gesamtabweichung zwischen dem Modell und der Realität hat. Aus diesem Grund ist hierfür bis heute eine größtenteils manuelle Vorgehensweise üblich. Darüber hinaus schränken die modalen Verfahren den Benutzer in der Wahl des Dämpfungsansatzes für die Maschinenstruktur ein. Um das mit Hilfe der Modaltransformation entkoppelte Gleichungssystem zu wahren, wird bislang meist mit einem globalen Dämpfungsmaß gearbeitet, was keinerlei Rückschluss auf lokale Dämpfungseffekte und deren Entstehungsort zulässt.

Als Alternative wurden in diesem Kapitel Krylov-Unterraum-Verfahren vorgestellt, welche das Originalsystem mit Hilfe eines impliziten Momentenabgleichs approximieren und ebenfalls zu den Projektionsverfahren gehören. Die Bestimmung der Projektionsmatrix findet dabei auf einer mathematischen Grundlage statt, was das Potenzial für eine Automatisierung des Verfahrens ergibt.

Für Finite-Elemente-Modelle von Werkzeugmaschinen kommen die Krylov-Unterraum-Verfahren aber bislang noch kaum zum Einsatz und sie sind für die Simulation komplexer mechatronischer Maschinenmodelle nicht ausführlich getestet und validiert worden. Um die genannten Vorteile auch für die Simulation von Werkzeugmaschinen nutzbar zu machen, besteht der Handlungsbedarf, die modernen Methoden der Ordnungsreduktion auf ihre Eignung zu untersuchen und für den Einsatz in der Entwicklung von Werkzeugmaschinen zu validieren. Hierbei gilt es, die nötigen Anpassungen vorzunehmen, um den Anforderungen der Werkzeugmaschinenmodelle nachzukommen und einen möglichst hohen Automatisierungsgrad zu erreichen. Zudem bietet die Möglichkeit, mit Hilfe von Krylov-Unterraum-Methoden auch nicht modal oder nicht proportional gedämpfte Systeme in ihrer Ordnung zu reduzieren, weiteres Potenzial, welches bislang nicht genutzt ist.

Die aus dem Fachbereich der Mathematik stammenden Reduktionsverfahren stellen allerdings derzeit noch Inseßlösungen dar. Um diese Verfahren effizient im Entwicklungsprozess von Werkzeugmaschinen einsetzen zu können, bedarf es einer Vorgehensmethodik für deren Integration in den derzeit etablierten Entwicklungsprozess, sodass dem Anwender der Einsatz der Ordnungsreduktion erleichtert wird.

## 4 Reduktion von Werkzeugmaschinenmodellen mit Krylov-Unterraum-Verfahren

### 4.1 Inhalt des Kapitels

Im vorliegenden Kapitel wird ein Reduktionsverfahren auf Basis der beschriebenen Krylov-Unterräume vorgestellt, welches speziell für die Reduktion von FEM-Modellen von Werkzeugmaschinen geeignet ist. Das Vorgehen innerhalb dieses Kapitels ist in Bild 4.1 dargestellt.

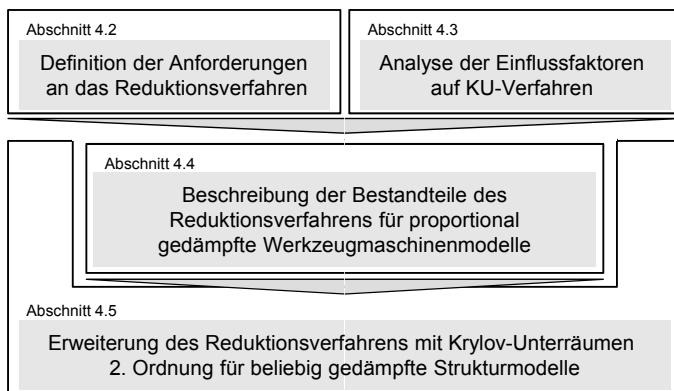


Bild 4.1: Aufbau des Kapitels

Zunächst werden in Abschnitt 4.2 die Eigenschaften von strukturmechanischen FEM-Modellen von Werkzeugmaschinen näher betrachtet. Darauf folgt die Definition und Erläuterung der resultierenden Anforderungen, die an das Krylov-Unterraum-basierte Reduktionsverfahren zu stellen sind. Um die Eigenschaften von Krylov-Unterraum-Verfahren und deren Parameter bestmöglich zu verstehen, erfolgt in Abschnitt 4.3 eine Analyse der Einflussfaktoren mit ihren Auswirkungen auf die Ergebnisse beim Einsatz von Krylov-Unterraum-Verfahren. Mit den so gewonnenen Kenntnissen lassen sich zusammen mit den Anforderungen in der Simulation von Werkzeugmaschinen die notwendigen Bestandteile eines für typische Modelle angepassten Reduktionsverfahrens definieren. In Abschnitt 4.4 werden hierfür die Lösungsbausteine einer adaptierten Variante der Krylov-Unterraum-Verfahren für deren Anwendung auf lineare Strukturmodelle von Werkzeugmaschinen mit proportionaler Dämpfung erläutert.

Eine neue Variante zur Reduktion von Werkzeugmaschinen mit einer beliebigen Dämpfungsmatrix, d. h. mit Berücksichtigung lokal auftretender Dämpfungseffekte, wird abschließend in Abschnitt 4.5 erläutert. In diesem Verfahren kommen sog. Krylov-Unterräume zweiter Ordnung zum Einsatz, welche mit dem zuvor beschriebenen automatisierten Reduktionsverfahren kombiniert werden. Das Kapitel endet schließlich mit einer Zusammenfassung.

## 4.2 Anforderungen an das Reduktionsverfahren

### 4.2.1 Systeme zweiter Ordnung und Matrixeigenschaften

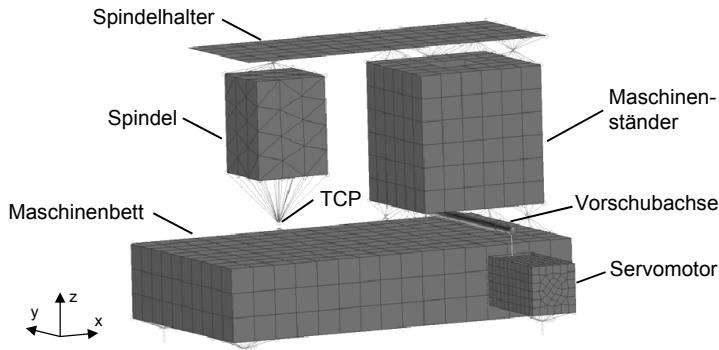
Bevor die Anforderungen im Detail beschrieben werden, wird im folgenden Abschnitt auf einige wesentliche Eigenschaften der in der vorliegenden Arbeit betrachteten FEM-Strukturmodelle von Werkzeugmaschinen eingegangen. Aus der Modellierung von mechanischen Strukturen mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode resultiert eine Massen- und eine Steifigkeitsmatrix, sodass ein lineares Differenzialgleichungssystem 2. Ordnung vorliegt. Um eine hohe Modellgüte im Vergleich zur Realität zu erreichen, werden die Strukturkomponenten der Maschine möglichst fein diskretisiert. Daraus ergibt sich ein FE-Netz mit einer hohen Anzahl an Gitterpunkten, was zu großen Systemmatrizen führt, die ihrerseits aber dünn besetzt sind und Bandstrukturen aufweisen.

Diese Eigenschaften lassen sich am Beispiel einer abstrahierten Werkzeugmaschinenstruktur erläutern, welche von ihren Komponenten einer Ständerfräsmaschine mit einer Vorschubachse ähnelt. In Bild 4.2(a) sind ein FEM-Modell und dessen wichtigste Komponenten dargestellt. Im Ausgangszustand besitzt dieses  $n = 4983$  Freiheitsgrade. Zusätzlich sind die Belegungen der Massen- (b) und der Steifigkeitsmatrix (c) abgebildet, wodurch die Bandstrukturen erkennbar werden. In dieser Darstellung sind diejenigen Einträge der  $(n \times n)$ -Matrizen, welche ungleich Null sind, durch eine Markierung verdeutlicht. Der hohe Anteil von Null-Einträgen in der Massenmatrix liegt darin begründet, dass die kontinuierliche Massenverteilung der Komponenten mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit vom FEM-Programm „konzentriert“ und auf die diskreten Knoten des FE-Netzes verteilt wird<sup>1</sup>. Auf diese Weise verringert sich der Berech-

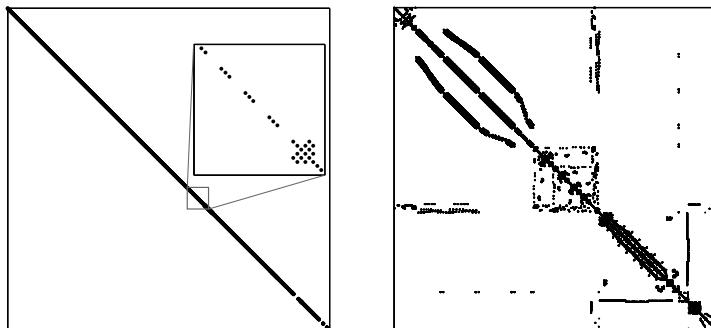
---

<sup>1</sup> In der FEM wird zwischen einer konzentrierten (engl.: lumped) und einer konsistenten (engl.: coupled) Elementmatrixformulierung differenziert. Der Unterschied liegt in der Massenverteilung auf die Freiheitsgrade der Elementknoten. Beim konzentrierten Ansatz wird die Elementmasse aus Recheneffizienzgründen nicht auf alle sechs Knotenfreiheitsgrade, sondern je nach Elementtyp auf wenige konzentrierte Freiheitsgrade verteilt. Dadurch entstehen ggf. Nullzeilen bzw. -spalten in der Matrix, was zur Singularität führt. (BÄTHE 2001, KLEIN 2007)

nungsaufwand des Gleichungssystems deutlich, weshalb sich die konzentrierte Massenverteilung in der Praxis durchgesetzt hat.



(a) FEM-Modell mit Bezeichnung der relevanten Strukturkomponenten



(b) Belegungsstruktur der Massenmatrix

(c) Belegungsstruktur der Steifigkeitsmatrix

*Bild 4.2: FEM-Modell einer abstraierten Werkzeugmaschinenstruktur mit 4983 Freiheitsgraden (a) und der Belegungsstruktur von Massen- (b) und Steifigkeitsmatrix (c)*

Wie im vergrößerten Ausschnitt der Massenmatrix zu erkennen ist, wird die jeweilige Masse der Volumenelemente nur auf die drei translatorischen Freiheitsgrade verteilt. Dies ist an den drei aufeinander folgenden Null-Einträgen zu erkennen. Zudem sind im unteren Teil der Matrix weitere Lücken vorhanden, welche dadurch begründet sind, dass im Modell Elemente enthalten sind, denen keine Masse zugeordnet ist. Dies sind zum einen sog. *Multi-Point-Constraints*,

welche als vereinfacht modellierte Verbindungskomponenten, wie bspw. der Linearführungsschuhe, fungieren, und masselose Zeigerelemente, die zur Visualisierung von Torsionsmoden der mit Hilfe von Stabelementen modellierten Gewindespindelwelle dienen. Diese Eigenschaften führen dazu, dass die Massenmatrix singulär ist.

Die Steifigkeitsmatrix weist ebenfalls gewisse Bandstrukturen auf, besitzt aber deutlich mehr Einträge. Durch die Verknüpfungen der Freiheitsgrade über die Nebendiagonaleinträge dieser Matrix werden die Kraftbeziehungen innerhalb der mechanischen Struktur festgelegt. Wird auf einen bestimmten Freiheitsgrad eine Verschiebung aufgebracht, so entstehen in allen übrigen Freiheitsgraden bestimmte, durch die Steifigkeitsmatrix definierte Kräfte, sofern alle Freiheitsgrade gefesselt sind. Die Steifigkeitsmatrix ist somit invertierbar. Für den Fall, dass bestimmte Freiheitsgrade im Modell nicht bestimmt sind, weil sie bewusst nicht gefesselt wurden (Vorschubachsen, Hauptspindel), entstehen auch in dieser Matrix Nullzeilen bzw. -spalten. Die Steifigkeitsmatrix wird auf diese Weise singulär. Soll das Strukturmodell einer Werkzeugmaschine mit den Modellen der elektromechanischen Antriebe und deren Regelung gekoppelt werden, so müssen bestimmte Vorschubbewegungen der Achsen im Modell möglich sein. Dies kann erreicht werden, indem bspw. die Spindel- oder die Motorwelle einer Vorschubachse in Rotationsrichtung nicht festgelegt ist. Daraus resultiert der oben beschriebene Fall einer singulären Steifigkeitsmatrix und das Modell besitzt folglich sog. Starrkörpermoden. Systemtheoretisch gesehen beschreibt das Gleichungssystem damit ein instabiles System.

Wie in Abschnitt 2.4.4 erläutert, wird die Dämpfungsmaatrix dem Gleichungssystem häufig nachträglich als Linearkombination aus der Massen- und der Steifigkeitsmatrix hinzugefügt. Eine Besonderheit stellt dagegen die Verwendung lokaler, viskos wirkender Dämpfungselemente dar, da dies auf eine Dämpfungsmaatrix führt, die verhindert, dass das Gleichungssystem entkoppelbar ist. Aus diesem Grund fand die Modellierung lokaler Dämpfungseffekte bislang keine Anwendung, da kein bestehendes Ordnungsreduktionsverfahren direkt dazu geeignet ist, das Gleichungssystem zu reduzieren.

### 4.2.2 Beschreibung der Anforderungen

Aus den vorangegangenen Erläuterungen wird deutlich, dass ein Verfahren zur Ordnungsreduktion von FEM-Strukturmodellen von Werkzeugmaschinen einige Anforderungen erfüllen muss, welche im Folgenden zusammengefasst werden.

Einen der wichtigsten Ansprüche beschreibt die Forderung nach einer bestmöglichen Approximationsqualität, welche das reduzierte System verglichen mit dem

aus dem FEM-Modell resultierenden Originalsystem aufweisen muss. Gleichzeitig besteht die Anforderung, die generellen Struktureigenschaften einzuhalten. Hierzu zählen Aspekte wie die Stabilität, die Passivität, die Beobachtbarkeit sowie die Steuerbarkeit des Systems. Ist ein System im Ausgangszustand nach den in Abschnitt 3.2.5 definierten Kriterien stabil, so muss auch das reduzierte System diese Stabilität aufweisen. Diese Forderung gilt analog auch für die anderen Systemeigenschaften.

Zudem soll das aus dem FEM-Programm resultierende Gleichungssystem 2. Ordnung direkt vom Reduktionsverfahren verarbeitet werden können. Wenn gleich auch der Weg, das System zunächst in ein System 1. Ordnung zu transformieren und anschließend zu reduzieren, theoretisch gangbar ist, soll durch die direkte Anwendung des Reduktionsverfahrens auf das Gleichungssystem 2. Ordnung die Effizienz erheblich gesteigert werden. Hierdurch soll insbesondere der benötigte Speicherbedarf des Simulationsrechners gering gehalten werden. Gleichzeitig soll die dünn besetzte Struktur der Matrizen ausgenutzt werden, um die Rechenzeit möglichst kurz zu halten.

Eine gewisse Besonderheit ist durch die zur Simulation von Verfahrbewegungen benötigten Starrkörpermoden in FEM-Modellen von Werkzeugmaschinen gegeben. Diese sollen auch nach der Reduktion erhalten bleiben, um das Systemmodell in einer gekoppelten Simulation verwenden zu können. Da moderne CACE-Umgebungen für die Zeitbereichssimulation in der Regel mit Systemen 1. Ordnung rechnen, soll das reduzierte System einfach in die geforderte Form zu transformieren sein oder direkt in dieser ausgegeben werden können. In der endgültigen Ausprägung müssen die Starrkörpermoden noch im System enthalten sein.

Darüber hinaus interessieren bei einem strukturmechanischen Systemmodell meist verschiedene Übertragungsstrecken, d. h. das System hat entsprechend mehrere Ein- und Ausgänge. Ein für die Beurteilung der Werkzeugmaschinenqualität relevantes Kriterium bildet der relative oder absolute Nachgiebigkeitsfrequenzgang am TCP. Dieser wird meist in allen drei translatorischen Koordinatenrichtungen betrachtet, wodurch ein MIMO-System mit drei Kraftein- und drei Verschiebungsausgängen entsteht. Wird das Modell im Kontext der Mechaniksimulation verwendet, sind auch rotatorische Ein- und Ausgänge relevant, wie bspw. das auf den Rotor des Servomotors wirkende Rotationsmoment oder dessen resultierende Drehgeschwindigkeit. Hier kommt eine weitere Besonderheit zum Tragen. Für den Geschwindigkeitsregler der Vorschubachsen werden Informationen über die aktuelle Geschwindigkeit am Messsystem benötigt. Im Systemmodell äußert sich dies neben der Ausgangsmatrix der Verschiebungen  $\mathbf{C}_p$  zusätzlich in der Existenz von  $\mathbf{C}_v$ , mit deren Hilfe die Geschwindigkeiten einzelner Freiheitsgrade ausgegeben werden (vgl. Gleichung 3.28). Für den

Fall, dass  $C_v \neq \mathbf{0}$ , soll diese Struktur ebenfalls nach der Reduktion erhalten bleiben.

Die oben beschriebenen Anforderungen gelten auch für die bisher angewendeten modalen Reduktionsverfahren. Darauf hinaus bestehen für die effiziente Simulation von Werkzeugmaschinen weitere Forderungen, die die Potenziale der bekannten modalen Verfahren übersteigen. So soll das Reduktionsverfahren derart gestaltet sein, dass auch Modelle mit nicht proportionaler Dämpfungs-matrix bei gleichzeitiger Erhaltung der Originaleigenschaften reduziert werden können.

Ein weiterer Anspruch besteht in der aus der praktischen Anwendung resultie-genden Forderung nach einer automatischen Reduktion. Das Verfahren soll den bei den modalen Methoden bislang benötigten Erfahrungsschatz des Anwen-ders substituieren. Letzterer soll lediglich die Angaben eines Frequenzbereiches, welcher approximiert werden soll, sowie eine Fehlerschranke, die der Approximationsfehler nicht überschreiten darf, angeben müssen. Weiterhin soll die automatische Reduktion auch erfolgen, wenn eine maximal tolerierte Dimension des reduzierten Systems angegeben wird.

Die in der vorliegenden Arbeit herangezogenen Krylov-Unterraum-Verfahren bieten die Möglichkeit, die beschriebenen Anforderungen bei richtiger Anwen-dung zu erfüllen. Um einen zielgerichteten Einsatz der Verfahren zu gewährleis-ten, werden im folgenden Abschnitt die Einflussfaktoren sowie die Sensitivität unterschiedlicher Parameter im Hinblick auf das Reduktionsergebnis analy-siert.

### 4.3 Einflussfaktoren auf Krylov-Unterraum-Verfahren

#### 4.3.1 Darstellung des Beispieldystems

Wie in Abschnitt 3.7 bereits angedeutet, gibt es bei der Anwendung von Krylov-Unterraum-Verfahren mehrere Parameter, die Einfluss auf die Approximationsqualität des reduzierten Systems nehmen. In diesem Abschnitt werden daher diese Einflussfaktoren näher analysiert.

Für die Untersuchungen wird zunächst ein proportional gedämpftes Beispieldystem in Zustandsraumdarstellung mit 20 Freiheitsgraden verwendet. Das DGL-System erster Ordnung beschreibt das Verhalten eines Feder-Masse-Dämpfer-(FMD)-Systems mit 10 Einzelmassen, wie es in Bild 4.3 zu sehen ist. In diesem System werden die verschiedenen Massen  $m_i$  über Feder- und Dämpferelemente mit den Federkonstanten  $k_i$  und den Dämpfungskonstanten

$d_i$  gekoppelt. Die translatorischen Verschiebungen der Massekörper, welche aufgrund der angreifenden Kräfte  $f_i$  auftreten, werden mit  $x_i$  beschrieben.

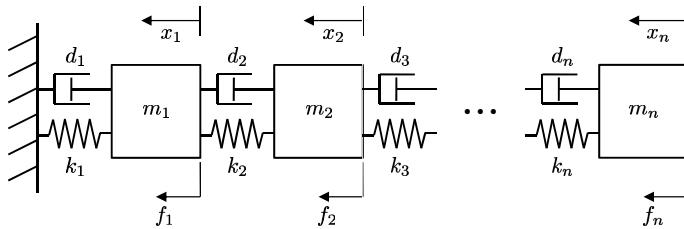


Bild 4.3: Schematische Darstellung eines Feder-Masse-Dämpfer-Systems  
(Die Parameter des Systems sind im Anhang A.2 aufgeführt.)

Die Parameter des Systems sind willkürlich gewählt und nicht als Abbild eines realen Systems zu verstehen. Aufgrund der hohen Übersichtlichkeit bezüglich der Pollagen und Amplitudenverstärkungen ist das System jedoch geeignet, die Effekte der Reduktion bei Variation unterschiedlicher Parameter zu demonstrieren. Zur Auswertung werden die Eigenwerte (EW) sowie das Übertragungsverhalten des Original- und des reduzierten Systems herangezogen und miteinander verglichen.

Das symmetrische Amplitudennachgiebigkeitsspektrum  $|\mathbf{H}(s)|$  dieses Systems mit der komplexen Frequenzvariablen  $s$  (vgl. Abschnitt 3.2.6) ist in Bild 4.4 dargestellt. In dieser Grafik wird der Übertragungspfad einer Kraftanregung am ersten Freiheitsgrad des DGL-Systems zweiter Ordnung auf die Auslenkung desselben betrachtet.

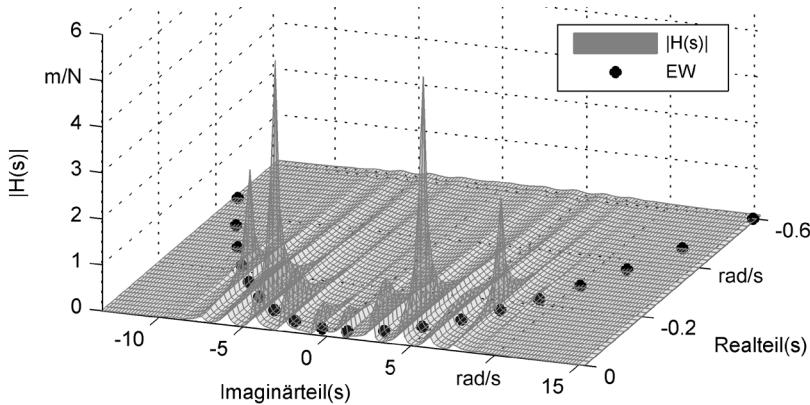


Bild 4.4: Amplitudenspektrum des Beispielsystems mit 20 Freiheitsgraden, aufgetragen über der komplexen Zahlenebene

Die Eigenwerte sind übersichtlicher in Bild 4.5 verdeutlicht und zeigen die konjugiert komplexe Verteilung der Pole des Systems. Hierbei ist anzumerken, dass die Eigenwerte bei großen Gleichungssystemen, wie sie aus der FEM hervorgehen, nicht vor der eigentlichen Reduktion berechnet werden. Für die folgenden Untersuchungen an den einfachen Beispielmodellen wurde das Eigenwertproblem lediglich vorab berechnet, um bspw. die Lage der Entwicklungsstellen gezielt mit der Kenntnis der Lage der Eigenwerte zu definieren.

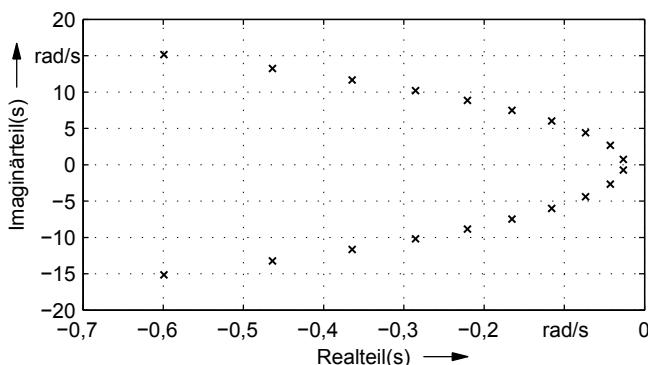


Bild 4.5: Lage der Pole des Originalsystems mit 20 Freiheitsgraden

Die Amplitudenspektren werden im Folgenden in der Regel über der positiven imaginären Achse aufgetragen, da aufgrund der Symmetrie zur reellen Achse auf die Darstellung des negativen imaginären Teils verzichtet werden kann. Diese übersichtliche Darstellung entspricht dem in Kapitel 3 behandelten Amplitudenspektrum der Übertragungsfunktion. Für die folgenden Untersuchungen und Ausführungen ist stets der Vergleich des originalen und des reduzierten Systems von besonderem Interesse.

### 4.3.2 Anzahl der Momente

Den Ausgangspunkt der Untersuchungen bildet die Reduktion des Beispielsystems mit Hilfe des in Abschnitt 3.7.5 erläuterten Krylov-Unterraum-Verfahrens, wobei insbesondere auf die Anzahl der zur Übereinstimmung gebrachten Momente eingegangen wird. Der Entwicklungspunkt (EP) liegt hierfür im Ursprung, d. h. bei  $s_0 = 0$ , und ist in den folgenden Spektren durch ein weiß gefülltes Dreieck gekennzeichnet.

Zunächst wurde das System auf die Dimension 8 reduziert, d. h. es wurden 8 Momente zur Übereinstimmung gebracht (siehe Bild 4.6). Der Vergleich der Amplitudenspektren des Originalsystems und des reduzierten Systems zeigt, dass die Approximationsqualität lediglich bis 4 rad/s gut ist. Im darüber liegenden Frequenzbereich kommt es zu großen Abweichungen mit der Verschiebung von Eigenkreisfrequenzen, was sich insbesondere bei dem bei 7 rad/s liegenden Maximum des reduzierten Systems zeigt. Die Konsequenz dieses Fehlers resultiert in einer deutlichen Überhöhung der Amplitude in diesem Frequenzbereich. Der Grund hierfür liegt in der Tatsache, dass der für die Amplitudenerhöhung relevante Eigenwert des reduzierten Systems vom zugehörigen Eigenwert des Originalsystems abweicht. Die Anzahl der Momente, welche mit denjenigen des Originalsystems übereinstimmen, ist demnach für den betrachteten Frequenzbereich nicht groß genug. Die Approximation der Übertragungsfunktion durch eine Reihenentwicklung mit 8 Summanden (Momenten) ist demnach nicht ausreichend.

Werden dagegen 12 Momente für die Reduktion verwendet, steigt erwartungsgemäß auch die Approximationsqualität an. Hierbei stehen dem reduzierten System genügend Eigenwerte zur Verfügung, um die wichtigsten Eigenwerte des Originalsystems gut anzunähern. Lediglich im Bereich von 9 rad/s kommt es noch zu geringfügigen Abweichungen der Amplitudenverstärkungen (Bild 4.7). Die höhere Approximationsqualität geht allerdings zu Lasten des Reduktionsgrades, da das reduzierte System nun die Dimension 12 besitzt.

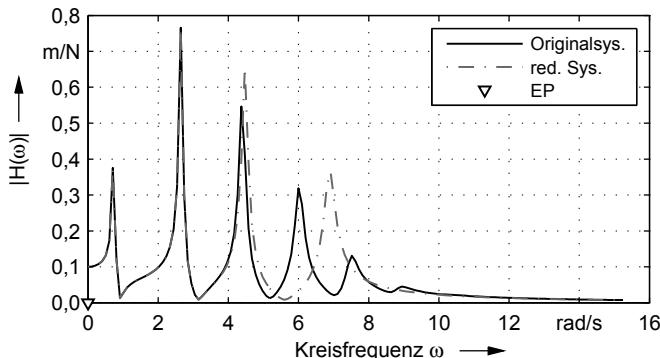


Bild 4.6: Amplitudenspektrum des Originalsystems und des reduzierten Systems bei der Verwendung von 8 Momenten

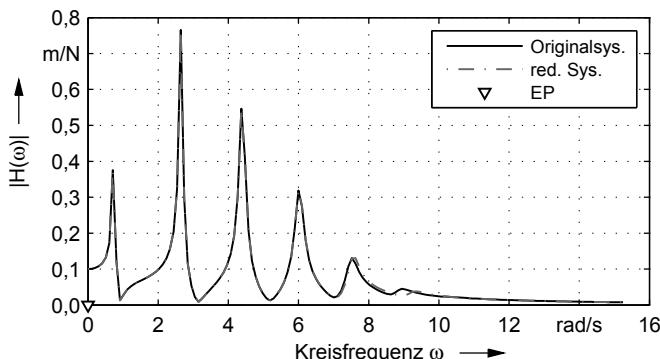


Bild 4.7: Amplitudenspektrum des Originalsystems und des reduzierten Systems bei der Verwendung von 12 Momenten

Der Vergleich der beiden aufgetragenen Spektren über der komplexen Ebene (Bild 4.8) zeigt auf, dass der Fehler des reduzierten Systems gegenüber dem Original gravierender ist als dies aus Bild 4.7 hervorgeht. Es fällt auf, dass ein Verstärkungsmaximum nur unzureichend angenähert wird. Aus diesem Grund werden im Folgenden der Real- und der Imaginärteil der komplexen Frequenzvariable getrennt analysiert. Der Imaginärteil der Kreisfrequenz  $\omega$  entspricht hierbei der Resonanzfrequenz, der Realteil stellt die Abklingkonstante dar (vgl. Gleichung (2.20) und (2.21)).

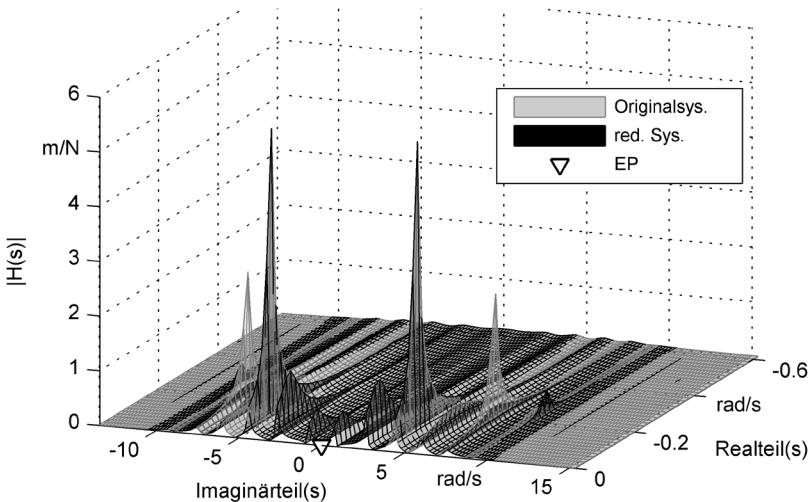


Bild 4.8: Vergleich der Amplitudenspektren von Original- und reduziertem System über der komplexen Zahlenebene bei Verwendung von 12 Momenten

Im Folgenden wird die Verteilung der Eigenwerte im reduzierten System näher analysiert. Den Ausgangspunkt stellt wiederum das Originalsystem mit 20 Freiheitsgraden dar. Zunächst wurden die Imaginärteile der Eigenwerte der unterschiedlich stark reduzierten Systeme ausgewertet. In Bild 4.9 ist zu erkennen, wie bei Anwendung des Krylov-Unterraum-Verfahrens die Lage der Pole in Abhängigkeit des Reduktionsgrades beeinflusst wird. Dabei fällt auf, dass bei ungeradzahliger Systemdimension jeweils ein Pol auf der reellen Achse liegt, da diese Systeme nicht mehr nur konjugiert komplexe Eigenwerte besitzen. Zur Sicherstellung einer reellen Lösung des Systems bleibt lediglich die Variante, dass ein einzelner Pol auf der reellen Achse liegt. Die beiden o. g. Beispiele mit reduzierter Dimension 8 bzw. 12 sind durch die gestrichelten Rechtecke hervorgehoben.

In dieser Darstellung fällt auf, dass die Eigenwerte des reduzierten Systems bei steigendem Reduktionsgrad sich immer stärker von den Eigenwerten des Originalsystems unterscheiden. Dies wird besonders bei den weiter vom Entwicklungspunkt entfernt liegenden Eigenwerten deutlich. Diese Lageabweichungen führen dazu, dass die Resonanzfrequenzen der approximierten Systeme nicht mehr mit denjenigen des Originalsystems übereinstimmen.

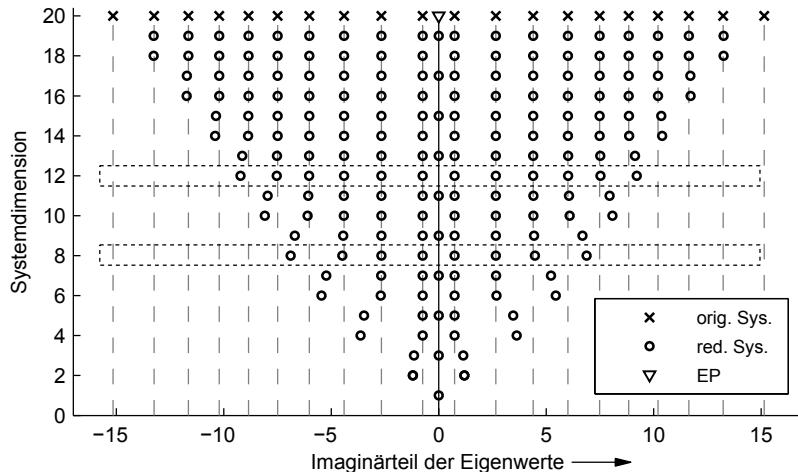


Bild 4.9: Lage der Imaginärteile der Eigenwerte des reduzierten Systems bei unterschiedlichem Reduktionsgrad

Ähnlich verhalten sich die Abweichungen der Realteile der Eigenwerte für geradzahlige Systemdimensionen (Bild 4.10). Bei der Verwendung einer ungeraden Momentenanzahl liegen die Eigenwerte der reduzierten Systeme betragsmäßig um ein Vielfaches über den Realteilen der abgebildeten Eigenwerte auf der reellen Achse. Um eine übersichtliche Darstellung zu gewährleisten, wurden die Eigenwerte von Systemen mit ungerader Dimension auf der reellen Achse ausgeblendet. Auch hierbei ist zu erkennen, dass bei höherem Reduktionsgrad die Abweichung der Realteile der Eigenwerte im Vergleich zu den Originalwerten zunimmt. Da die Realteile den Abklingkonstanten der einzelnen Moden entsprechen, ändern bzw. verfälschen diese Abweichungen somit im Modell das Dämpfungsverhalten der zugehörigen Moden. Die gestrichelt umrandeten Eigenwerte entsprechen wiederum den oben beschriebenen Beispielen.

Zusammenfassend ist festzustellen, dass bei der Anwendung der Krylov-Unterraum-Verfahren ein Kompromiss zwischen dem Reduktionsgrad, welcher durch die Anzahl der berücksichtigten Momente bestimmt wird, und der Approximationsqualität gefunden werden muss. Für die Beurteilung der Qualität des reduzierten Systems im Vergleich zum Originalsystem muss aufgrund der oben gewonnenen Erkenntnisse stets auch die Lage der Eigenwerte analysiert werden.

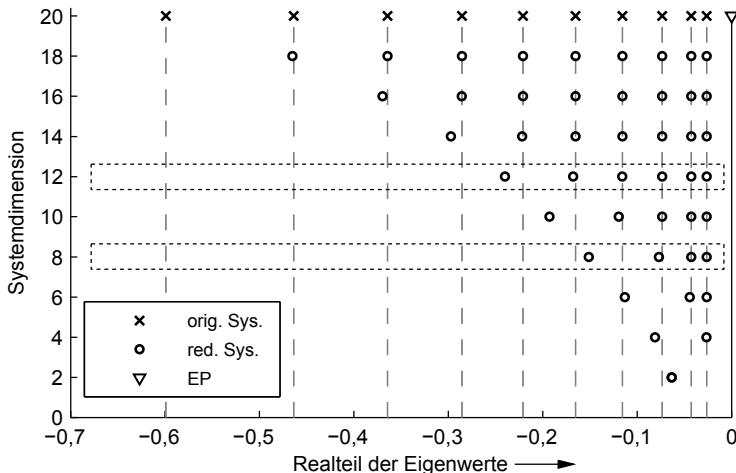


Bild 4.10: Lage der Realteile der Eigenwerte des reduzierten Systems bei unterschiedlichem Reduktionsgrad

### 4.3.3 Anwendung des ein- bzw. des zweiseitigen Krylov-Unterraum-Verfahrens

Als zweites Einflusskriterium wird im Folgenden die Wahl des Krylovraumes betrachtet. Hierfür kommt weiterhin das FMD-System mit 20 Freiheitsgraden zum Einsatz (siehe Abschnitt 4.3.1). Wie in Abschnitt 3.7.3 erläutert, besteht zwischen dem Ein- und dem Ausgangs-Krylovraum ein Unterschied, der sich auf das Reduktionsergebnis auswirkt. Dies ist in Bild 4.11 veranschaulicht, in welchem einmal nur der Eingangs-Krylovraum (links) und einmal nur der Ausgangs-Krylovraum (rechts) jeweils im einseitigen Verfahren, d. h.  $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ , angewendet wurde. Beide Male wurden hierfür 10 Momente zur Übereinstimmung gebracht. Die Unterschiede zwischen diesen beiden Verfahren zeigen sich vor allem im Bereich der ohnehin schlechten Approximation, d. h. im Bereich zwischen 7 und 10 rad/s.

Mit dem zweiseitigen Krylov-Unterraum-Verfahren besteht die Möglichkeit, bis zu zweimal so viele Momente bei gleicher Dimension des reduzierten Systems zur Übereinstimmung zu bringen. Dabei werden die orthonormalen Basen  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{W}$  des Eingangs- und des Ausgangs-Krylovraumes bestimmt. Sind diese biorthonormal, so ist die Projektionsvorschrift besonders einfach (siehe Abschnitt 3.2.3).

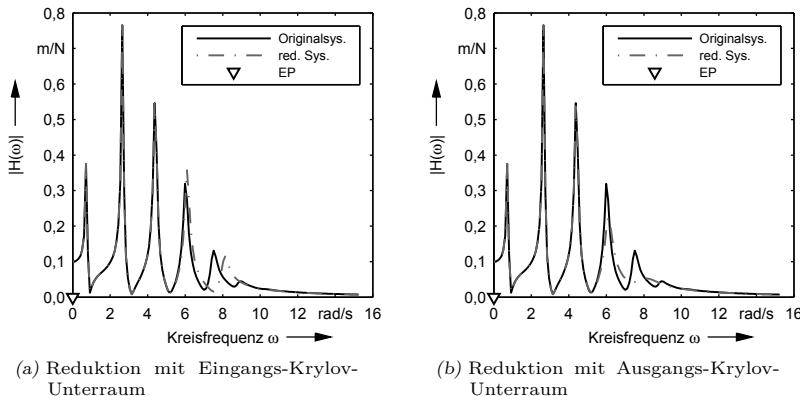


Bild 4.11: Gegenüberstellung der Amplitudenspektren von Original- und reduziertem System bei Verwendung des Eingangs- (a) bzw. des Ausgangs-Krylov-Unterraumes (b) (Modell mit 20 FHG aus Abschnitt 4.3.1)

In Bild 4.12 sind das einseitige und das zweiseitige Verfahren einander gegenüber gestellt. Für beide Varianten wurden jeweils 8 Momente zur Übereinstimmung gebracht. Der Vergleich der Nachgiebigkeitsspektren zeigt für das Beispielsystem nahezu keinen Unterschied. Zur Verdeutlichung ist in der rechten Abbildung die Differenz der beiden Varianten dargestellt.

Da beim zweiseitigen Verfahren auch zwei Projektionsmatrizen bestimmt werden müssen, verdoppelt sich der numerische Aufwand hierbei. Für die Approximationsergebnisse des reduzierten Beispielsystems ergibt sich lediglich eine sehr kleine Verbesserung, die optisch kaum auflösbar ist (siehe Abbildung 4.12a). Aus diesem Grund ist der Einsatz der zweiseitigen Verfahren stets zu hinterfragen, da diese einen höheren numerischen Aufwand bedeuten und damit das Aufwand-Nutzen-Verhältnis belasten.

#### 4.3.4 Mehrere Entwicklungspunkte und Wahl ihrer Lage

In den bisherigen Untersuchungen wurde die Approximation der Übertragungsfunktion stets auf der Grundlage einer Reihenentwicklung an einer einzigen Stelle diskutiert. Wie in Abschnitt 3.7.4 erläutert, wurden bereits Verfahren vorgestellt, welche mehrere Entwicklungspunkte verwenden, um weit vom sonst einzigen Entwicklungspunkt gelegene Bereiche ebenfalls gut approximieren zu können. Die Wahl der Lage der Entwicklungspunkte ist für das Reduktionsergebnis dabei ein wichtiger Einflussfaktor, unabhängig von deren Anzahl. An der Stelle jedes Entwicklungspunktes wird die entwickelte Funktion bereits

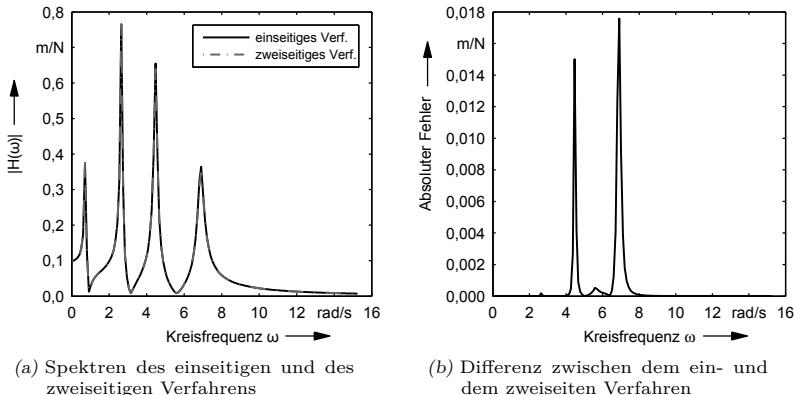


Bild 4.12: Vergleich der berechneten Übertragungsfunktionen des mit dem einseitigen und mit dem zweiseitigen Verfahren reduzierten Systems sowie Veranschaulichung der resultierenden Differenz zwischen beiden Verfahren (Modell mit 20 FHG aus Abschnitt 4.3.1)

bei Verwendung eines einzigen Momentes exakt beschrieben. Dadurch lässt sich bspw. die statische Nachgiebigkeit mechanischer Systeme durch einen Entwicklungspunkt bei Null, d. h. im Ursprung der komplexen Zahlenebene, korrekt darstellen.

Im Folgenden wird der Einfluss der Anzahl der Entwicklungspunkte sowie ihrer Lage verdeutlicht. Hieraus können sich sowohl positive als auch negative Eigenenschaften für die Approximation des Originalsystems ergeben. Zur Darstellung der Eigenwertverteilungen in der komplexen Zahlenebene in Abhängigkeit von der Lage der Entwicklungspunkte wird hierfür die einheitliche Notation aus Tabelle 4.1 verwendet.

$\times$	EW des Originalsystems
$\circ$	EW des reduzierten Systems
$\nabla$	Entwicklungspunkt(e)

Tabelle 4.1: Legende zur Darstellung der Eigenwertverteilung in der komplexen Zahlebene

Im linken Teil von Bild 4.13 ist die Eigenwertverteilung des Original- und des reduzierten Systems bei Verwendung eines Entwicklungspunktes dargestellt, welcher auf der reellen Achse liegt und einen negativen Realteil aufweist. In

diesem Fall bleibt die Symmetrie des Spektrums erhalten, was auch an der Verteilung der Eigenwerte des reduzierten Systems erkennbar ist.

Wird dagegen ein Entwicklungspunkt gewählt, welcher nicht auf der reellen Achse liegt, so resultiert eine unsymmetrische Verteilung (Bild 4.13b). Zusätzlich ist zu erkennen, dass das System nicht mehr stabil ist, weil auch Pole mit positivem Realteil vorhanden sind. Hierdurch wird die Lösung des reduzierten Systems instabil und komplex. Weil somit wichtige Eigenschaften des Originalsystems nicht erhalten bleiben bzw. sogar verfälscht werden, ist dieses Reduktionsergebnis unbrauchbar.

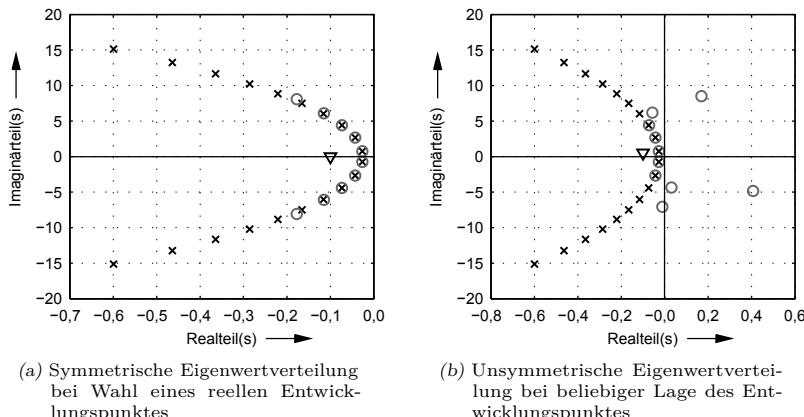


Bild 4.13: Einfluss der Wahl des Entwicklungspunktes auf die Eigenwertverteilung des reduzierten Systems (Modell mit 20 FHG)

Im nächsten Schritt werden zwei konjugiert komplexe Entwicklungspunkte mit negativem Realteil verwendet, deren Lage im linken Teil von Bild 4.14 zu erkennen ist. Da der Amplitudenfrequenzgang nur über der positiven imaginären Achse aufgetragen ist, ist der zweite Entwicklungspunkt im Spektrum nicht zu sehen. Wie dem rechten Teil von Bild 4.14 zu entnehmen ist, wird erwartungsgemäß der Bereich um den Entwicklungspunkt gut approximiert, bei höheren Frequenzen kommt es dagegen zu deutlichen Abweichungen.

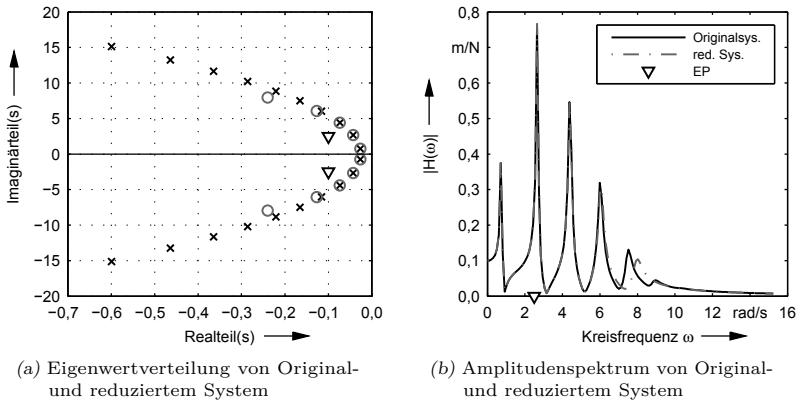


Bild 4.14: Reduktionsergebnisse bei Anwendung zweier konjugiert komplexer Entwicklungspunkte mit negativem Realteil (Modell mit 20 FHG)

Zur Verdeutlichung des Lageeinflusses sind in Bild 4.15 die Ergebnisse bei Vergrößerung der Beträge der Imaginärteile der Entwicklungspunkte auf  $imag(EP) = \pm 6$  dargestellt. Verglichen mit dem Spektrum in Bild 4.14 ist die Approximation des Originalsystems im Bereich des Ursprungs schlecht. In der Nähe des Entwicklungspunktes hingegen wird eine hohe Approximationsgüte erreicht. Die Anzahl der Momente ist in beiden Abbildungen identisch.

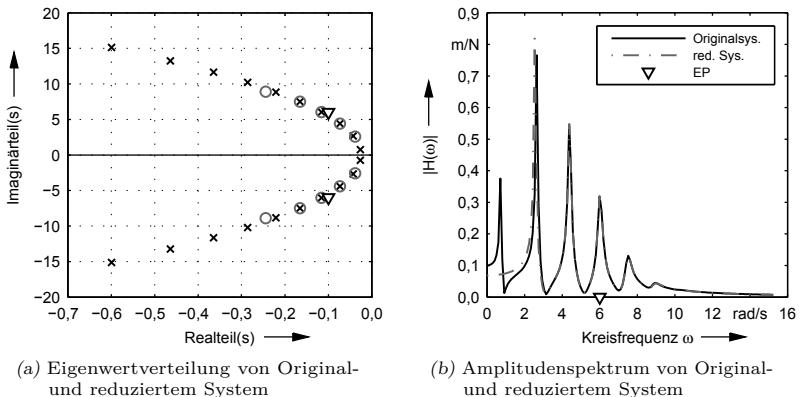


Bild 4.15: Reduktionsergebnisse bei Anwendung zweier konjugiert komplexer Entwicklungspunkte mit vergrößertem Imaginärteil (Modell mit 20 FHG)

Wie in Abschnitt 3.7.5 erläutert, wird die Dimension des reduzierten Modells durch das Produkt aus der Anzahl der Eingänge, der Anzahl der Entwicklungspunkte und der berücksichtigten Momente pro Entwicklungspunkt festgelegt. An dieser Stelle gilt es nun die Frage zu klären, wie die günstigste Kombination aus der Anzahl von Entwicklungspunkten und der dazugehörigen Momente aussieht. Für die Untersuchungen wird ein zweites System mit der Dimension 24 (Parameter siehe Anhang A.2) betrachtet und die Zahl der Entwicklungspunkte sukzessive gesteigert. Die Dimension des reduzierten Systems bleibt dabei konstant bei 12, d. h. es liegt stets ein Reduktionsgrad von 50 % vor. Dabei wird jeweils die Übertragungsstrecke von einem Freiheitsgrad der Anregung, in diesem Beispiel dem dritten, zu einem Freiheitsgrad der Auslenkung, hier dem ersten, als Vergleichskriterium verwendet. Es liegt demnach ein SISO-System vor.

Die Imaginärteile der Entwicklungspunkte werden hierfür wieder manuell festgelegt, der erste nahezu mit der zweiten Eigenfrequenz des Originalsystems übereinstimmend, der zweite zwischen zwei Eigenfrequenzen. Die Realteile folgen der Verteilung der Eigenwerte entlang der neg. Abszisse, d. h. deren Beträge werden größer. In Bild 4.16 sind die Spektren sowie die Eigenwertverteilungen des Original- und des reduzierten Systems bei zwei unterschiedlichen Kombinationen aus Anzahl der Entwicklungsstellen und Anzahl der zugehörigen Momente visualisiert. Die oberen beiden Abbildungen (a) und (b) zeigen die Eigenwertverteilung und das Amplitudenspektrum von Original- und reduziertem System bei Verwendung von 2 konjugiert komplexen Entwicklungspunkten, in welchen je 6 Momente zur Übereinstimmung gebracht wurden. In den Abbildungen (c) und (d) sind die Ergebnisse bei Verwendung von 4 Entwicklungspunkten mit je 3 Momenten dargestellt.

Der Theorie entsprechend wird das Originalsystem jeweils im Frequenzbereich der Entwicklungsstellen gut approximiert. In Bild 4.16 (a) und (b) zeigt sich eine hohe Übereinstimmung bis einschließlich der vierten Eigenmode. Darüber hinaus nehmen die Abweichungen deutlich zu. Die Erhöhung der Anzahl der Entwicklungspunkte lässt die bessere Approximation eines größeren Frequenzbereichs erwarten. In Bild 4.16 (c) ist jedoch zu erkennen, dass drei zur Übereinstimmung gebrachte Momente pro Entwicklungspunkt nur jeweils einen kleinen Frequenzbereich um den selben gut approximieren. Der erste und der dritte Eigenwert weichen deutlich voneinander ab, was auch im Spektrum (Bild 4.16 (d)) anhand der Amplitudenunterschiede erkennbar ist.

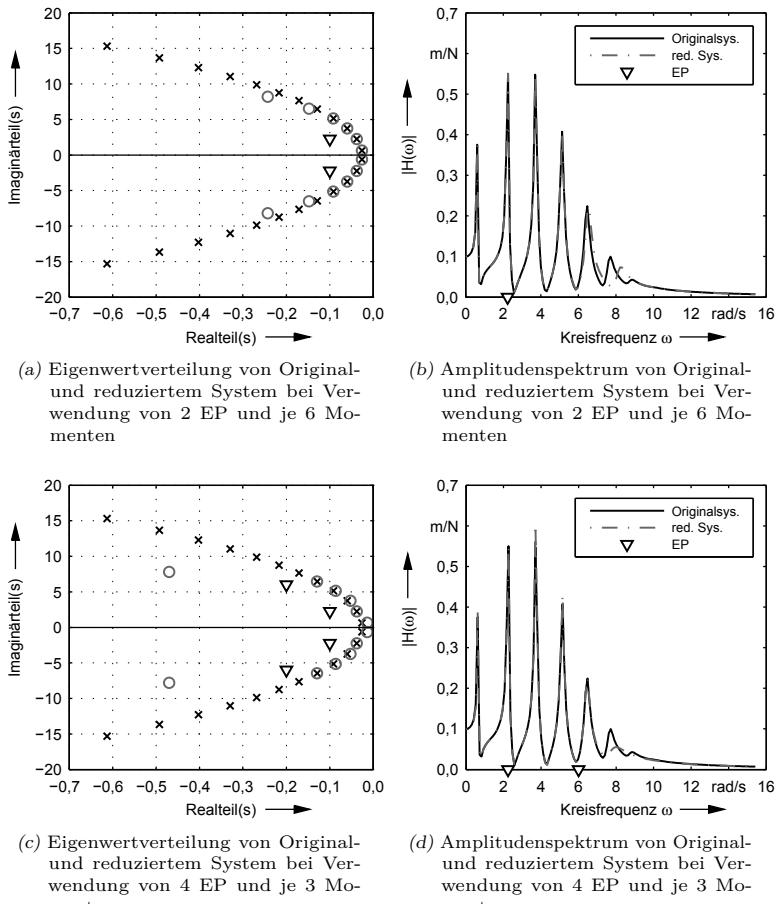


Bild 4.16: Reduktionsergebnisse bei der Anwendung unterschiedlicher Kombinationen aus Entwicklungspunkten und zugehöriger Anzahl von Momenten (Modell mit 24 FHG aus Abschnitt 4.3.1)

Die Ergebnisse bei einer Steigerung der Anzahl der für die Reduktion verwendeten Entwicklungspunkte auf 6 mit je 2 Momenten sind in Bild 4.17 dargestellt. Hierbei offenbart sich, dass Krylov-Unterraum-Verfahren sehr sensativ auf die Wahl der Lage der Entwicklungspunkte reagieren. Im oberen Teil der Abbildung wurden die 6 Entwicklungspunkte grob in die Nähe der Eigenfrequenzen des

Originalsystems gelegt, wobei betragsmäßig durchaus große Realteile verwendet wurden. Dabei ist eine breite Streuung der Eigenwerte des reduzierten Systems zu erkennen, was sich in einer sehr schlechten Approximationsqualität niederschlägt. Gelingt es hingegen, die Entwicklungspunkte mit einem Teil der Eigenwerte des Originalsystems zur Übereinstimmung zu bringen, so ergeben sich sehr gute Approximationseigenschaften des reduzierten Systems. Dieser Fall ist in den unteren beiden Abbildungen von Bild 4.17 zugrunde gelegt.

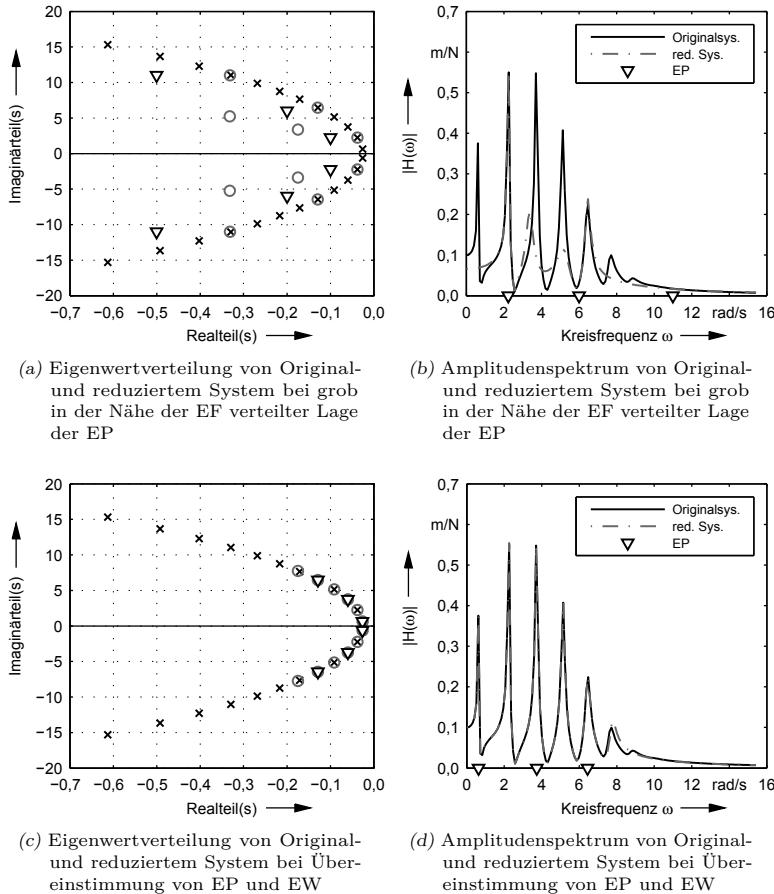


Bild 4.17: Reduktionsergebnisse bei unterschiedlicher Verteilung von 6 konjugiert komplexen Entwicklungspunkten mit je 2 Momenten

### 4.3.5 Zusammenfassung

Die Ergebnisse der oben dargestellten Untersuchungen zeigen eine große Abhängigkeit der Approximationsqualität von den untersuchten Einflussgrößen *Anzahl der Momente, Anzahl und Lage der Entwicklungspunkte* sowie *Art des Krylov-Unterraumes* (Eingangs- oder Ausgangs-KU) auf. Besonders relevant ist hierbei die Lage der Entwicklungspunkte. Für eine hohe Ergebnisqualität muss demzufolge die Übertragungsfunktion besonders in der Nähe der Eigenwerte des Originalsystems gut beschrieben werden, weshalb die Entwicklungspunkte möglichst nahe bei den dominanten Eigenwerten des Originalsystems liegen sollten. Diese sind vor der Anwendung des Reduktionsverfahrens aber nicht bekannt und eine A-priori-Berechnung der Eigenwerte ist gerade für große Systeme aufgrund der aufwendigen Lösung nicht zielführend. Eine Möglichkeit, die Entwicklungspunkte dennoch möglichst zur Übereinstimmung mit den Eigenwerten zu bringen, kann eine iterative Bestimmung derselben sein (vgl. Abschnitt 4.4.6).

## 4.4 Bestandteile des Reduktionsverfahrens

### 4.4.1 Allgemeines und Aufbau des Verfahrens

In der vorliegenden Arbeit kommen Krylov-Unterraum-basierte Reduktionsverfahren für die Simulation von Werkzeugmaschinen zum Einsatz. Der Fokus liegt dabei nicht auf der Entwicklung mathematischer Algorithmen, sondern auf einem Konzept zur Integration eines Reduktionsverfahrens in den simulationsbasierten Entwicklungsprozess. Aus diesem Grund wird größtenteils auf bereits veröffentlichte Algorithmen und Verfahren zurückgegriffen, die als Lösungsbauusteine des Reduktionsverfahrens dienen<sup>2</sup>.

Das allgemeingültige Vorgehen während des Reduktionsprozesses mit Krylov-Unterraum-Verfahren zeigt Bild 4.18. Zu Beginn muss die Lage und Anzahl der Entwicklungstellen festgelegt werden. Im nächsten Schritt werden die Matrizen  $P$  und  $Q$  bestimmt, woraus sich die Krylov-Sequenz ergibt. Zu dieser Sequenz gilt es dann geeignete orthonormierte Basisvektoren zu finden, um die Projektionsmatrizen  $V$  und  $W$  zu generieren. Durch die Anwendung einer Links-Rechts-Multiplikation mit den Koeffizientenmatrizen des zu reduzierenden

---

<sup>2</sup> Eine wichtige Quelle stellt die Arbeit von SOPPA (2011) dar, welche aus dem von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Forschungsprojekt *Integrierte Simulation des Systems „Werkzeugmaschine - Antrieb - Zerspanprozess“ auf der Grundlage ordnungsreduzierter FEM-Strukturmodelle* hervorging.

Systems wird schließlich die Reduktion der Dimension hervorgerufen (vgl. Abschnitt 3.5).

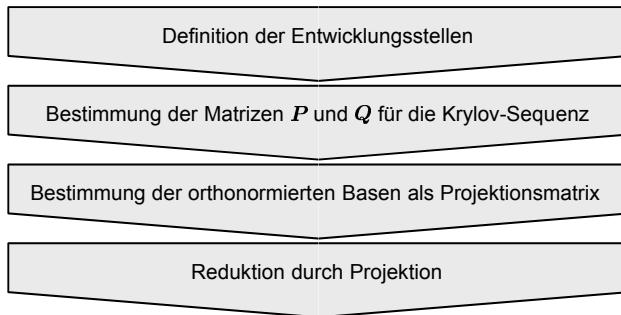


Bild 4.18: Schematischer Ablauf des Reduktionsprozesses

Dieser Ablauf gibt die Grundstruktur vor, auf der demnach auch eine an Werkzeugmaschinenmodelle adaptierte Vorgehensweise basieren muss. Da die Approximationsgüte der Reduktion durch die Projektionsmatrizen definiert wird, kann eine Anpassung für strukturmechanische Modelle lediglich im Wirkungsbereich der ersten drei Schritte erfolgen. Durch geeignete Überprüfungen lässt sich ggf. die Approximationssqualität mit definierten Iterationsschleifen verbessern.

Bild 4.19 gibt die Lösungsansätze zur Erfüllung der in Abschnitt 4.2 definierten Anforderungen wieder. Hierin sind auf der rechten Seite die resultierenden Lösungsbauusteine aufgeführt, welche aufeinander aufbauend ihre Berücksichtigung im Reduktionsverfahren finden. Der von SOPPA (2011) unter dem Namen *VAIRGA (vollständiger adaptiver iterativer rationaler globaler Arnoldi-Algorithmus)* publizierte Algorithmus berücksichtigt die relevanten Aspekte für die Reduktion von Werkzeugmaschinenmodellen, welche eine proportionale Dämpfungsmaatrix aufweisen. Dieses Verfahren wird im weiteren Verlauf der Arbeit intensiver beleuchtet.

Die folgenden Abschnitte beschreiben die jeweiligen Lösungsbauusteine näher, um ein besseres Verständnis der Zusammenhänge zu vermitteln. Hierbei soll ein Überblick über die relevanten Schritte gegeben, dabei aber nicht alle mathematischen Einzelheiten erläutert werden. Für detailliertere Betrachtungen wird deshalb teilweise auf den Anhang bzw. die entsprechenden Literaturquellen verwiesen.

Der erste Baustein beschreibt eine Definition der Krylov-Sequenz, welche es erlaubt, große lineare Systeme 2. Ordnung ohne die Transformation in ein

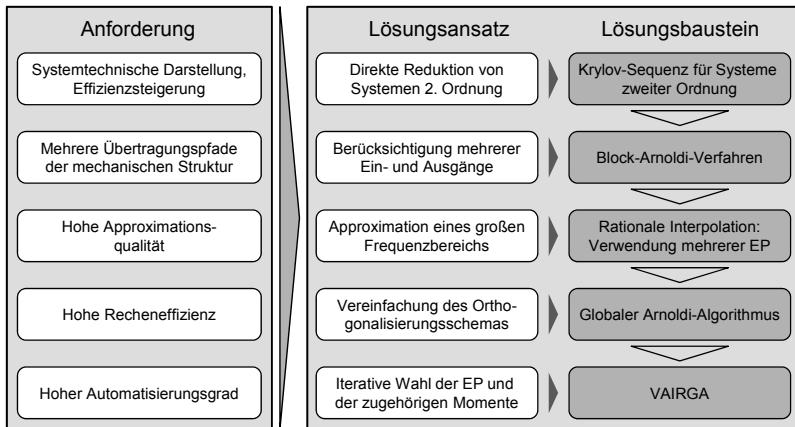


Bild 4.19: Herleitung der Lösungsbausteine für das Reduktionsverfahren auf Basis der gestellten Anforderungen

System 1. Ordnung zu reduzieren. Im nächsten Schritt wird die Umsetzung der Berücksichtigung mehrerer Systemein- und ausgänge im Reduktionsverfahren erläutert. Schließlich folgt der Einsatz mehrerer Entwicklungspunkte, um einen möglichst großen Frequenzbereich gut approximieren zu können, bevor auf die Automatisierung des Reduktionsverfahrens eingegangen wird.

#### 4.4.2 Reduktion von Systemen zweiter Ordnung

Krylov-Unterraum-Verfahren wurden ursprünglich für Differenzialgleichungssysteme erster Ordnung entwickelt und eingesetzt. Da die Modellierung vieler technischer Anwendungen aber Systeme zweiter Ordnung hervorbringt, wurden bereits Verfahren zur Reduktion derselben vorgestellt und diskutiert. In der Regel handelt es sich dabei um einseitige Krylov-Unterraum-Verfahren, da diese die Forderung nach der Erhaltung der Passivität und Stabilität erfüllen (SALIMBAHRAWI 2005). Für die in der vorliegenden Arbeit relevanten Strukturmodelle zweiter Ordnung kommen aus diesem Grund ausschließlich einseitige Krylov-Unterraum-Verfahren zum Einsatz.

In Abschnitt 3.7.1 wurden sog. Krylov-Unterräume zweiter Ordnung für die Reduktion von Systemen zweiter Ordnung definiert. Dabei spielt die Dämpfungsmaatrix  $D$  dieser Systeme eine besondere Rolle, weil sie den Kopplungsgrad der Gleichungen festlegt. Für die in diesem Abschnitt betrachteten Maschinenmodelle mit proportionaler Dämpfung ergibt sich der Sonderfall, dass, wie von BEATTIE & GUGERCIN (2005) sowie EID ET AL. (2007) gezeigt, für

ungedämpfte und proportional gedämpfte Systeme auch die konventionellen Krylov-Unterräume zur Ermittlung der orthogonalen Basen verwendet werden können. Demnach gilt nach EID ET AL. (2007)

$$\mathcal{K}_m(-\check{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{M}, \check{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{B}) = \mathcal{G}_m(-\check{\mathbf{K}}^{-1}(\alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}), -\check{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{M}, \check{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{B}) \quad (4.1)$$

mit  $\check{\mathbf{K}}$  aus Gleichung (3.62). Für das proportional gedämpfte System zweiter Ordnung können dann

$$\mathbf{P} = -(s_0^2\mathbf{M} + s_0\mathbf{D} + \mathbf{K})^{-1}\mathbf{M} \quad \text{und} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{Q} = (s_0^2\mathbf{M} + s_0\mathbf{D} + \mathbf{K})^{-1}\mathbf{B} \quad (4.3)$$

in der Krylov-Sequenz (3.91) zur Bestimmung der Basisvektoren gewählt werden, um damit einen Momentenabgleich zu gewährleisten (BEATTIE & GUGERCIN 2005).

Die Invertierung des Ausdrucks  $(s_0^2\mathbf{M} + s_0\mathbf{D} + \mathbf{K})$  zur Berechnung der Matrizen  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{Q}$  ist numerisch sehr aufwendig. Um die Berechnung effizient zu gestalten, wird hierfür die  $LU$ -Zerlegung herangezogen:

$$\mathbf{LU} = (s_0^2\mathbf{M} + s_0\mathbf{D} + \mathbf{K}). \quad (4.4)$$

Die untere und obere Dreiecksmatrix  $\mathbf{L}$  bzw.  $\mathbf{U}$  lassen sich dann deutlich einfacher invertieren, sodass die Matrizen  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{Q}$  wie folgt berechnet werden können:

$$\mathbf{P} = -\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{M}) = -\mathbf{U}\backslash(\mathbf{L}\backslash\mathbf{M}) \quad \text{und} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{U}^{-1}(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{B}) = \mathbf{U}\backslash(\mathbf{L}\backslash\mathbf{B}). \quad (4.6)$$

Mit diesen Matrizen kann schließlich die Krylov-Sequenz nach dem in Gleichung (3.90) bzw. (3.91) dargestellten Schema aufgebaut werden, wobei diese so viele Elemente enthält wie Momente zur Übereinstimmung gebracht werden sollen.

#### 4.4.3 Berücksichtigung mehrerer Systemein- und -ausgänge

Um der Anforderung gerecht zu werden, die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Systeme mit mehreren Ein- und Ausgängen reduzieren zu können, kommt an dieser Stelle die Blockversion des Arnoldi-Algorithmus (vgl. Abschnitt 3.7.5) zum Einsatz. Da die betrachteten Ein- bzw. Ausgänge je einen Spaltenvektor der Eingangs- bzw. Ausgangsmatrix festlegen, werden diese bei der Berechnung der Projektionsmatrix blockweise berücksichtigt. Anstelle nur eines Vektors zur Bestimmung des nächsten Krylov-Unterraumvektors für das jeweilige Moment kommen bei diesem Verfahren stets mehrere zu einem Block zusammengefasste Vektoren hinzu.

Prinzipiell eignen sich für die hier betrachteten Systeme beide in Abschnitt 3.7.5 vorgestellten Varianten des Block-Arnoldi-Algorithmus. Die spaltenweise Orthogonalisierung der neuen Block-Krylov-Unterräume verringert das Risiko, dass linear abhängige Vektoren während der Generierung der Projektionsmatrix auftreten und lässt zudem den Einsatz einer Deflationstoleranz zu. Für große Strukturmodelle ist dieses Vorgehen aber mit einem erheblichen numerischen Aufwand verbunden, welcher mit zunehmender Anzahl von Ein- bzw. Ausgängen weiter zunimmt.

Aus diesem Grund wird für die in der vorliegenden Arbeit betrachteten Modelle ein kombiniertes Verfahren aus einer blockweisen Orthogonalisierung und einer anschließenden Reorthonormalisierung angewendet. Für eine möglichst hohe Recheneffizienz wird jeweils der pro Moment neu hinzugekommene Block gegenüber den bestehenden orthogonalisiert. Zur Vermeidung linearer Abhängigkeiten in der Projektionsmatrix wird in dem Vorgehen eine Rank-Revealing- $QR$ -Zerlegung mit anschließender Auslöschung der linear abhängigen Vektoren sowie der Reorthonormalisierungsalgorithmus von SADKANE (1993) berücksichtigt und ergänzt. Das entsprechende Strukturdiagramm des Algorithmus für diesen Lösungsbaustein ist im Anhang A.3.1 erläutert.

#### 4.4.4 Verwendung mehrerer Entwicklungspunkte

Bei strukturmechanischen Modellen können die Eigenfrequenzen über einen weiten Frequenzbereich verstreut sein. Dies führt bei der Anwendung der Krylov-Unterraum-Verfahren, wenn der Momentenabgleich in nur einem Entwicklungspunkt erwirkt wird, zu Qualitätseinbußen hinsichtlich der Approximation in weit vom Entwicklungspunkt gelegenen Frequenzbereichen. Um dem entgegen zu wirken, kommen in dieser Arbeit die in Abschnitt 3.7.4 vorgestellten rationalen Krylov-Verfahren zum Einsatz, welche mehrere Entwicklungspunkte für den Momentenabgleich verwenden. Hierbei wird eine Vereinigung mehrerer Vektorräume zur Bestimmung der Projektionsmatrix herangezogen, die sich aus den Krylov-Unterräumen an der jeweiligen Entwicklungsstelle ergibt. Die Stufen der Krylov-Unterräume an den einzelnen Entwicklungsstellen können dabei variieren, d. h. pro Entwicklungsstelle besteht die Möglichkeit, unterschiedlich viele Momente zur Übereinstimmung zu bringen.

Wie in Abschnitt 3.7.4 ausgeführt, gibt es für die rationale Interpolation keine mathematische Formulierung in Form einer Übertragungsfunktion. Aus diesem Grund muss die Gesamtprojektionsmatrix  $\mathbf{V}$  aus mehreren Basismatrizen zusammengesetzt werden (vgl. Gleichung (3.105)). Zu deren Bestimmung wird der (Block-)Arnoldi-Algorithmus für die Krylov-Sequenz jeder Entwicklungsstelle durchlaufen, wodurch die Projektionsmatrix nicht nur für jede Stufe

des Krylov-Unterraumes erweitert wird, sondern auch für jede Entwicklungsstelle mit deren zugehörigen Stufenvektoren. Im Reduktionsalgorithmus wird dies durch eine Iterationsschleife über alle  $s_i$  Entwicklungsstellen umgesetzt, zu welchen jeweils die Krylov-Sequenz und die dazugehörigen orthonormalen Basen berechnet werden. Letztere werden am Ende jeder Iteration der Projektionsmatrix hinzugefügt. Das Strukturdiagramm sowie weitere Einzelheiten dieses Lösungsbausteins zur rationalen Interpolation sind im Anhang A.3.2 dargestellt.

#### 4.4.5 Vereinfachung des Orthogonalisierungsschemas

Mit dem oben beschriebenen Verfahren ist es möglich, auch Systeme mit mehreren Ein- und Ausgängen zu behandeln. Dabei ist allerdings zu beachten, dass der numerische Aufwand mit der Anzahl der Ein- bzw. Ausgänge erheblich zunimmt. Um den Reduktionsprozess für diese Systeme dennoch möglichst effizient zu gestalten, lässt sich für Systeme 2. Ordnung ein Verfahren anwenden, welches auf dem sog. *globalen Arnoldi-Algorithmus* basiert. Den Kern des Verfahrens bildet eine Vereinfachung der Orthogonalisierung der neu berechneten Blöcke gegenüber den bestehenden Krylov-Unterraumvektoren.

Der globale Arnoldi-Algorithmus wurde erstmals von JBILOU ET AL. (1999) vorgestellt, wobei die Lösung linearer Gleichungen mit mehrfachen rechten Seiten und die von Lyapunov-Gleichungen im Fokus standen. Die Verwendung im Kontext der Modellreduktion von MIMO-Systemen 1. Ordnung stand im Mittelpunkt der Arbeiten von CHU ET AL. (2006, 2008).

Der hauptsächliche Unterschied zum klassischen (Block-)Arnoldi-Algorithmus liegt darin, dass beim globalen Arnoldi-Algorithmus das innere Produkt zweier Matrizen  $\langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle = \mathbf{P}^* \mathbf{Q}$  mit  $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{K}^{n \times s}$  durch  $\langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle_F = \text{spur}(\mathbf{P}^* \mathbf{Q})$  ersetzt wird und dadurch die induzierte Frobenius-Norm verwendet wird. Auf diese Weise erzeugt der globale Arnoldi-Algorithmus hinsichtlich der *Frobenius-Norm* orthogonale (*F-orthonormale*) Basisvektoren des Matrix-Krylov-Unterraumes  $\mathcal{K}_k(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \subset \mathbb{K}^{n \times s}$ , während der Block-Arnoldi-Algorithmus orthonormale Basen des Block-Krylov-Unterraumes  $\mathcal{K}_k(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \subset \mathbb{K}^n$  generiert. Der genaue Ablauf des globalen Arnoldi-Algorithmus ist in Anhang A.3.3 als Strukturdiagramm mit weiteren Erläuterungen erläutert. Dieser weist gegenüber der Blockversion des klassischen Arnoldi-Algorithmus einige numerische Vorteile auf:

- Bei der Anwendung des globalen Arnoldi-Algorithmus ist in jeder Iteration nur eine  **$QR$** -Zerlegung sowie die Teilung durch die Frobenius-Norm anstelle zweier  **$QR$** -Zerlegungen nötig.

- In der inneren Schleife ist für den globalen Arnoldi-Algorithmus nur die Berechnung der Spur anstelle eines Matrix-Matrix-Produkts erforderlich.
- Für die Orthogonalisierung in der inneren Schleife ist bei der Verwendung des globalen Arnoldi-Algorithmus nur ein Skalar-Matrix-Produkt, bei der Blockversion des klassischen Arnoldi-Algorithmus hingegen ein Matrix-Matrix-Produkt zu berechnen.

Die Anwendung des Vorgehens unter Einbindung des globalen Arnoldi-Algorithmus ermöglicht somit eine effizientere Reduktion von MIMO-Systemen als dies mit dem klassischen Arnoldi-Algorithmus möglich ist. Zur Demonstration wurden von SOPPA (2011) Vergleichsrechnungen angestellt, welche die benötigten Rechenzeiten des klassischen und des globalen Arnoldi-Algorithmus bei zunehmender Anzahl von Eingängen einander gegenüberstellen. Dabei wurde bei der Anwendung des klassischen Arnoldi zusätzlich zwischen den Versionen mit spalten- und blockweiser Orthogonalisierung unterschieden. Die Ergebnisse zeigen ein erhebliches Einsparpotenzial der numerischen Kosten bei Verwendung der Blockversion im Vergleich zur spaltenweisen Berechnung der Matrix  $\mathbf{V}$ .

Für die Reduktion der in der vorliegenden Arbeit fokussierten Strukturmodelle wird der im Anhang für Systeme zweiter Ordnung vorgestellte globale Arnoldi-Algorithmus angewendet. Dieser konnte bereits erfolgreich auf Strukturmodelle zweiter Ordnung von Werkzeugmaschinen angewendet werden (BONIN ET AL. 2010, 2011a).

#### 4.4.6 Automatisierung des Reduktionsverfahrens

Mit den in den vorangegangenen Abschnitten vorgestellten Algorithmen lassen sich hochdimensionale Strukturmodelle von Werkzeugmaschinen auf Basis von Krylov-Unterraum-Verfahren effizient reduzieren. Dabei hängt die Approximationsqualität jedoch, wie in Abschnitt 4.3.4 nachgewiesen, stark von der Anzahl und Lage der Entwicklungspunkte sowie der dazugehörigen Momente ab. Um den Anwender von einer manuellen Eingabe der Entwicklungspunkte und der Anzahl der Momente zu entlasten, empfiehlt sich ein von SOPPA (2011) vorgeschlagenes automatisches Verfahren zur Identifikation der optimalen Lage der Entwicklungspunkte und zur adaptiven Bestimmung der abgeglichenen Momente pro Stelle. Dieser Reduktionsalgorithmus (*VAIRGA*) sieht eine iterative Bestimmung der geeigneten Entwicklungsstellen vor. Zudem wird für jede Stelle die Stufe des Krylov-Unterraumes, basierend auf dem Verfahren von CHU ET AL. (2006), adaptiv bestimmt. Mit dem Einsatz eines Fehlerschätzers kann der Approximationsfehler in den iterativ bestimmten Punkten ausgewertet und der Prozess ggf. solange wiederholt werden, bis eine vorgegebene

Fehlerschranke unterschritten wird. Damit läuft die Reduktion ohne benötigte Benutzereingaben völlig automatisiert ab.

Im Folgenden wird dieses Vorgehen in vereinfachter Form erläutert (Bild 4.20). Da an dieser Stelle einige Berechnungsschritte zusammengefasst sind, wird anstelle der Strukturdiagramme zweckmäßiger Weise ein Ablaufdiagramm herangezogen. Für detailliertere Informationen zu den Algorithmen sei auf SOPPA (2011) und CHU ET AL. (2006) verwiesen.

Zu Beginn liegt das zu reduzierende System 2. Ordnung der Form (3.28) vor. Als Eingangsparameter werden vom Benutzer ein Intervall des zu approximierenden Frequenzbereichs mit der oberen Grenze  $f_{max}$ , ein maximal zulässiger Fehler in den Entwicklungsstellen  $\epsilon_s$  (Fehlerschranke) und ggf. eine maximal zulässige Dimension des reduzierten Systems  $r_{max}$  benötigt. Für den Start des Verfahrens werden die Anfangsentwicklungsstellen äquidistant über den Frequenzbereich verteilt und im Vektor  $s$  gespeichert. Der weitere Ablauf des Verfahrens ist durch zwei Iterationsschleifen gekennzeichnet. In der inneren wird die Projektionsmatrix  $V$  sukzessive um die Spaltenvektoren ergänzt, welche durch die Hinzunahme eines weiteren Entwicklungspunktes benötigt werden. Die Entscheidung, für welchen der vorliegenden Entwicklungsstellen das nächste Moment abgeglichen werden soll, erfolgt an der Stelle, die den größten geschätzten Momentenfehler im Vergleich zum Originalsystem aufweist (obere gestrichelte Markierung). Die äußere Schleife umfasst die innere und wiederholt den Vorgang stets mit neu gewählten Entwicklungsstellen so lange, bis die Differenz zweier aufeinander reduzierter Systeme bezüglich einer geeigneten Norm eine festgesetzte Konvergenzgrenze unterschreitet. In der Praxis hat sich gezeigt, dass der Konvergenzwert  $\delta$  bereits nach der zweiten Wiederholung sehr kleine Werte erreicht. Dies liegt an der Tatsache, dass bei der erstmaligen Neuberechnung der Entwicklungsstellen (untere gestrichelte Markierung) die Eigenwerte des Originalsystems bereits sehr gut approximiert werden, sodass mehr als zwei äußere Iterationen keine Verbesserungen der Ergebnisse mehr hervorbringen. Aus diesem Grund wird von SOPPA (2011) vorgeschlagen, die Konvergenzgrenze fest auf einen Wert von  $10^{-5}$  zu setzen oder vorzugeben, dass die Schleife exakt zweimal durchlaufen werden soll.

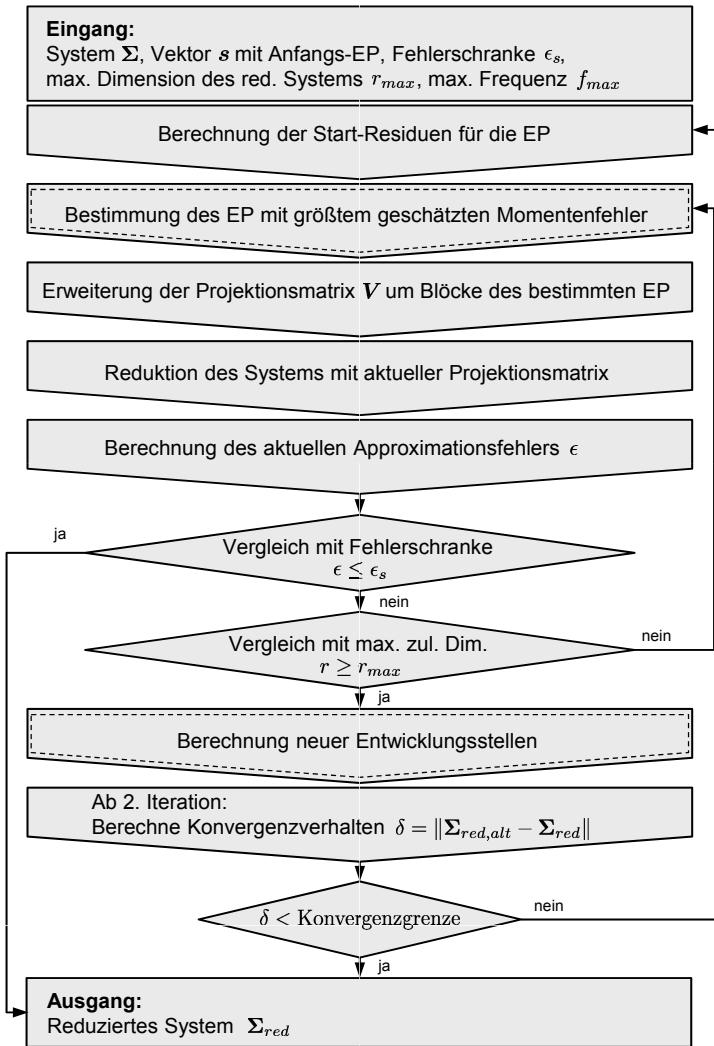


Bild 4.20: Vereinfachte Darstellung des VAIRGA-Ablaufes nach SOPPA (2011)

Die Besonderheit, welche sowohl die Automatisierung zu realisieren erlaubt als auch gleichzeitig für bestmögliche Approximationsergebnisse sorgt, liegt

demnach in den beiden Schritten, die in Bild 4.20 durch die gestrichelten Markierungen hervorgehoben sind:

- Die Auswahl des Entwicklungspunktes, der den größten geschätzten Momentenfehler aufweist; hierdurch wird aus der Menge der potenziell zur Verfügung stehenden Punkte stets für den ausgewählten ein weiteres Moment abgeglichen, wodurch die adaptive Anpassung der Stufe des jeweiligen Krylov-Unterraumes gewährleistet wird.
- Die Berechnung neuer Entwicklungsstellen, welche für die folgende Iteration zur Verfügung stehen; da hierbei die Eigenwerte des Originalsystems approximiert werden, wird eine bestmögliche Übereinstimmung des Systemverhaltens erzielt.

Die detailliertere Beschreibung der beiden o. g. Punkte ist im Anhang A.3.4 aufgeführt. Dort wird näher auf die Schätzung des Momentenfehlers sowie auf die Berechnung der Entwicklungsstellen für die nächste Iteration eingegangen. Durch den Abgleich der vom Benutzer vorgegebenen Fehlerschranke mit der Berechnung des Fehlerschätzers kann somit die Einhaltung einer gewünschten Approximationsqualität garantiert werden. Auf diese Weise sind keine weiteren Eingaben durch den Benutzer nötig, wodurch der Forderung nach einem größtmöglichen Automatisierungsgrad nachgekommen wird.

#### 4.4.7 Zusammenfassung

In den vorangegangenen Abschnitten wurden die nötigen Lösungsbausteine vorgestellt, mit denen die automatische Reduktion von strukturmechanischen FEM-Modellen von Werkzeugmaschinen möglich ist. Das resultierende Verfahren kann demnach direkt auf das DGL-System 2. Ordnung angewendet werden und durch die Verwendung mehrerer Entwicklungspunkte lässt sich ein großer Frequenzbereich gut approximieren. Zur Eingrenzung des numerischen Mehraufwands wurde ein effizientes Orthogonalisierungsschema herangezogen. Mit der automatischen Entwicklungsstellenwahl und der adaptiven Bestimmung der Stufe des jeweiligen Krylov-Unterraumes wird die geforderte Automatisierung des Verfahrens erreicht, sodass eine Reduktion linearer proportional gedämpfter Werkzeugmaschinenmodelle ohne weitere Benutzerinteraktionen durchführbar ist. Um die Einschränkung in Bezug auf den Dämpfungsansatz aufzuheben, wird im folgenden Abschnitt eine Erweiterung des von SOPPA (2011) vorgestellten Ansatzes präsentiert, mit welcher sich schließlich auch beliebig gedämpfte strukturmechanische Modelle effizient reduzieren lassen.

## 4.5 Reduktionsverfahren für beliebig gedämpfte Modelle

### 4.5.1 Modellierung lokaler viskoser Dämpfungseffekte

Der in den bisherigen Aufführungen zugrunde gelegte globale Dämpfungsansatz beschreibt die in der gesamten Struktur wirkenden Dämpfungskräfte als Linearkombination der Massen- und der Steifigkeitsmatrix (vgl. Abschnitt 2.4.4) und ist demnach auch linear proportional zu den Steifigkeitseinträgen. Mit dieser Vorschrift werden besonders steife Elemente und Verbindungen auch besonders stark bedämpft, was die Realität aber nur sehr eingeschränkt widerspiegelt. Ein Großteil des Dämpfungsverhaltens einer Werkzeugmaschinenstruktur resultiert aus kleinen, lokal auftretenden Relativbewegungen in den Füge- und Verbindungsstellen. Aufgrund der vorliegenden Reibverhältnisse wird die Dämpfungswirkung umso größer, je mehr Bewegung in den Fügestellen auftritt. Diese Effekte sind daher als geschwindigkeitsproportional anzusehen und deshalb in Form von definierten Einträgen in der viskosen Dämpfungsmaatrix zu modellieren.

In modernen FEM-Programmen gibt es für die Abbildung lokaler viskoser Dämpfung entsprechende Elemente, mit deren Hilfe die Einträge für die gewünschten Freiheitsgrade definiert werden können. Diese werden, analog den Federelementen, welche zur vereinfachten Abbildung von Lager- oder Führungs komponenten herangezogen werden (vgl. z. B. OERTLI 2008), zwischen den Koppelpunkten der Strukturkomponenten eingesetzt und mit entsprechenden Werten besetzt.

Die Dämpfungseinträge im Modell werden analog zur Massen- und Steifigkeitsmatrix zu einer Dämpfungsmaatrix zusammengesetzt. Aufgrund der geringen Anzahl von Verbindungskomponenten, verglichen mit der Gesamtanzahl von Freiheitsgraden, entsteht eine sehr dünn besetzte viskose Dämpfungsmaatrix  $D \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Eine exemplarische Darstellung der Belegungsstruktur ist für die vereinfachte Maschinenstruktur aus Bild 4.2 in Bild 4.21 visualisiert.

Beim Einsatz lokaler Dämpfungselemente in FEM-Modellen ist zu beachten, dass damit nur Einfluss auf die Bewegungen genommen werden kann, deren Kraftfluss auch durch die Elemente beeinflusst wird. Dies bedeutet, dass mit den lokalen Dämpfungselementen diejenigen Eigenschwingungsformen bedämpft werden können, welche Relativbewegungen bspw. in Führungen aufweisen. Die Dämpfung innerhalb einzelner Strukturkomponenten wird durch diesen Ansatz hingegen nicht wiedergegeben. Um dies zu modellieren, existiert die sog. Strukturdämpfung, welche im folgenden Abschnitt 4.5.2 erläutert wird.

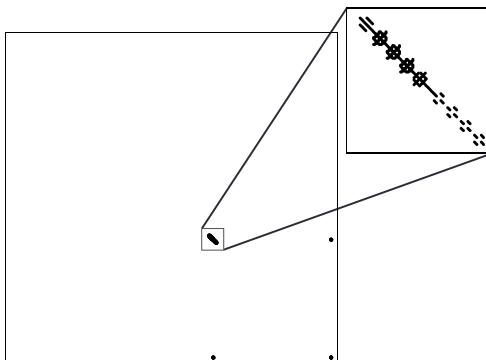


Bild 4.21: Belegungsstruktur der viskosen Dämpfungsmatrix bei lokal modellierten Dämpfungselementen inklusive vergrößertem Ausschnitt

#### 4.5.2 Berücksichtigung von Strukturdämpfung

Auch wenn die Strukturdämpfung in schwach gedämpften Systemen wie Werkzeugmaschinen nur eine untergeordnete Rolle spielt, soll an dieser Stelle auf deren Modellierung und Behandlung durch die Krylov-Unterraum-Verfahren eingegangen werden, da mit den bisherigen Verfahren der modalen Ordnungsreduktion keine explizite Berücksichtigung von lokalen viskosen Dämpfungselementen sowie der Strukturdämpfung möglich war.

Zur Modellierung der Strukturdämpfung wird im FEM-Programm ein Verlustfaktor entweder mit einer Materialdefinition oder mit einzelnen Elementen verknüpft. Bei der ersten Variante gilt der Faktor dann für alle aus dem entsprechenden Material modellierten Elemente, bei der zweiten übernehmen nur die definierten Elemente die Eigenschaften des Verlustfaktors. Wie in Abschnitt 2.4.4 erläutert, resultiert hieraus eine komplexe Steifigkeitsmatrix (vgl. Gleichung (2.16)), die sich aus dem globalen Verlustfaktor und der Summe der Elementsteifigkeitsmatrizen mit Verlustfaktor zusammensetzt.

Auffällig ist hierbei die Verteilung der Eigenwerte eines Modells mit Strukturdämpfung. Im Gegensatz zu der in Bild 3.3 dargestellten, zur realen Achse symmetrischen Verteilung der komplexen Eigenwertpaare treten letztere bei Strukturdämpfung punktsymmetrisch zum Ursprung der komplexen Zahlenebene auf. Die Eigenwerte mit negativen Imaginärteil haben hier einen positiven Realteil, was systemtechnisch gesehen eine Instabilität des Systems definiert. Um dennoch die Eigenvektoren eines strukturell gedämpften Systems bestimmen zu können, werden bspw. vom FEM-Programm *MSC.Nastran*<sup>®</sup> nur die

Eigenwerte mit positivem Imaginär- und negativem Realteil, also die stabilen, berücksichtigt.

Die komplexe Steifigkeitsmatrix verliert für transiente Analysen ihre Gültigkeit, da sie, physikalisch gesehen, eine Mischung frequenz- und zeitabhängiger Anteile besitzt. In FEM-Programmen wird anstelle des komplexen Anteils der Strukturdämpfung ein viskos-äquivalenter Anteil zur viskosen Dämpfungsma- trix hinzu addiert, auf den an dieser Stelle nicht näher eingegangen wird. In der vorliegenden Arbeit wird die Strukturdämpfung deshalb nur für Frequenz- bereichsuntersuchungen eingesetzt.

Für die Krylov-Unterraum-Verfahren resultiert aus einer komplexen Steifigkeitsmatrix hingegen kein Problem. Wie in Abschnitt 4.3.4 angedeutet, kann der Einsatz von komplexwertigen Entwicklungspunkten während der Reduktion zu einer sehr guten Approximationsqualität führen. Wird dann für den Mo- mentenabgleich die geshiftete Übertragungsfunktion um einen komplexen Entwick- lungspunkt (Gleichung 3.60) betrachtet, so wird diese ohnehin komplexwertige Funktionswerte annehmen, sodass die Berücksichtigung von Strukturdämpfung keine weiteren Komplikationen mit sich bringt.

#### 4.5.3 Reduktionsverfahren für beliebig gedämpfte Systeme auf Ba- sis von Krylov-Unterräumen zweiter Ordnung

In Abschnitt 4.4.2 wurde dargelegt, dass sich für den Spezialfall der proportionalen Dämpfung die Krylov-Unterraum-Verfahren erster Ordnung anwenden lassen, da die Dämpfungsma- trix eine Linearkombination aus der Massenma- trix  $M$  und der Steifigkeitsma- trix  $K$  ist (vgl. Gleichung (4.1)). Aufgrund der Herkunft der Krylov-Unterraum-Verfahren, die ursprünglich für Differenzial- gleichungssysteme erster Ordnung entwickelt wurden, ist die Berücksichtigung einer viskosen Dämpfungsma- trix mit lokalen Einträgen bislang nicht intensiv betrachtet worden. Auch SOPPA (2011), der sich auf die Automatisierung von Krylov-Unterraum-Verfahren für Strukturmodelle von Werkzeugmaschinen konzentrierte, beschränkte sich auf den Spezialfall der proportionalen Dämpfung (Rayleigh-Dämpfung). Im Folgenden wird daher ein Verfahren für die Ordnungsreduktion von beliebig gedämpften Strukturmodellen zweiter Ordnung vorgestellt, welches auf den sog. Krylov-Unterräumen zweiter Ordnung (vgl. Ab- schnitt 3.7.1) basiert. Damit wird die erstmalige Reduktion von FEM-Modellen von Werkzeugmaschinen mit lokal modellierten Dämpfungseffekten möglich.

Zur Erläuterung des Grundprinzips der Verfahren für Systeme zweiter Ordnung wird zunächst das in ein System erster Ordnung transformierte Zustandsraum- modell (3.30) mit  $N = -K$  herangezogen. Wird hierfür die Reihenentwicklung

der Übertragungsfunktion nach Gleichung (3.54) zunächst an der Stelle  $s_0 = 0$  betrachtet, ergibt sich der Eingangs-Krylov-Unterraum  $\mathcal{K}_m$  der Stufe  $m$  zu

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_m(\check{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{E}, -\check{\mathbf{A}}^{-1}\check{\mathbf{B}}) &= \\ \mathcal{K}_m\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{K} \\ -\mathbf{K} & -\mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K} \\ \mathbf{K} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}\right) &= \\ \mathcal{K}_m\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{K}^{-1} & -\mathbf{K}^{-1} \\ -\mathbf{K}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{K}^{-1} & \mathbf{K}^{-1} \\ \mathbf{K}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}\right) &= \\ \mathcal{K}_m\left(\begin{bmatrix} -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{D} & -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\right), \end{aligned} \tag{4.7}$$

wobei sich die Bildung der Inversen von  $\check{\mathbf{A}}$  anhand der Berechnungsvorschrift für inverse Matrizen des  $\mathbb{K}^{2 \times 2}$  nachvollziehen lässt. Diese ist im Anhang A.4 detaillierter ausgeführt.

Die in (4.7) resultierende Struktur lässt sich in Abhängigkeit der Krylovraum-Matrizen  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_2$  und  $\mathbf{Q}$  schreiben:

$$\mathcal{K}_m\left(\begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\right), \tag{4.8}$$

wodurch sich die Sequenz von Krylov-Unterraum-Vektoren der Form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{P}_1\mathbf{Q} & \mathbf{P}_1^2\mathbf{Q} + \mathbf{P}_2\mathbf{Q} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} & \mathbf{P}_1\mathbf{Q} & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 & \mathbf{R}_1 & \dots & \mathbf{R}_{m-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_0 & \dots & \mathbf{R}_{m-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_o \\ \mathbf{Z}_u \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0 &= \mathbf{K}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{Q}, \\ \mathbf{R}_1 &= -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{R}_0 = \mathbf{P}_1\mathbf{R}_0 \quad \text{und} \\ \mathbf{R}_i &= -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{R}_{i-1} - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{R}_{i-2} = \mathbf{P}_1\mathbf{R}_{i-1} + \mathbf{P}_2\mathbf{R}_{i-2} \end{aligned} \tag{4.10}$$

für  $i = 2, \dots, m-1$  ergibt.

Analog zu Gleichung (4.7) lässt sich auch der Ausgangs-Krylov-Unterraum zweiter Ordnung bestimmen. Da allerdings eine Geschwindigkeitsausgangsmatrix  $\mathbf{C}_v$  im System zweiter Ordnung existieren kann, ergibt sich eine komplizierter

zu vereinfachende Struktur der Krylov-Unterraummatrizen. Die Grundlage zur Bestimmung des Ausgangs-Krylov-Unterraumes ist ebenfalls die verallgemeinerte Zustandsraumdarstellung des transformierten Systems erster Ordnung (3.30). Dieses wird so umgeformt, dass gilt:

$$\begin{aligned}\check{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix}, \quad \check{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_p & \mathbf{C}_v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{M} \\ \mathbf{N} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{4.11}$$

Daraus ergibt sich der Ausgangs-Krylov-Unterraum  $\mathcal{K}_m$  der Stufe  $m$  zu:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_m(\check{\mathbf{A}}^{-*}\mathbf{E}^*, -\check{\mathbf{A}}^{-*}\mathbf{C}^*) &= \\ \mathcal{K}_m\left(\begin{bmatrix} -\mathbf{K}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}^* \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{D}^* & \mathbf{N}^* \\ \mathbf{M}^* & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{K}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{N}^* \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_p^* \\ \mathbf{C}_v^* \end{bmatrix}\right) &= \\ \mathcal{K}_m\left(\begin{bmatrix} -\mathbf{K}^{-*}\mathbf{D}^* & -\mathbf{K}^{-*}\mathbf{N}^* \\ \mathbf{N}^{-*}\mathbf{M}^* & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{-*}\mathbf{C}_p^* \\ -\mathbf{N}^{-*}\mathbf{C}_v^* \end{bmatrix}\right).\end{aligned}\tag{4.12}$$

Unter der Voraussetzung der Invertierbarkeit der Matrix  $\mathbf{M}$  besitzt der Krylov-Unterraum mit  $\mathbf{N} = \mathbf{M}$  dann die Struktur:

$$\mathcal{K}_m\left(\begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix}\right)\tag{4.13}$$

Damit entsteht eine zu (4.9) ähnliche Krylov-Sequenz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 & \mathbf{R}_1 & \dots & \mathbf{R}_{m-1} \\ \mathbf{R}_{-1} & \mathbf{R}_0 & \dots & \mathbf{R}_{m-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_o \\ \mathbf{Z}_u \end{bmatrix}\tag{4.14}$$

mit

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{-1} &= -\mathbf{M}^{-*}\mathbf{C}_v^* = \mathbf{Q}_2, \\ \mathbf{R}_0 &= \mathbf{K}^{-*}\mathbf{C}_p^* = \mathbf{Q}_1 \quad \text{und} \\ \mathbf{R}_i &= -\mathbf{K}^{-*}\mathbf{D}^*\mathbf{R}_{i-1} - \mathbf{K}^{-*}\mathbf{M}^*\mathbf{R}_{i-2} = \mathbf{P}_1\mathbf{R}_{i-1} + \mathbf{P}_2\mathbf{R}_{i-2}\end{aligned}\tag{4.15}$$

für  $i = 2, 3, \dots, m-1$ .

Mit der Annahme, dass  $C_v = 0$ , folgt  $\mathbf{R}_{-1} = \mathbf{0}$ , sodass sich die gleiche Struktur wie für den Eingangs-Krylov-Unterraum ergibt:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_0 &= \mathbf{K}^{-*} \mathbf{C}_p^* = \mathbf{Q}_1, \\ \mathbf{R}_1 &= -\mathbf{K}^{-*} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_0 = \mathbf{P}_1 \mathbf{R}_0 \quad \text{und} \\ \mathbf{R}_i &= -\mathbf{K}^{-*} \mathbf{D}^* \mathbf{R}_{i-1} - \mathbf{K}^{-*} \mathbf{M}^* \mathbf{R}_{i-2} = \mathbf{P}_1 \mathbf{R}_{i-1} + \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_{i-2}\end{aligned}\quad (4.16)$$

für  $i = 2, 3, \dots, m-1$ .

Für den Fall, dass  $C_v \neq 0$  und somit  $\mathbf{R}_{-1} \neq \mathbf{0}$ , muss der Algorithmus um eine weitere Unterscheidung bei der Berechnung des neuen Krylovraum-Blocks für das erste Moment erweitert werden, da die untere Sequenz kein vollständiger Bestandteil der oberen Sequenz mehr ist.

Wird die Krylov-Unterraum-Sequenz zweiter Ordnung (4.9) in einen oberen Teil  $\mathbf{Z}_o$  und einen unteren Teil  $\mathbf{Z}_u$  aufgeteilt, fällt auf, dass der Vektorraum der unteren Hälfte ein Untervektorraum der oberen Hälfte ist:

$$\text{span}(\mathbf{Z}_u) \subseteq \text{span}(\mathbf{Z}_o). \quad (4.17)$$

Damit lässt sich der Krylov-Unterraum zweiter Ordnung als

$$\mathcal{G}_m(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{Q}) = \text{span}(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_{m-1}) = \text{span}(\mathbf{Z}_o) \quad (4.18)$$

definieren, wobei dessen Basis den gleichen Raum aufspannt wie die Basis der oberen Hälfte des Krylov-Unterraumes (4.8). Demnach kann dieser auch wie folgt geschrieben werden:

$$\mathcal{K}_m(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_o & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_o \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Durch eine geeignete Wahl der Matrizen  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  und  $\mathbf{Q}$  in (4.18) können dann für das System erster Ordnung die orthonormalen Projektionsmatrizen  $\mathbf{V}$  des Eingangs- und ggf.  $\mathbf{W}$  des Ausgangs-Krylovraumes bestimmt werden:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_o & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_o \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_o & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_o \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Die Reduktion kann nun durch Anwendung der Projektionsmatrizen  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{W}$  auf das transformierte System erster Ordnung durchgeführt werden. Eine Besonderheit der vorgestellten Krylov-Unterräume zweiter Ordnung ist aber, dass damit die Möglichkeit besteht, das System zweiter Ordnung durch Anwendung der Projektionsmatrizen  $\mathbf{V}_o$  und  $\mathbf{W}_o$  nach Gleichung (3.86) direkt zu reduzieren (SALIMBAHRAWI 2005).

Um die Reduktion durch einen Momentenabgleich der Übertragungsfunktion an der Entwicklungsstelle  $s_0 = 0$  durchzuführen, müssen die Projektionsmatrizen  $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathbb{K}^{n \times r}$  so gewählt werden, dass mit den Krylovraum-Matrizen

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_1 &= -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{D} \\ \mathbf{P}_2 &= -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M} \\ \mathbf{Q} &= -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{B}\end{aligned}\tag{4.21}$$

gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_m(-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{D}, -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}, -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{B}) &\subseteq \mathcal{V} = \text{colspan}(\mathbf{V}), \\ \mathbf{W} &= \mathbf{V}.\end{aligned}\tag{4.22}$$

Ist die Matrix  $\mathbf{W}^* \mathbf{A} \mathbf{V}$  regulär, so erhält man mit der Projektion  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{V} \mathbf{W}^*$  ein reduziertes System, dessen erste Momente an der Entwicklungsstelle  $s_0$  mit denen des Originalsystems übereinstimmen (SALIMBAHRAMI 2005).

Analog zu den Krylov-Unterräumen erster Ordnung lässt sich der Momentenabgleich auch an einer beliebigen Entwicklungsstelle  $s_0 \in \mathbb{C}$  mit Hilfe der geshifteten Übertragungsfunktion (3.60) erreichen. Hierfür werden die substituierten Matrizen  $\check{\mathbf{D}}, \check{\mathbf{K}}$  und  $\check{\mathbf{C}}_v$  aus (3.61), (3.62) und (3.63) anstelle der Matrizen  $\mathbf{D}, \mathbf{K}, \mathbf{C}_v$  für die Definition der Krylovraum-Matrizen eingesetzt. Mit

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_1 &= -\check{\mathbf{K}}^{-1}\check{\mathbf{D}} = -(s_0^2\mathbf{M} + s_0\mathbf{D} + \mathbf{K})^{-1}(2s_0\mathbf{M} + \mathbf{D}), \\ \mathbf{P}_2 &= -\check{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{M} = -(s_0^2\mathbf{M} + s_0\mathbf{D} + \mathbf{K})^{-1}\mathbf{M} \quad \text{und} \\ \mathbf{Q} &= -\check{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{B} = -(s_0^2\mathbf{M} + s_0\mathbf{D} + \mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}\end{aligned}\tag{4.23}$$

lassen sich nach SALIMBAHRAMI (2005) die Projektionsmatrizen  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{W}$  als Basen des Eingangs-Krylov-Unterraumes zweiter Ordnung bestimmen, sodass gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_m(-\check{\mathbf{K}}^{-1}\check{\mathbf{D}}, -\check{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{M}, -\check{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{B}) &= \\ \mathcal{G}_m(-(s_0^2\mathbf{M} + s_0\mathbf{D} + \mathbf{K})^{-1}(2s_0\mathbf{M} + \mathbf{D}), -(s_0^2\mathbf{M} + s_0\mathbf{D} + \mathbf{K})^{-1}\mathbf{M}, \\ &\quad -(s_0^2\mathbf{M} + s_0\mathbf{D} + \mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}) \subseteq \mathcal{V} = \text{colspan}(\mathbf{V}), \\ \mathbf{W} &= \mathbf{V}.\end{aligned}\tag{4.24}$$

Darüber hinaus ist auch mit den Krylov-Unterräumen zweiter Art eine rationale Interpolation, d. h. die Berücksichtigung mehrerer Entwicklungspunkte möglich, um die Approximationsqualität in einem großen Frequenzbereich hoch zu halten. Hierfür werden analog dem in Abschnitt 3.7.4 dargestellten Vorgehen einzelne

Krylov-Unterräume zu jeder Entwicklungsstelle aufgespannt und zu einem Vektorraum vereinigt. Die Matrizen  $\mathbf{P}_{1_i}$ ,  $\mathbf{P}_{2_i}$  und  $\mathbf{Q}_i$  werden analog zu (4.23) für jede Entwicklungsstelle  $s_{0_i}$  bestimmt, sodass eine Vereinigung der damit aufgespannten Krylov-Unterräume entsteht, deren orthogonale Basen einen Unterraum definieren, den auch die Projektionsmatrix  $\mathbf{V}$  aufspannt:

$$\begin{aligned}
 & \bigcup_{i=1}^s \mathcal{G}_{m_i}(-\check{\mathbf{K}}_i^{-1} \check{\mathbf{D}}_i, -\check{\mathbf{K}}_i^{-1} \mathbf{M}, -\check{\mathbf{K}}_i^{-1} \mathbf{B}) = \\
 & \bigcup_{i=1}^s \mathcal{G}_{m_i}(-(s_{0_i}^2 \mathbf{M} + s_{0_i} \mathbf{D} + \mathbf{K})^{-1} (2s_{0_i} \mathbf{M} + \mathbf{D}), -(s_{0_i}^2 \mathbf{M} + s_{0_i} \mathbf{D} + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{M}, \\
 & \quad -(s_{0_i}^2 \mathbf{M} + s_{0_i} \mathbf{D} + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{B}) \subseteq \mathcal{V} = \text{colspan}(\mathbf{V}), \\
 & \mathbf{W} = \mathbf{V}.
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Mit den oben dargestellten Zusammenhängen können die Krylov-Unterräume zweiter Ordnung für beliebig gedämpfte Strukturmodelle von Werkzeugmaschinen aufgestellt werden. Hierfür muss schließlich die Projektionsmatrix  $\mathbf{V}$  als Basis des Krylov-Unterraumes gefunden werden, wofür im Folgenden das nötige numerische Verfahren, welches Krylov-Unterräume zweiter Ordnung verarbeiten kann, erörtert wird.

Für den allgemeinen Fall von dynamischen Systemen zweiter Ordnung wurden bspw. von LOHMANN & SALIMBAHRAMI (2005) sowie von BAI & SU (2005a) Verfahren zu Reduktion vorgestellt, die auf Krylov-Unterräumen zweiter Ordnung basieren. Als wichtigster Vertreter dieser Verfahren ist der sog. *SOAR*<sup>3</sup>-Algorithmus zu nennen, der auf dem klassischen Arnoldi-Algorithmus beruht und orthogonale Basen für Krylov-Unterräume zweiter Ordnung erzeugt, indem er die spezielle Struktur derselben ausnutzt. Hierzu wurde die Orthogonalisierung der Basisvektoren so modifiziert, dass anstelle des gesamten neu erzeugten Blocks der Basisvektoren  $[\mathbf{V}_o^T \mathbf{V}_u^T]^T$  (sowie ggf.  $[\mathbf{W}_o^T \mathbf{W}_u^T]^T$ ) lediglich die obere Hälfte  $\mathbf{V}_o$  (und  $\mathbf{W}_o$ ) die notwendige Orthogonalität erfüllt. Bild 4.22 zeigt das Strukturdiagramm des SOAR-Verfahrens.

Eine gewisse Besonderheit liegt in der Überprüfung auf Deflation. Mit dem Kriterium  $h_o < \tau$  wird lediglich eine Aussage bezüglich des oberen Teils der Krylov-Sequenz getroffen, ob eine Deflation vorliegt. Zur Sicherstellung sollte aber die lineare Abhängigkeit der gesamten Sequenz ausgeschlossen werden

---

<sup>3</sup> SOAR: Second-Order-Arnoldi

Übergabe: $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{Q}, m, \tau$		
Initialisierung: $\mathbf{V}_o = [], \mathbf{V}_u = []$		
Schleife über alle Momente von $j = 1$ bis $m - 1$		
Prüfung des Momentenzählers $j$		
Erstes Moment $j = 1$	Zweites Moment $j = 2$	Weitere Momente $j > 2$
Startblöcke $\mathbf{R}_o = \mathbf{Q}, \mathbf{R}_u = \mathbf{0}$	Zweite Blöcke $\mathbf{R}_u = \mathbf{R}_o, \mathbf{R}_o = \mathbf{P}_1 \mathbf{R}_o$	Weitere Blöcke $\mathbf{R}_{old} = \mathbf{R}_o, \mathbf{R}_o = \mathbf{P}_1 \mathbf{R}_o + \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_u, \mathbf{R}_u = \mathbf{R}_{old}$
Schleife über alle bisherigen Spalten $i$ von $\mathbf{R}_o$ zur Orthogonalisierung		
Schleife über alle bisherigen Spalten $t$ von $\mathbf{V}_o$ zur Orthogonalisierung		
Skalarprodukt	$h = [\mathbf{R}_o]_{(:,i)}^* [\mathbf{V}_o]_{(:,t)}$	
Orthogonalisierung	$[\mathbf{R}_o]_{(:,i)} = [\mathbf{R}_o]_{(:,i)} - h[\mathbf{V}_o]_{(:,t)}$ , $[\mathbf{R}_u]_{(:,i)} = [\mathbf{R}_u]_{(:,i)} - h[\mathbf{V}_u]_{(:,t)}$	
Erhöhung der Laufvariablen $t = t + 1$		
Euklidische Norm	$h_o = \ [\mathbf{R}_o]_{(:,i)}\ _2, h_u = \ [\mathbf{R}_u]_{(:,i)}\ _2$	
Prüfung auf Deflation		
$h_o > \tau$	$h_u > \tau$	sonst
Normierung $\mathbf{v}_o = \frac{1}{h_o} [\mathbf{R}_o]_{(:,i)}, \mathbf{v}_u = \frac{1}{h_o} [\mathbf{R}_u]_{(:,i)}$	$\mathbf{v}_o = \mathbf{0}, \mathbf{v}_u = [\mathbf{R}_u]_{(:,i)}$	Abbruch
Erweiterung der Basis $\mathbf{V}_o = [\mathbf{V}_o \mathbf{v}_o], \mathbf{V}_u = [\mathbf{V}_u \mathbf{v}_u]$	Erweiterung der Basis $\mathbf{V}_o = [\mathbf{V}_o \mathbf{v}_o], \mathbf{V}_u = [\mathbf{V}_u \mathbf{v}_u]$	
Erhöhung der Laufvariablen: $i = i + 1$		
Erhöhung der Laufvariablen: $j = j + 1$		
Löschen der Nullspalten in $\mathbf{V}_o$		
Ausgabe: Projektionsmatrix $\mathbf{V} = \mathbf{V}_o$		

Bild 4.22: Second-Order-Arnoldi-Verfahren nach BAI & SU (2005a) und LOHMAN & SALIMBAHRAMI (2005)

können, weshalb, wie von SALIMBAHRAMI (2005) vorgeschlagen, zusätzlich  $h_u$  überprüft wird.

Damit ist das SOAR-Verfahren in der Lage, Systeme zweiter Ordnung zu reduzieren und es kann folglich auch beliebige Dämpfungsmatrizen berücksichtigen. Wie dem Strukturdiagramm des Algorithmus zu entnehmen ist, geschieht die Orthogonalisierung der neuen Basisvektoren in diesem Verfahren jedoch spaltenweise, was einen erheblichen numerischen Aufwand mit sich bringt (siehe Abschnitt 3.7.5). Für eine automatisierte Modellreduktion, wie sie in Abschnitt 4.4.6 dargelegt wurde, ist der Algorithmus in der vorliegenden Form daher nur bedingt geeignet, weil zur Bestimmung der Entwicklungspunkte unter Umständen mehrere Iterationen notwendig sind.

Das von SOPPA (2011) auf dem globalen Arnoldi basierende Verfahren (Abschnitt 4.4.5) führt die Orthogonalisierung hingegen erheblich effizienter durch und ist auch Kernbestandteil des in Abschnitt 4.4.6 erläuterten Vorgehens zur automatisierten Modellreduktion. Bislang ist es aber nur für den Sonderfall proportional gedämpfter Strukturmodelle zweiter Ordnung anwendbar.

Im Folgenden wird daher eine Kombination der Krylov-Unterraum-Verfahren zweiter Ordnung mit dem Einsatz eines globalen Arnoldi-Algorithmus vorgeschlagen, um die automatische Modellreduktion für Systeme zweiter Ordnung mit beliebiger Dämpfungsmatrix zu gewährleisten. Durch den Einsatz des globalen Arnoldi-Algorithmus, welcher für Krylov-Unterräume zweiter Ordnung erweitert wurde, kann somit einerseits eine hohe numerische Effizienz bei der Orthogonalisierung der Basisvektoren der Projektionsmatrix erreicht werden. Andererseits kann mit dessen Einbindung in das von SOPPA (2011) vorgestellte automatisierte Verfahren mit adaptiver Entwicklungsstellenwahl eine sehr gute Approximationsqualität der reduzierten Systemmodelle sichergestellt werden.

Der globale Arnoldi-Algorithmus für Krylov-Unterräume zweiter Ordnung stellt somit eine Erweiterung des von SOPPA (2011) vorgeschlagenen Verfahrens dar und ist als Strukturdiagramm in Bild 4.23 wiedergegeben. Hierbei wird die Basis des Krylov-Unterraumes mit der Krylov-Sequenz zweiter Ordnung (4.9) generiert. Deshalb wird für das erste Moment die Startmatrix  $\mathbf{R}_{o,0} = \mathbf{Q}$  bzw.  $\mathbf{R}_{u,0} = \mathbf{0}$  in der Sequenz verwendet, normiert und als Startblock in der Projektionsmatrix  $\mathbf{V}$  definiert. Für die folgenden Blöcke wird für  $\mathbf{R}_u$  stets der obere Block  $\mathbf{R}_{o,j-1}$  der vorangegangenen Stufe herangezogen. Der neue obere Block wird dann gemäß (4.9) gebildet und lautet  $\mathbf{R}_{o,2} = \mathbf{P}_1 \mathbf{R}_{o,1}$  für das zweite Moment und  $\mathbf{R}_{o,j} = \mathbf{P}_1 \mathbf{R}_{o,j-1} + \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_{u,j-1}$  für alle höheren Momente, d. h. wenn gilt  $j > 2$ .

Der Orthogonalisierungsprozess wird analog zu SOPPA (2011) mit Hilfe der Berechnung der Spur realisiert, muss aber für das jeweilige Moment sowohl für den

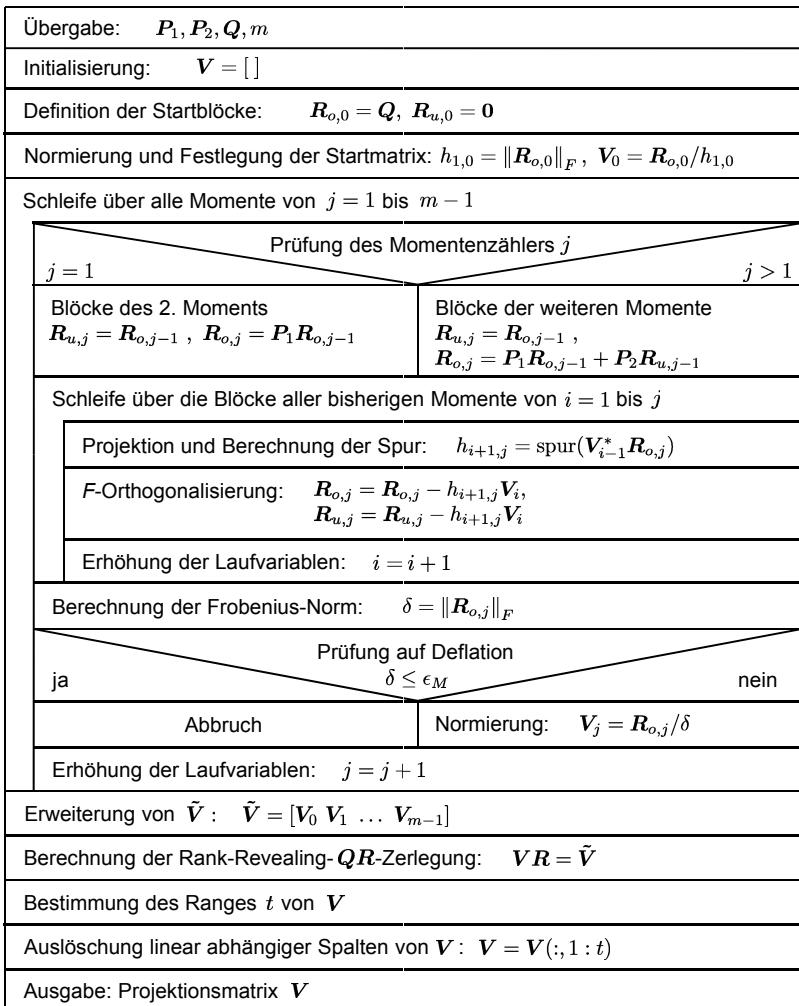


Bild 4.23: Strukturdiagramm des globalen Arnoldi-Algorithmus für Krylov-Unterräume zweiter Ordnung

oberen Block  $\mathbf{R}_o$  als auch für den unteren Block  $\mathbf{R}_u$  durchgeführt werden, da beide bei der Bestimmung der nachfolgenden Blöcke wieder zum Einsatz kommen. Bei dem hier vorgeschlagenen Verfahren werden die notwendigen Schritte Projektion, Orthogonalisierung und Normierung für alle Blöcke durchlaufen und die entstandenen orthonormierten oberen Blöcke der Projektionsmatrix  $\mathbf{V}$  hinzugefügt, sofern diese keine Deflation aufweisen. Zur Überprüfung der Deflation wird analog Bild A.4 die Frobenius-Norm herangezogen, welche nicht zu klein werden darf.

Die Projektionsmatrix  $\mathbf{V}$  wird schließlich aus dem oberen Block gebildet und kann somit direkt auf die Koeffizientenmatrizen des Systems zweiter Ordnung angewendet werden. Vor Abschluss des Algorithmus wird die entstandene Matrix  $\mathbf{V}$  nochmals mit einer Rank-Revealing- $\mathbf{QR}$ -Zerlegung orthogonalisiert, um eine lineare Abhängigkeit der Spaltenvektoren untereinander zu verhindern.

Dieser Algorithmus ist für die Krylov-Unterraum-Matrizen  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_2$  und  $\mathbf{Q}$  des Eingangs-Krylov-Unterraumes aus (4.9) und des Ausgangs-Krylov-Unterraumes aus (4.14) gültig, sofern bei letzterem  $\mathbf{R}_{-1} = \mathbf{0}$  gilt, d. h.  $\mathbf{C}_v = \mathbf{0}$ .

Für die automatisierte Anwendung wird dieser Algorithmus ebenfalls in das in Abschnitt 4.4.6 vorgestellte *VAIRGA*-Verfahren eingesetzt. Damit lassen sich erstmals beliebig gedämpfte FEM-Modelle von Werkzeugmaschinen reduzieren, ohne dass explizite Kenntnisse des Anwenders bzgl. des Verfahrens erforderlich sind.

## 4.6 Zusammenfassung und Fazit

Im vorliegenden Kapitel wurde ein auf Krylov-Unterräumen basierendes Verfahren zur Reduktion linearer FEM-Modelle von Werkzeugmaschinen vorgestellt, welches gegenüber den bislang verwendeten modalen Reduktionsverfahren erhebliche Vorteile aufweist.

Im ersten Schritt wurden die Anforderungen, die für lineare FEM-Modelle von Werkzeugmaschinen an das Reduktionsverfahren zu stellen sind, erläutert. Neben den strukturellen Eigenschaften der resultierenden Matrizen ist die direkte Reduktion des Gleichungssystems zweiter Ordnung eine wichtige Anforderung, um die speicherintensive Transformation in ein System erster Ordnung zu vermeiden. Zudem sollte die Reduktion möglichst automatisch ablaufen, um diese effizient im Entwicklungsprozess anwenden zu können.

Um die Krylov-Unterraum-Verfahren zielgerichtet einsetzen zu können, wurden anhand eines einfachen kleinen Beispielmodells, eines FMD-Systems, die relevanten Einflussgrößen zur Beeinflussung der Approximationsqualität identifiziert.

Demnach haben insbesondere die Stufe des verwendeten Krylov-Unterraumes, welche mit der Anzahl der berücksichtigten Momente der Übertragungsfunktion einhergeht, sowie die Anzahl und Lage der Entwicklungspunkte den größten Einfluss.

Eine weitere Herausforderung liegt in der Art der Dämpfung. Da mit den bisher bestehenden Krylov-Unterraum-Verfahren lediglich die Reduktion proportional gedämpfter FEM-Modelle möglich ist, wurde ein Verfahren vorgestellt, mit welchem erstmals die Reduktion beliebig gedämpfter Strukturmodelle von Werkzeugmaschinen möglich ist. Damit lassen sich auch lokale Dämpfungsefekte bspw. in Führungen oder anderen Fügestellen in der Maschinenstruktur berücksichtigen und dennoch das entstehende Modell reduzieren.

Mit dem vorgestellten Verfahren zur Modellordnungsreduktion steht somit eine leistungsfähige Reduktionsmethode zur Verfügung, welche für die Anwendung auf FEM-Modelle von Werkzeugmaschinen angepasst und erweitert wurde. Da das Verfahren einige veränderte Rahmenbedingungen mit sich bringt, wird im folgenden Kapitel ein neues Vorgehensmodell für den effizienten Einsatz im simulationsgestützten Entwicklungsprozess vorgestellt. Damit soll die Verbindung zwischen den eher mathematisch geprägten Reduktionsmethoden und der Anwendung im ingenieurwissenschaftlichen Bereich geschaffen werden.



## 5 Integration des Reduktionsverfahrens in die entwicklungsbegleitende Simulation

### 5.1 Inhalt des Kapitels

In diesem Kapitel wird ein neues Vorgehensmodell für die Nutzung des in dieser Arbeit vorgestellten Reduktionsverfahrens im Rahmen der entwicklungsbegleitenden Simulation von Werkzeugmaschinen erläutert. Damit soll künftig die effiziente Anwendung des Reduktionsverfahrens erleichtert werden. Hierfür wird in Abschnitt 5.2 zunächst der konventionelle Ablauf des Einsatzes von Simulationsmethoden während der Entwicklungsphasen dargestellt und der nötige Adoptionsbedarf aufgezeigt. In Abschnitt 5.3 folgt eine Beschreibung der Anforderungen an einen veränderten Ablauf, bevor im Hauptteil dieses Kapitels (Abschnitt 5.4) die Konzeption des neuen Vorgehensmodells erörtert wird. Für den optimalen Einsatz der Krylov-Unterraum-Verfahren in der Entwicklung von Werkzeugmaschinen wird hierfür ein 5-stufiges Vorgehen vorgeschlagen und beschrieben. Eine Zusammenfassung schließt das Kapitel ab.

### 5.2 Entwicklungsbegleitende Simulation

Wie in Kapitel 2 erörtert, ist der Einsatz von Simulationsmethoden in der Entwicklung von modernen hochdynamischen Werkzeugmaschinen heute nicht mehr wegzudenken. Dabei stellt die Finite-Elemente-Methode während der Entwurfs- und Detaillierungsphase häufig das Mittel der Wahl dar, um die Eigenschaften des Maschinenentwurfs frühzeitig zu untersuchen. Zum einen lassen sich mit dem Modell der mechanischen Komponenten Strukturberechnungen, wie die Bestimmung von Eigenfrequenzen sowie Nachgiebigkeitsanalysen bspw. am TCP, durchführen. Einen großen Mehrwert bringt darüber hinaus die Kopplung mit Antriebs- und Regelungsmodellen zur Bestimmung geeigneter Reglerparameter oder auch mit einem Zerspankraftmodell, um die Leistungsfähigkeit der Maschine hinsichtlich bestimmter Bearbeitungsprozesse zu beurteilen. Bei allen drei Varianten wird das Modell des Maschinenentwurfs jeweils auf die Erreichung der festgesetzten Ziele und die Erfüllung der Anforderungen hin überprüft und ggf. durch Änderungsmaßnahmen der konstruktiven Ausführung optimiert (Bild 5.1).

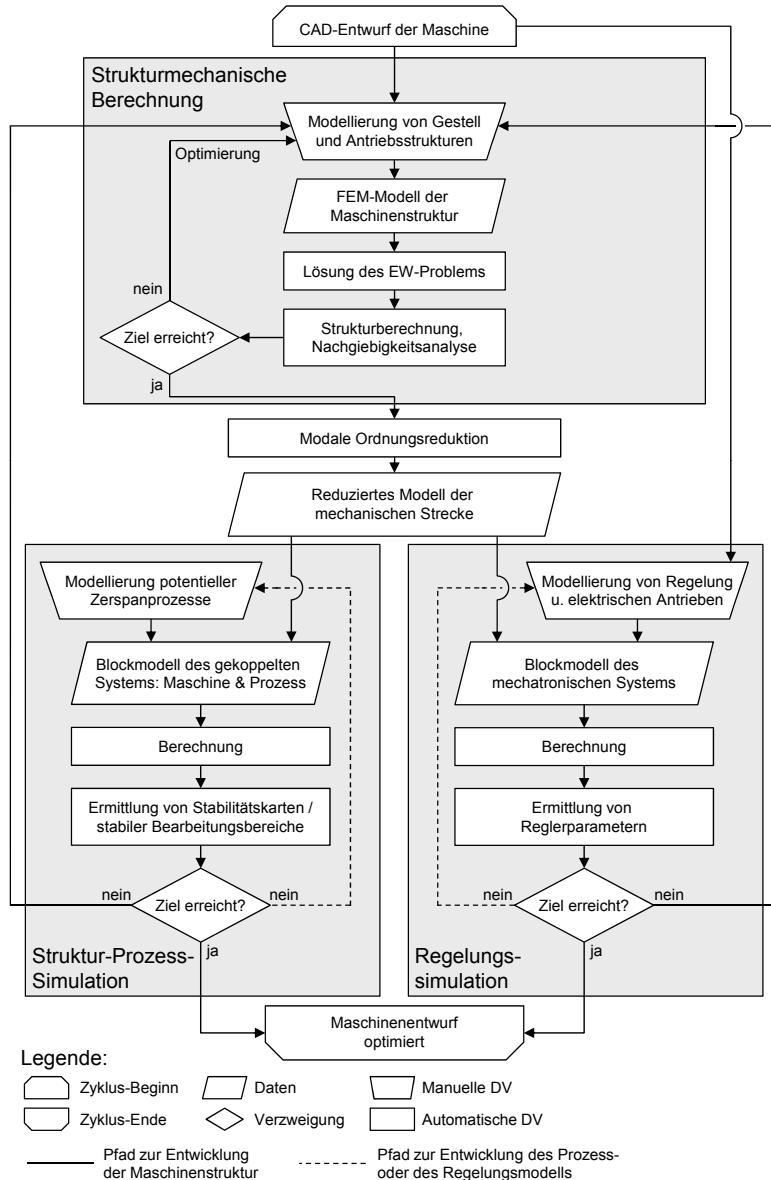


Bild 5.1: Konventioneller Ablauf der entwicklungsbegleitenden Simulation von Werkzeugmaschinen mit Iterationsschleifen zur Optimierung des Maschinenentwurfs (in Anlehnung an OERTLI 2008)

Um ein aussagekräftiges Modell zu erhalten, werden die einzelnen Komponenten der Maschinenstruktur meist mit hohem manuellen Aufwand vernetzt und anschließend zu einem Gesamtmodell zusammengesetzt. Für dünnwandige Bauteile empfiehlt sich dabei der Weg über eine CAD-Modell-basierte Mittenebenenkonstruktion, um bei der Vernetzung zweidimensionale Schalenelemente verwenden zu können, welchen die der jeweiligen Wandstärke entsprechende Dicke zugewiesen wird. Für die übrigen Bereiche der Gestellstrukturen werden Volumenelemente, vorzugsweise die sog. Hexaeder-Elemente, herangezogen, um die Geometrie des Entwurfs abzubilden (SCHWARZ 2010). Auf diese Weise lässt sich, verglichen mit einer automatischen Vernetzung mit sog. Tetraeder-Elementen, die Anzahl der finiten Elemente und der resultierenden Freiheitsgrade des Modells einschränken.

Der Vorteil einer geringeren Modellgröße und damit einer kürzeren Berechnungszeit für die Lösung des Eigenwertproblems geht dabei allerdings auf Kosten der Zeit für die Modellerstellung. Dies wirkt sich insbesondere bei mehreren Iterationsschleifen zur Entwurfsoptimierung nachteilig aus.

Im weiteren Ablauf der entwicklungsbegleitenden Simulation wird dann ein Systemmodell in Block- oder Zustandsraumform der mechanischen Strukturkomponenten benötigt, um dieses mit einem Regelungsmodell oder einem Zerspankraftmodell koppeln zu können. Hierfür kommt bislang die in Abschnitt 3.6 erläuterte modale Ordnungsreduktion zum Einsatz, um ein effizient zu berechnendes Systemmodell zu erhalten. Tritt während der gekoppelten Simulation erneut Änderungsbedarf am Maschinenentwurf auf, ist der gesamte Ablauf von der Modellerstellung an erneut zu durchlaufen. Wird hingegen ein bereits gegenüber der Realität abgesichertes Modell der Maschine verwendet, lassen sich durch die Kopplung die Modelle des Bearbeitungsprozesses oder der Regelung anpassen oder weiterentwickeln (gestrichelte Pfade in Bild 5.1).

An dieser Stelle wird das Potenzial der in der vorliegenden Arbeit vorgestellten auf Krylov-Unterräumen basierenden Ordnungsreduktionsverfahren deutlich. Mit Hilfe der genannten Krylov-Unterraum-Verfahren ist es möglich, Systemmodelle für die Simulation von Werkzeugmaschinen effizient zu erstellen, ohne das Eigenwertproblem lösen und die modale Reduktion mit ihren bekannten Nachteilen anwenden zu müssen.

Um die Krylov-Unterraummethoden für die Simulation von Werkzeugmaschinen zukünftig gezielt einsetzen zu können, wird im Folgenden ein neues Vorgehensmodell vorgestellt. Dieses beschreibt die nötigen Schritte inklusive der Integration des Reduktionsverfahrens zur Erstellung qualitativ hochwertiger Systemmodelle, welche im Anschluss für die jeweilige Simulationsanwendung herangezogen werden können.

### 5.3 Anforderungen und Randbedingungen

An dieser Stelle werden zunächst die wichtigsten an das Vorgehensmodell zu richtenden Anforderungen und Randbedingungen erläutert, damit es sinnvoll und wirkungsvoll in der entwicklungsbegleitenden Simulation von Werkzeugmaschinen eingesetzt werden kann. Diese lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Zum einen soll das Vorgehensmodell so allgemeingültig gehalten sein, dass es sich in jegliche industrielle Entwicklungsprozesse von Werkzeugmaschinen einbinden lässt und dabei unabhängig vom zu entwickelnden Maschinentyp und dessen Entwicklungsstadium ist. Es soll lediglich vorausgesetzt werden, dass die Finite-Elemente-Methode zur Auslegung des Maschinenentwurfs zum Einsatz kommt und ein erstes Strukturmodell vorliegt. Darüber hinaus soll auch das Ziel des Simulationseinsatzes keine Rolle spielen, d. h. das Vorgehen soll sowohl für rein strukturmechanische Berechnungen (z. B. statisch, dynamisch) als auch für eine spätere gekoppelte Simulation anwendbar sein.
- Darüber hinaus soll mit dem neuen Vorgehen die Anzahl der beherrschbaren Freiheitsgrade gesteigert werden können. Dies wirkt sich vereinfachend auf die Vernetzung während der Modellerstellung aus. Gleichzeitig muss eine bestmögliche Approximationsqualität des reduzierten Modells gegenüber dem Originalmodell sichergestellt sein. Damit kann ausgeschlossen werden, dass Abweichungen zwischen Modell und Vermessung der Maschine aus der Modellreduktion entstammen. Hierfür ist der Verlust von modalen Informationen, wie er bei den konventionellen Verfahren auftreten kann, zu vermeiden und eine Möglichkeit zur Abschätzung des Reduktionsfehlers zu schaffen.
- Das Vorgehen soll derart gestaltet sein, dass es kein ausgeprägtes Expertenwissen bezüglich des Reduktionsverfahrens voraussetzt. Dies kann erreicht werden, indem der Ablauf weitgehend automatisiert wird. Durch die Integration von Krylov-Unterraum-basierten Reduktionsverfahren soll zudem der zeitliche Aufwand des Gesamtprozesses verringert werden.
- Schlussendlich soll das Vorgehensmodell das Potenzial der Krylov-Unterraum-Verfahren ausnutzen, auch Modelle mit lokal abgebildeten Dämpfungseffekten simulieren zu können. Dies soll erstmals die direkte Erstellung von reduzierten Systemmodellen ermöglichen, für welche die Dämpfungsmatrix nicht nachträglich über einen globalen Ansatz erstellt werden muss.

Wie oben beschrieben, soll das Vorgehensmodell mit dem darin integrierten Reduktionsverfahren zu jedem Zeitpunkt der Entwicklung eingesetzt werden können. Um allerdings Aussagen über die Leistungsfähigkeit einer Maschine treffen zu können, besteht die Notwendigkeit der Gesamtsystembetrachtung. Diese erfordert die Existenz eines FEM-Modells des Gesamtsystems, um insbesondere auch die aus den Fügestellen resultierenden Verformungen mit berücksichtigen zu können.

Eine besondere Randbedingung besteht in der Tatsache, dass das in der vorliegenden Arbeit vorgeschlagene Reduktionsverfahren das Übertragungsverhalten der mechanischen Struktur mit Hilfe eines Momentenabgleichs approximiert. Dem entsprechend muss die Festlegung der Ein- und Ausgänge des Differenzialgleichungssystems und somit des Übertragungspfades in dem Vorgehensmodell berücksichtigt werden.

## 5.4 Konzeption des Vorgehensmodells

### 5.4.1 Überblick

Für den erfolgreichen Einsatz des in der vorliegenden Arbeit vorgestellten Reduktionsverfahrens im Rahmen des entwicklungsbegleitenden Simulationsprozesses von Werkzeugmaschinen muss das konventionelle Vorgehen, wie es in Abschnitt 5.2 beschrieben wurde, angepasst und überarbeitet werden. Im Folgenden wird daher ein neues Vorgehensmodell zur Integration der Krylov-Unterraum-Methode in den Simulationsablauf konzipiert, welches die in Abschnitt 5.3 beschriebenen Anforderungen erfüllt.

Das vorrangige Ziel ist dabei ein allgemeingültiger Ablauf, welcher universell in der Entwicklung von Werkzeugmaschinen angewendet werden kann. Aufgrund des hohen Automatisierungsgrades des integrierten Reduktionsverfahrens wird die Fehlerwahrscheinlichkeit, falsche modale Informationen auszuwählen, verringert und die erforderliche Approximationsqualität somit sichergestellt. Zudem soll der zeitliche Aufwand des Gesamtprozesses im Vergleich zum konventionellen Vorgehen aus Bild 5.1 reduziert werden. Dies geschieht einerseits durch den Wegfall des zu lösenden Eigenwertproblems und der anschließenden modalen Reduktion. Darüber hinaus soll künftig aber auch auf eine manuelle Vernetzung der Strukturkomponenten verzichtet werden können, da durch die größere Anzahl an beherrschbaren Freiheitsgraden problemlos automatische Vernetzer, welche i. d. R. vielseitig einsetzbare Tetraeder-Elemente verwenden, herangezogen werden können. Der zeitliche Aufwand des Gesamtprozesses wird demnach sowohl aufgrund einer verkürzten Modellerstellungsphase als

also aufgrund einer schnelleren Generierung des gewünschten reduzierten Systemmodells verringert.

Mit diesem Vorgehen soll sichergestellt werden, dass nach der Reduktion ein niedrig dimensioniertes, reduziertes Systemmodell vorliegt, mit dessen Verwendung eine effiziente und schnelle Lösung der Berechnungsaufgabe ermöglicht wird. Gleichzeitig ist zu gewährleisten, dass der Approximationsfehler zwischen dem reduzierten und dem Originalmodell eine vom Anwender definierte Größe nicht übersteigt. Am Ende des Ablaufes muss aufgrund der Simulationsergebnisse entschieden werden, ob eine weitere Überarbeitung des Maschinenentwurfs und damit eine Anpassung des FEM-Modells nötig ist oder ob die Daten die Forderungen aus dem Lastenheft der Werkzeugmaschine erfüllen.

Um die beschriebenen Ziele zu erreichen, wird im Folgenden ein 5-stufiges Vorgehen vorgestellt, welches die definierten Anforderungen berücksichtigt und den effizienten Einsatz der Krylov-Unterraum-Verfahren mit deren Vorteilen ermöglicht (Bild 5.2).

Die einzelnen Stufen werden in den folgenden Abschnitten detailliert erläutert. Einer der größten Unterschiede im Vergleich zum konventionellen Ablauf ist in der frühzeitigen Festlegung des Systemmodells anhand der nötigen Ein- und Ausgänge zu sehen. Dadurch werden die für die Betrachtungen relevanten Übertragungspfade in der mechanischen Struktur festgelegt. Da im Rahmen der Krylov-Unterraum-basierten Reduktion das Übertragungsverhalten approximiert wird, werden nur die relevanten Informationen im resultierenden Modell festgehalten, was zu einer sehr guten Approximationsqualität für den ausgewählten Anwendungsfall gegenüber dem Originalmodell führt.

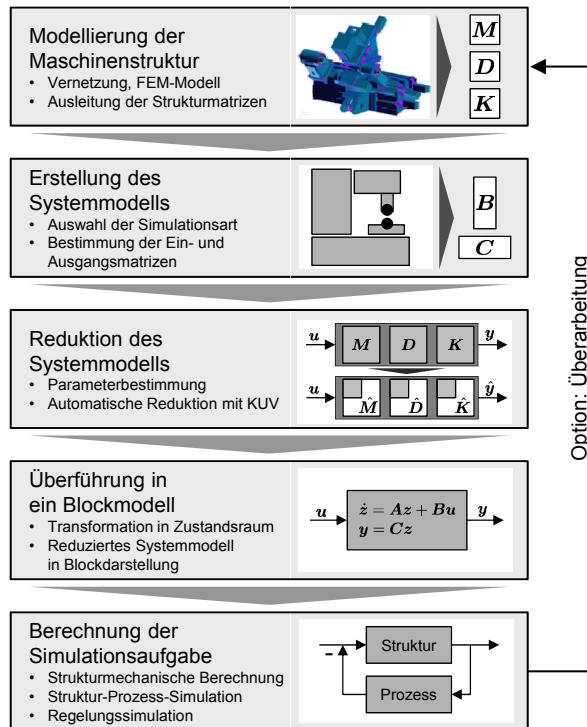


Bild 5.2: 5-stufiges Vorgehensmodell zur Simulation von Werkzeugmaschinen unter Verwendung Krylov-Unterraum-basierter Reduktionsverfahren mit optionaler Iterationsmöglichkeit zur Optimierung des Maschinenentwurfs hinsichtlich der Lastenheftanforderungen

### 5.4.2 Modellierung der Maschinenstruktur

Der erste Schritt besteht, wie auch bei einer konventionellen Vorgehensweise, in der Erstellung eines FEM-Modells der Maschinenstruktur inklusive der Verbindungskomponenten wie bspw. Linearführungen, Kugelgewindetriebe oder Lager. Das Ziel ist es, aus dem Gesamtmodell die Koeffizientenmatrizen (Masse, Dämpfung und Steifigkeit), welche das Gleichungssystem definieren und das Maschinenverhalten beschreiben, auszuleiten. Das hierfür notwendige Vorgehen ist im folgenden Bild 5.3 ausgeführt, in welchem die Darstellungsart von Bild 5.1 übernommen wurde.

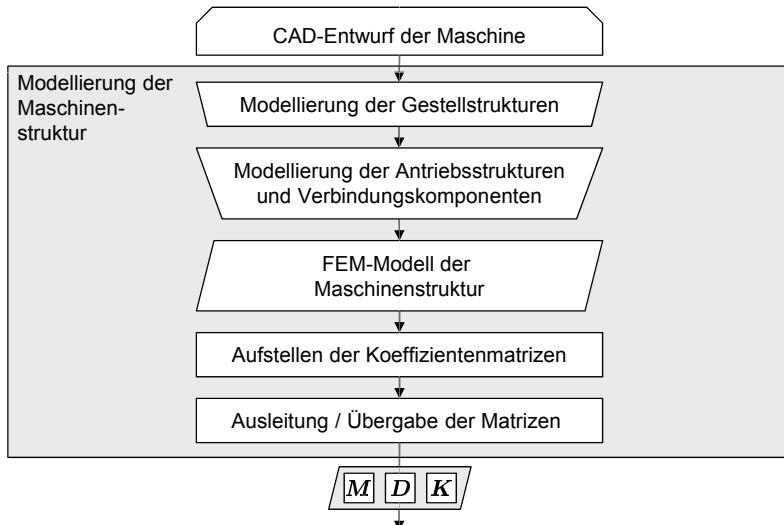


Bild 5.3: Einzelschritte zur Erstellung des Maschinenmodells mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode und zur Generierung der Systemmatrizen

Dabei werden die Maschinenkomponenten, wie z. B. das Maschinenbett, der Ständer, diverse Schlitten usw., deren Geometrie im CAD-Modell festgelegt ist, zunächst einzeln betrachtet und vernetzt. Hierfür stellen kommerzielle Softwarepakete, wie bspw. *MSC.Patran*<sup>®</sup> oder *HyperMesh*<sup>®</sup>, verschiedene finite Elementetypen in entsprechenden Elementbibliotheken zur Verfügung. Bislang war hierfür sehr hoher manueller Aufwand erforderlich, um eine hohe Modellqualität zu gewährleisten. Wie bereits erwähnt, kann der Aufwand mit dem hier beschriebenen Vorgehen reduziert werden und es kann auf automatische Vernetzer zurückgegriffen werden. Dabei kommen meist sog. Tetraeder zum Einsatz, weil diese für die Abbildung der Geometrie der Komponenten besonders flexibel anwendbar sind, was i. d. R. aber zu einer sehr hohen Anzahl von Elementen und somit auch zu vielen Freiheitsgraden im Vergleich zu aufwendig erzeugten Hexaeder- oder Schalenelementnetzen führt. Zusätzlich müssen auch die mechanischen Elemente der Antriebe, wie z. B. die Motorgehäuse, die Motorwellen und die Spindelwellen, im FEM-Modell abgebildet werden. Hierfür werden i. d. R. eindimensionale Balkenelemente eingesetzt, welche den realen Durchmesser als Eigenschaft besitzen. Allen verwendeten Elementen wird schließlich ein Material mit den entsprechenden Parametern wie der Dichte, dem Elastizitätsmodul und der Querkontraktionszahl zugewiesen. Gleichzeitig kann das Material an dieser Stelle, sofern bekannt, mit einem Wert für dessen

Strukturdämpfung versehen werden.

Im nächsten Schritt müssen die Strukturkomponenten zu einem Gesamtmodell der Maschine zusammengesetzt und miteinander verbunden werden. In der Realität wird dies bspw. durch Linearwälz- oder Gleitführungen, sofern eine translatorische Bewegung ermöglicht werden soll, durch Verschraubungen oder im Falle von rotierenden Wellen durch Wälz- oder Gleitlager realisiert. Da der Fokus auf dem Verhalten der Gesamtmaschine und nicht auf der Detailuntersuchung der Einzelkomponenten liegt, werden die Steifigkeitseigenschaften der Verbindungskomponenten im FEM-Modell zweckmäßiger Weise durch Ersatzfedern und -dämpfer abgebildet. Hierfür hat sich die Verwendung von Starrkörperelementen, sog. *Rigid Body Elements* (RBE), als zielführend erwiesen (OERTLI 2008, SCHWARZ 2010). Diese Elemente koppeln mehrere Knoten der Oberfläche der Gestellstruktur mit einem Referenzknoten, über den die Krafteinleitung stattfindet. Zwischen den einzelnen Knoten des Starrkörperelements sind dabei keine Relativbewegungen möglich. Somit können lokale Spannungskonzentrationen an Einzelknoten vermieden werden und für die Verbindung zweier Strukturkomponenten sind lediglich Federelemente zwischen den zwei Referenzknoten nötig (Bild 5.4).

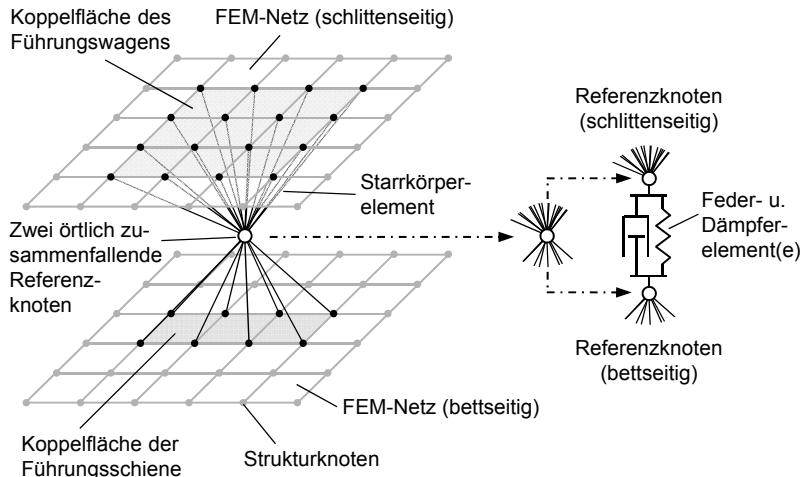


Bild 5.4: Modellierung einer Verbindungskomponente, bestehend aus Feder- und Dämpferelementen, am Beispiel eines Führungsschuhs (nach OERTLI 2008 und SCHWARZ 2010)

Auf ähnliche Weise geschieht die Integration der Antriebskomponenten in das Strukturmodell der Maschine. Die Basis für Vorschubantriebe mit Kugelgewin-

detreiben bildet die Modellierung des Kugelgewindetriebes nach dem Modell von OERTLI (2008), welches mit Hilfe einer Übertragungsmatrix die Rotation einer Spindelwelle in eine Translation der Spindelmutter und damit des Schlittens überführt. Diese Matrix koppelt den relevanten rotatorischen mit dem entsprechenden translatorischen Freiheitsgrad durch eine Schraubsteifigkeit und gibt mit den axialen, den radialen und den Kippsteifigkeiten das komplexe Verhalten der Kugelgewindemutter wieder. Die eigentliche Verbindung findet ebenfalls mit Hilfe der in Bild 5.4 dargestellten Starrkörperelemente statt. Einen umfassenden Überblick, mit welchen finiten Elementen die wesentlichen Maschinenkomponenten im Modell diskretisiert werden können, gibt SCHWARZ (2010), dessen Zusammenstellung als Leitfaden für die Erstellung von Werkzeugmaschinenmodellen gesehen werden kann.

Für das dynamische Verhalten der Gesamtmaschine sind die Verbindungs- und die Fügestellen zwischen den Einzelkomponenten von besonderer Relevanz, da ein Großteil der Nachgiebigkeiten der Maschine aus diesen resultiert (SCHWARZ 2010). Während die Eigenfrequenzen der Einzelkomponenten meist über 300 Hz auftreten, liegt das dominante Verformungsverhalten des Gesamtsystems *Werkzeugmaschine* in einem deutlich niedrigeren Frequenzbereich von ca. 30 bis 200 Hz (ALBERTZ 1995). Um den Eigenschwingungsformen der Maschine die richtige Dämpfung zuzuordnen, bietet es sich an, in den Verbindungsstellen entsprechende viskose Dämpfungselemente zu modellieren. Dies ist in Bild 5.4 durch zu den Federelementen parallel wirkende Dämpferelemente angedeutet. Damit besteht die Möglichkeit, den Relativbewegungen bzw. den Relativgeschwindigkeiten in den verschiedenen kartesischen Freiheitsgraden definierte Dämpfungs Kräfte entgegen wirken zu lassen. Für die Modellierung von Dämpfungseffekten stehen in modernen FEM-Programmen entsprechende Elemente zur Verfügung, welche analog zu den Federelementen parametrisiert werden können.

Das Ergebnis der oben beschriebenen Schritte ist ein vollständiges FEM-Modell der Maschine, welches das Verhalten des Gesamtsystems detailliert abbildet. Dieses liegt im Präprozessor der FEM-Software, z. B. *MSC.Patran®*, vor. Analog zum konventionellen Vorgehen, bei welchem nun eine Berechnung des Eigenwertproblems anstehen würde, werden mit dem hier vorgeschlagenen Verfahren die Koeffizientenmatrizen durch den FEM-Solver aufgestellt. Im hier vorgeschlagenen Vorgehensmodell wird dieser Schritt ebenfalls durchlaufen. Nach dem Erstellen der Matrizen werden diese aber in einer externen Datei abgespeichert und der Prozess wird gestoppt (Bild 5.5).

Basierend auf den Informationen des FEM-Modells wird durch den Solver für jedes finite Element, unabhängig vom Elementtyp, eine Elementsteifigkeits- und eine Elementmassenmatrix berechnet. Diese werden im Anschluss der

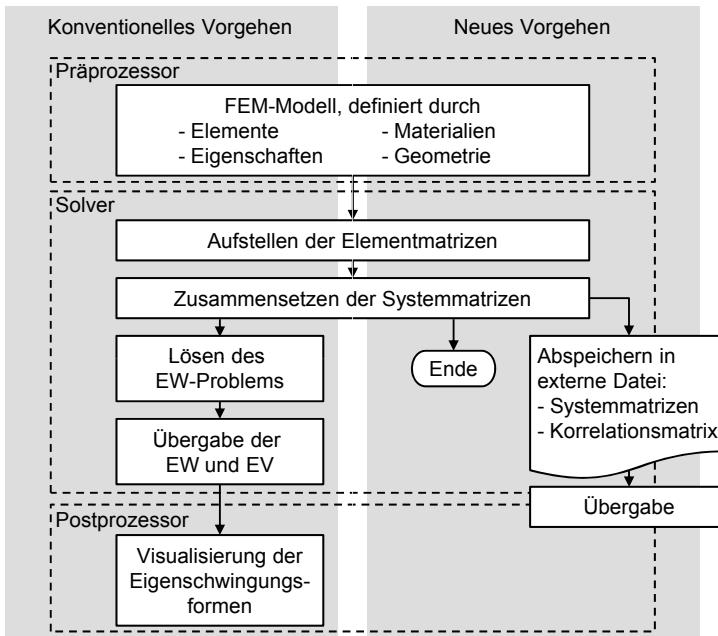


Bild 5.5: Gegenüberstellung von konventionellem und neuem Vorgehen hinsichtlich der Abläufe im FEM-Programm zur Erstellung und Verarbeitung der Koeffizientenmatrizen

Topologie und der Massenverteilung entsprechend zu je einer Gesamtmatrix zusammengesetzt. Sind im Modell Dämpfungselemente vorhanden, wird analog auch eine Dämpfungsmaatrix erstellt (vgl. auch Abschnitt 2.4.4). An dieser Stelle soll nicht näher auf die Theorie der Finite-Elemente-Methode und die Bestimmung der Koeffizientenmatrizen eingegangen werden. Hierfür sei auf entsprechende Fachliteratur verwiesen (z. B. BATHE 2001, KLEIN 2007).

Wie in Bild 5.5 zu erkennen ist, wird in diesem Schritt der Postprozessor nicht mehr zur Visualisierung von Eigenschwingungen verwendet, da die weiteren Schritte zunächst außerhalb des FEM-Programms durchgeführt werden. Eine Visualisierung der Ergebnisse der Berechnungen, z. B. in Form von Frequenzgängen, erfolgt dann zu einem späteren Zeitpunkt im Vorgehensmodell. Die vorliegenden Strukturmatrizen des Maschinenmodells, welche separat abgespeichert wurden, bilden nun die Schnittstelle zur nächsten Stufe des in diesem Kapitel vorgestellten Vorgehensmodells (siehe Bild 5.3). Ihre weitere Verwen-

dung zur Definition des Systemmodells steht im Mittelpunkt des folgenden Abschnitts.

### 5.4.3 Erstellung des Systemmodells

Die zweite Stufe des hier präsentierten Vorgehensmodells hat die Definition und Erstellung des Systemmodells zum Ziel. Dieser Schritt ist von besonderer Relevanz, da er einen dominanten Einfluss auf die weiteren Schritte hat. In Bild 5.6 sind die Einzelschritte aufgeführt, die durchlaufen werden, um basierend auf den vorliegenden Strukturmatrizen das Systemmodell zu generieren.

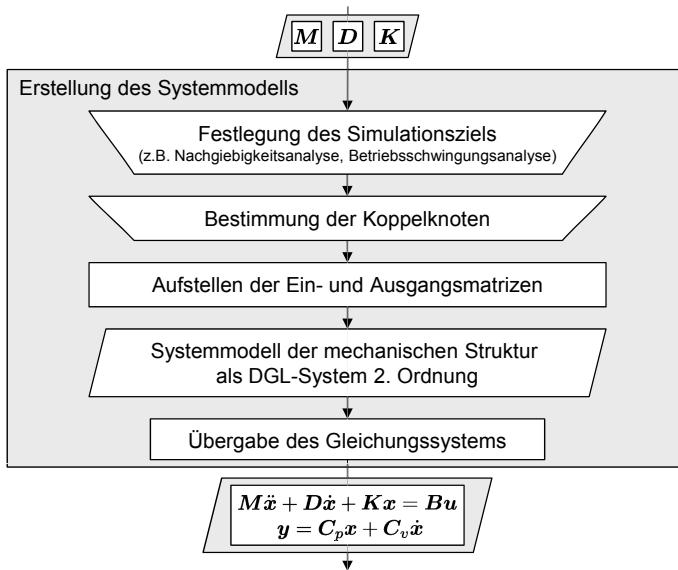


Bild 5.6: Einzelschritte zur Erstellung des Systemmodells in Form eines an die Zustandsraumdarstellung angelehnten DGL-Systems 2. Ordnung

An erster Stelle steht die Festlegung der späteren Art der Berechnung. Grundsätzlich können hier drei Gruppen unterschieden werden, die bereits in Bild 5.1 veranschaulicht sind und die teilweise auch miteinander kombiniert werden können:

- Strukturmechanische Betrachtung der Gesamtmaschine:  
Hierbei wird das Maschinenverhalten analysiert, welches rein auf dem Zusammenwirken der mechanischen Komponenten basiert. Ein typisches

Beispiel ist hierfür der Relativnachgiebigkeitsfrequenzgang am TCP, um eine Aussage über das dynamische Verhalten der Maschine an der Zerspanstelle zu erhalten. Hierbei wird die Relativbewegung zwischen dem werkzeugseitigen und dem werkstückseitigen Knoten des TCP in den drei Koordinatenrichtungen in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz untersucht.

- **Struktur-Prozess-Simulation:**

Das Maschinenmodell wird hierfür mit einem Zerspankraftmodell gekoppelt. Die Anregung durch den Prozess findet zwischen dem werkzeugseitigen und dem werkstückseitigen Knoten des TCP statt, d. h. es wird dieselbe mechanische Übertragungsstrecke wie bei der Betrachtung der Relativnachgiebigkeit herangezogen. Aufgrund der Tatsache, dass das Kraftmodell auf Verlagerungen der Maschinenstruktur mit Veränderungen der Schnitttiefe und damit der Schnittkraft reagiert, kann mit dieser Betrachtung die Maschine hinsichtlich ihrer Ratterneigung untersucht werden.

- **Regelungssimulation:**

Die Kopplung des Maschinenmodells mit dem Modell der Regelung sowie der elektrischen Antriebe dient der Analyse der Wechselwirkungen aller drei Systeme sowie zur Ermittlung von geeigneten Reglerparametern für den Steuerungsentwurf. Hierbei wird eine andere mechanische Übertragungsstrecke betrachtet, da die Regelung die Sollströme für die Servomotoren ausgibt, welche in das jeweilige auf die Motorwelle wirkende Moment umgerechnet werden. Letzteres wirkt demnach auf das mechanische Modell als Drehmoment. Als Eingang für den Lageregler dient in diesem Fall eine Verschiebung am Messsystem bzw. einem entsprechenden Knoten am betrachteten Vorschubschlitten. Der Übertragungspfad verläuft hierbei dann beginnend bei der Rotation der Motorwelle über eine Kupplung oder eine Riemenübersetzungsstufe auf die Spindelwelle und weiter über die Kugelgewindemutter auf den Schlitten, welcher eine translatorische Verschiebung erfährt. Zusammen mit der Regelung lassen sich somit bspw. sog. Führungs frequenzgänge ermitteln, welche das Verhältnis zwischen der Ist- und der Sollgröße des Reglers beschreiben.

Die Auswahl der Berechnungsaufgabe legt somit einerseits den mechanischen Übertragungspfad fest, dessen Übertragungsverhalten während der Reduktion approximiert wird. Andererseits wird damit auch definiert, ob die Vorschubachsen im Modell als geklemmt modelliert werden müssen oder nicht. Für eine Regelungssimulation muss das Modell eine Starrkörperbewegung der beteiligten Komponenten zulassen, damit der Regler wirksam werden kann.

Nach dieser Festlegung müssen in einem zweiten Schritt die resultierenden Koppelknoten bestimmt werden. Im FEM-Netz des Modells hat jeder Strukturknoten eine Nummer, über die er eindeutig identifiziert ist. Entsprechend der oben definierten Übertragungsstrecke wählt der Anwender die Knoten-Nummern aus. Für den Fall einer Relativnachgiebigkeitsanalyse am TCP der Maschinen ist hierfür die Nummer des werkzeugseitigen und des werkstückseitigen Referenzknotens zu verwenden.

Die weiteren Schritte zur Definition des Systemmodells mit den relevanten Ein- und Ausgängen laufen automatisch ab und sind exemplarisch in Bild 5.7 dargestellt. Hierfür spielt die Korrelationsmatrix eine zentrale Rolle, welche vom FEM-Solver aufgestellt wird und im vorherigen Schritt gemeinsam mit den Strukturmatrizen ausgeleitet wurde. In dieser Matrix sind die Zusammenhänge zwischen den Knotenfreiheitsgraden und den Freiheitsgraden des resultierenden Systemmodells festgelegt. Grundsätzlich hat jeder Knoten in einem FEM-Strukturmodell 6 Freiheitsgrade - 3 translatorische (x, y, z) und 3 rotatorische (rx, ry, rz). Vom Solver werden allerdings nicht alle Freiheitsgrade für die Erstellung der Strukturmatrizen verwendet. Da bspw. die Rotationsbewegungen der Knoten von Volumenelementen (z. B. Tetra-, Penta-, Hexaeder) durch Translationen der Nachbarknoten des selben Elements ausgedrückt werden, sind diesen Elementen keine rotatorischen Freiheitsgrade in der Elementmatrix zugeordnet (siehe beispielhafter Auszug aus der Korrelationsmatrix in Bild 5.7). Ebenso kann es Knoten in der Struktur geben, die keine Freiheitsgrade mehr besitzen, da sie bestimmten Zwangsbedingungen unterliegen. Dies ist bspw. bei fest eingespannten Knoten oder auch bei den mit dem Referenzpunkt eines Starkkörperelements verbundenen Knoten der Fall. Da aufgrund der vorherrschenden Zwangsbedingungen diese Knoten die selben Verschiebungen wie der Referenzknoten selbst erfahren, würde sich in der Strukturmatrix eine lineare Abhängigkeit ergeben. Um dies zu vermeiden, weist der Solver diesen Knoten keine oder weniger Freiheitsgrade zu (MSC.SOFTWARE CORPORATION 2003). Über die Korrelationsmatrix lassen sich demnach aus den kartesischen Freiheitsgraden der Strukturknoten die entsprechenden Einträge in den Spalten und Zeilen der Strukturmatrizen bestimmen.

Dieser Zusammenhang wird für die Generierung der Systemeingangs- und -ausgangsmatrizen  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}_p$  und  $\mathbf{C}_v$  herangezogen. Die Matrix  $\mathbf{B}$  besitzt pro Eingang eine Spalte, d. h. wenn bspw. die Nachgiebigkeit am TCP in allen drei Koordinatenrichtungen untersucht wird, hat die Matrix drei Spalten. Analog verhält sich dies bei den Ausgangsmatrizen  $\mathbf{C}_p$  und  $\mathbf{C}_v$ , die entsprechend viele Zeilen bekommen, sodass sich für diesen Fall ein  $(3 \times 3)$ -MIMO-System ergibt. Die Ein- und die Ausgangsmatrizen fungieren im Systemmodell als eine Art Filter, da lediglich diejenigen Freiheitgrade, welche angesprochen werden sollen,

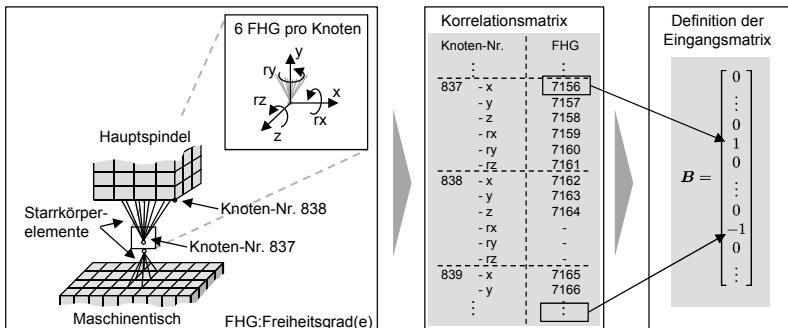


Bild 5.7: Festlegung der Ein- und Ausgangsfreiheitsgrade des Systemmodells über eine Korrelationsmatrix am Beispiel der Eingangsmatrix  $B$

einen Eintrag mit dem Betrag Eins erhalten. Dadurch gelingt es, die wirkende Kraft, welche über den Systemeingang  $Bu$  auf das System aufgebracht wird, an den entsprechenden Knoten mit der gewünschten Orientierung einzuleiten. Zu erwähnen ist, dass eine zwischen zwei Strukturknoten wirkende Eingangskraft durch zwei Einträge innerhalb einer Spalte mit gegensätzlichen Vorzeichen gekennzeichnet ist, um das Prinzip *actio gleich re-action* zu bewahren.

Nachdem dieser Schritt durchlaufen ist, liegen alle Matrizen des Systemmodells vor, welches die an den Zustandsraum angelehnte Darstellung nach Gleichung (3.28) besitzt (siehe auch Bild 5.6). In dieser Form kann es im Folgenden weiterverarbeitet werden.

#### 5.4.4 Reduktion des Systemmodells

Dieser Abschnitt bildet den Kern des hier vorgestellten neuen Vorgehensmodells, da das zuvor erstellte Systemmodell nun in seiner Dimension reduziert wird. Das Ziel dieser Stufe ist es, aus dem originalen hochdimensionierten Systemmodell ein System deutlich kleinerer Dimension zu generieren, welches das Verhalten des Originals möglichst gut approximiert und selbst effizient zu berechnen ist. Die Einzelschritte zur Erreichung eines reduzierten Modells zeigt folgendes Bild 5.8. Wie gefordert, sind hierfür kaum manuelle Eingriffe des Anwenders nötig, da der Großteil des in der vorliegenden Arbeit vorgeschlagenen Reduktionsverfahrens automatisiert abläuft. Vom Benutzer sind deshalb lediglich im ersten Schritt Angaben hinsichtlich des relevanten Frequenzbereichs, für den das Modell approximiert werden soll, des maximal zulässigen Fehlers oder hinsichtlich einer gewünschten maximalen Systemdimension des reduzierten Modells zu machen.

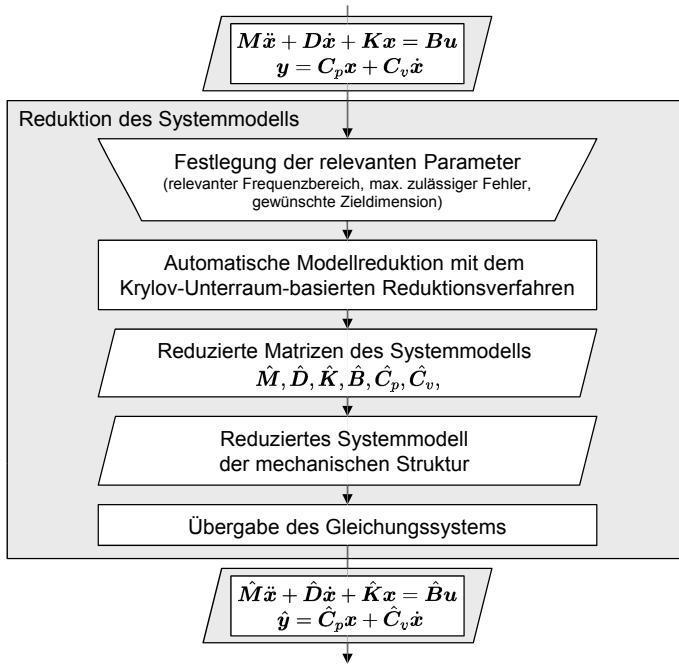


Bild 5.8: Einzelschritte zur Erstellung eines reduzierten Systemmodells mit Hilfe eines auf Krylov-Unterräumen basierenden Reduktionsverfahrens

Diese Angaben dienen als Eingangsparameter für das Reduktionsverfahren, welches als zweiter Schritt in Bild 5.8 dargestellt ist. Mit diesen Werten wird das Eingangsmodell automatisch mit Hilfe des in Kapitel 4 vorgestellten Verfahrens in seiner Dimension reduziert. Der Fokus wird dabei auf den definierten Frequenzbereich gelegt. Für diesen wird das Modell entweder so stark reduziert, bis das Übertragungsverhalten des neuen Modells eine maximal zulässige Abweichung unterschreitet, oder dieses wird auf die festgelegte Dimension gebracht und der entstandene Approximationsfehler wird zusätzlich mit ausgegeben.

Das Resultat sind die reduzierten Strukturmatrizen, die nun vollbesetzt sind und deren Einträge in den Spalten und Zeilen der Matrizen keine physikalische Zuordnung zur Geometrie des FEM-Modells mehr besitzen. Daher müssen diese im nächsten Schritt wieder in die Form eines DGL-Systems 2. Ordnung gebracht werden, dessen Ausgangsgrößen denen des in der zweiten Stufe festgelegten Originalmodells entsprechen. Dieses reduzierte Systemmodell wird schließlich zur weiteren Verwendung übergeben.

### 5.4.5 Überführung in ein Blockmodell

Die vierte Stufe des Vorgehensmodells dient der Vorbereitung der Berechnung des Maschinenmodells. Als Eingangsdatensatz liegt nun ein Systemmodell zweiter Ordnung mit den reduzierten Strukturmatrizen vor, welches in die für das weitere Vorgehen benötigte Form gebracht werden muss. Bild 5.9 zeigt die hierfür nötigen Schritte.

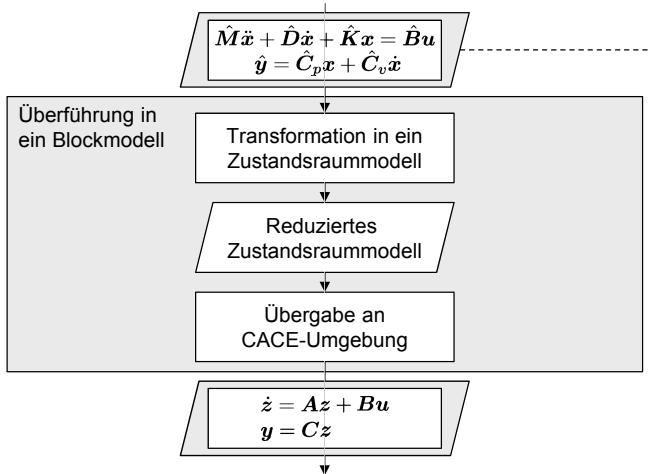


Bild 5.9: Einzelschritte zur Überführung in ein Blockmodell für eine anschließende gekoppelte Simulation und Option zur direkten Verwendung des reduzierten Systemmodells 2. Ordnung (gestrichelter Pfad)

Für eine gekoppelte Simulation, welche i. d. R. in einer CACE-Umgebung wie bspw. *Matlab/Simulink*<sup>®</sup> stattfindet, ist an dieser Stelle eine Transformation in ein Zustandsraummodell erster Ordnung nach Gleichung (3.32) notwendig, um dieses als Block in die CACE-Umgebung einzubetten. Für die Transformation wird im Normalfall, wie in Abschnitt 3.2.4 dargestellt, der Zustandsvektor  $z$  aus den Verschiebungen  $x$  und den Geschwindigkeiten  $\dot{x}$  gebildet. Mit diesem Vektor erfolgt dann die Überführung in ein DGL-System erster Ordnung für die weiteren Berechnungen.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass eine rein strukturmechanische Berechnung auch auf Basis des reduzierten Systemmodells 2. Ordnung möglich ist. Hierfür wird bspw. das Übertragungsverhalten nach Gleichung (3.43) am TCP berechnet. Für den Fall, dass im Rahmen der entwicklungsbegleitenden Simulation keinerlei gekoppelte Betrachtungen zwischen der Struktur und der Regelung

oder dem Prozess angestrebt werden, kann diese Stufe entfallen, was durch den gestrichelten Pfeil in Bild 5.9 angedeutet ist.

Dennoch bietet der Pfad über die Transformation in ein Zustandsraummodell alle weitere Möglichkeiten, da eine alleinige Berechnung des Strukturverhaltens auch mit dem Modell 1. Ordnung möglich ist (vgl. Gleichung (3.45)). Zudem ist die Berechnungsdauer für die Transformation eines bereits reduzierten Systems vernachlässigbar gering. Mit der Transformation in ein Zustandsraummodell ist somit die letzte Vorbereitung für die Berechnung getroffen, auf die im folgenden Abschnitt eingegangen wird.

### 5.4.6 Berechnung der Simulationsaufgabe

Der letzte Schritt des Vorgehensmodells besteht in der Berechnung der eigentlichen Simulationsaufgabe. An dieser Stelle wird das Modell des Maschinenentwurfs - alleine oder in Kopplung mit der Regelung oder einem Prozess - berechnet. Die Auswertung der Ergebnisse zeigt dann, ob die Eigenschaften der Maschine dem Lastenheft genügen oder ob eine Verbesserung der Konstruktion nötig ist. An dieser Stelle wird das reduzierte System nun entsprechend des oben ausgewählten Simulationsziels weiter verwendet. Die drei Wege mit den jeweiligen Einzelschritten sind in Bild 5.10 dargestellt.

Für den Fall, dass die zur Definition gewählten Systemein- und -ausgänge es erlauben, lassen sich die im Bild 5.10 aufgezeigten Wege auch miteinander kombinieren. Werden bspw. für die Nachgiebigkeitsberechnung der Maschinenstruktur die Ein- und Ausgänge am TCP betrachtet, so lässt sich dasselbe Modell auch für eine Kopplung mit einem Zerspankraftmodell, welches ebenfalls am TCP wirkt, verwenden.

Mit dem hier aufgezeigten Vorgehen lassen sich nun vielfältige Untersuchungen des Maschinenentwurfs durchführen. Für den Fall der rein strukturmechanischen Berechnung wird meist das (Relativ-)Nachgiebigkeitsverhalten der Maschine untersucht. Dieses lässt Rückschlüsse auf kritische Frequenzbereiche zu, die als Anregungsfrequenzen, bspw. durch einen Bearbeitungsprozess hervorgerufen, vermieden werden sollten. Ebenso sind in der Blocksimulation auch Strukturantworten im Zeitbereich oder statische Nachgiebigkeiten zu berechnen.

Eine Kopplung des Strukturmodells der Maschine mit den Regelungstechnischen Elementen erfolgt wie in Abschnitt 2.5 beschrieben. Gegenstand dessen ist, das Zusammenwirken von Maschinenstruktur und Regelung der elektromechanischen Vorschubachsen zu untersuchen. Auch bei dieser Anwendung kann die Berechnung sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich durchgeführt werden.

Mögliche Beispiele sind in Tabelle 5.1 aufgeführt. Detailliertere Beschreibungen dieser Simulationsanwendung sind z. B. BERKEMER (2003), WITT (2007), OERTLI (2008) oder SCHWARZ (2010) zu entnehmen.

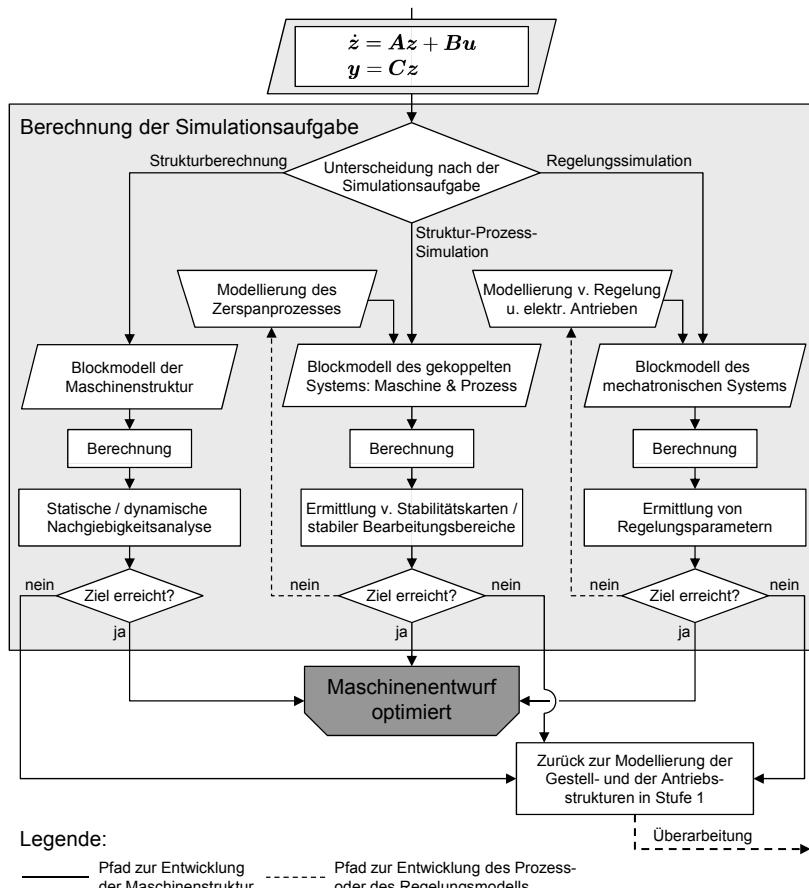


Bild 5.10: Einzelschritte zur Berechnung der Simulationsaufgabe mit angedeuteter Iteration zur Überarbeitung des Maschinenentwurfs

Der mittlere Pfad in Bild 5.10 beschreibt die Struktur-Prozess-Simulation, um die Wechselwirkungen zwischen den mechanischen Komponenten einer Maschine und einem Zerspanprozess zu untersuchen. Hierbei wird analog zur Mechatroniksimulation das Blockmodell der Maschine mit einem Zerspankraftmodell,

welches ebenfalls als Blockmodell vorliegt, gekoppelt. Das Zerspankraftmodell errechnet für einen bestimmten Bearbeitungsfall die auftretenden Kräfte, welche im Modell als Eingangsgrößen für das Mechanikmodell wirken. Dieses antwortet mit einer Verlagerung der Struktur (Ausgang), die wiederum Einfluss auf die Zerspankraft hat und daher als Eingang auf das Kraftmodell wirkt. Diesen Zusammenhang gibt auch Bild 2.3 (S. 15) wieder.

Die Modellierung von Zerspanprozessen und deren Kräften ist noch immer Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchungen. Daher kommt die gekoppelte Simulation von Struktur-Prozess-Wechselwirkungen in der industriellen Anwendung noch wenig zum Einsatz. Dennoch gibt es etliche Prozessmodelle, die sich auch gut mit Hilfe der digitalen Blocksimulation darstellen lassen (siehe u. a. KIENZLE & VICTOR 1957, BUDAK ET AL. 1996, ALTINTAS 2000) und sich für die gekoppelte Simulation eignen. Mit diesem gekoppelten System lassen sich nach dessen Berechnung schließlich Aussagen bezüglich der Prozessstabilität sowie der prinzipiellen Eignung eines Maschinenentwurfs für einen Bearbeitungsprozess treffen. Für detailliertere Informationen sei bspw. auf ALTINTAS ET AL. (2005), BRANDT ET AL. (2008) oder SCHWARZ (2010) verwiesen.

	Darstellung im Frequenzbereich	Darstellung im Zeitbereich
<b>Strukturmechanische Berechnung</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Nachgiebigkeitsfrequenzgang</li> <li>• Eigenfrequenzen</li> <li>• Wurzelortskurve</li> </ul>	Strukturverlagerung
<b>Regelungs-simulation</b>	Führungs frequenzgang	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Lagesollsprung</li> <li>• Kreisformtest</li> </ul>
<b>Struktur-Prozess-Simulation</b>	Stabilitätskarte	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Strukturverlagerung</li> <li>• Zerspankraftverlauf</li> </ul>

*Tabelle 5.1: Übersicht der Analysemöglichkeiten von Werkzeugmaschinen im Frequenz- und im Zeitbereich durch Einsatz der entwicklungsbegleitenden Simulation*

Mit diesen Analysen ist schließlich der letzte Schritt des Vorgehensmodells erreicht. Abschließend muss auf Basis der Simulationsergebnisse entschieden werden, ob die Eigenschaften des Maschinenentwurfs ausreichen oder ob eine Abwandlung wie bspw. eine Geometrieänderung an einer Strukturkomponente oder eine Veränderung der Verbindungseigenschaften durch andere Führungsschuhne vorgenommen werden muss. Eine Abwandlung des Modells der mechanischen

Komponenten verändert die Massen- und die Steifigkeitsverteilung innerhalb der Maschinenstruktur, sodass dann ein erneutes Durchlaufen der Stufen notwendig wird. Dank des Einsatzes der in der vorliegenden Arbeit vorgestellten Krylov-Unterraum-Verfahren lässt sich dies aber effizient durchführen.

Nach Abschluss der Iterationsschleifen liegt ein hinsichtlich des Lastenheftes optimierter Maschinenentwurf vor, sodass die nächsten Schritte der Werkzeugmaschinenentwicklung angegangen werden können. Hierzu zählen u. a. die Steuerungsentwicklung oder das Ableiten von Fertigungszeichnungen, sodass eine erste reale Maschine aufgebaut werden kann.

### 5.5 Zusammenfassung und Fazit

In diesem Kapitel wurde ein neues Vorgehensmodell für die entwicklungsbegleitende Simulation von Werkzeugmaschinen präsentiert, welches die speziellen Anforderungen moderner Ordnungsreduktionsverfahren auf Basis von Krylov-Unterräumen berücksichtigt und deren Einsatz ermöglicht. Die Besonderheit liegt hierbei darin, dass entgegen dem konventionellen Ablauf auf die numerisch aufwendige Lösung des Eigenwertproblems des aus dem FEM-Modell resultierenden Gleichungssystems verzichtet werden kann und die anschließende modale Reduktion entfällt. Dies wird durch das im Kapitel 4 vorgestellte automatisierte Ordnungsreduktionsverfahren ersetzt, wodurch festgesetzte Qualitätskriterien, wie bspw. der maximale Approximationsfehler, gezielt eingehalten werden können.

Mit diesem Vorgehensmodell wird die Möglichkeit geschaffen, die vorgestellten Krylov-Unterraum-Verfahren auch im Entwicklungsprozess von Werkzeugmaschinen einzusetzen. Auf diese Weise kann der Entwickler ein aus dem Fachgebiet der Mathematik stammendes Reduktionsverfahren ohne tiefere Detailkenntnisse anwenden und die Potenziale des Verfahrens für sich nutzbar machen.

Die Gegenüberstellung des konventionellen und des hier vorgeschlagenen Verfahrens zeigt den Unterschied auf, dass bei der Anwendung der Krylov-Unterraum-Verfahren die strukturmechanische Optimierungsschleife entfällt (Bild 5.1 oben). Bei Anwendung des vorgestellten Vorgehensschemas müssen stets alle fünf Schritte durchgeführt werden, bevor erste Ergebnisse vorliegen und somit ggf. ein Verbesserungspotenzial identifiziert werden kann. Dies wirkt auf den ersten Blick etwas unflexibel, was als Nachteil interpretiert werden kann.

Demgegenüber stehen die Vorteile des neuen Verfahrens. Ein wichtiger Aspekt ist hierbei der Einsatz von Fehlerschätzern im Rahmen der Krylov-Unterraum-basierten Reduktion. Es kann ein maximal zulässiger Fehler vorgegeben werden

und die in Schritt 3 durchgeführte Reduktion des Systemmodells berücksichtigt diese Grenze und hält sie ein. Somit kann sicher gestellt werden, dass der resultierende Approximationsfehler einen definierten Wert nicht übersteigt. Im konventionellen Verfahren auf Basis der modalen Reduktion bleibt dieser Fehler hingegen unbekannt. Ein zweiter Vorteil besteht in der Automatisierung der einzelnen Schritte. Wenngleich stets die fünf Stufen durchlaufen werden müssen, so wird dennoch die Effizienz gegenüber dem bisherigen Vorgehen gesteigert, da weniger manuelle, auf Erfahrung basierende Eingriffe und Beurteilungen nötig sind. Darüber hinaus können künftig lokal modellierte Dämpfungseffekte, bspw. aus Fügenstellen wie Verschraubungen, Linearführungen oder Kugelgewindetrieben, im Modell berücksichtigt werden, ohne dass dadurch die Ordnungs-Reduzierbarkeit des Systems verloren geht. Das vorgestellte Reduktionsverfahren berücksichtigt die Dämpfung auch im reduzierten Systemmodell und ermöglicht somit dessen direkte Weiterverwendung in der gekoppelten Simulation, ohne Ersatzmodelle für die beschriebenen Dämpfungseffekte generieren zu müssen. Um den Anforderungen moderner Werkzeugmaschinen und der Forderung nach einem effizienten Entwicklungsprozess nachzukommen, eignet sich die in diesem Kapitel präsentierte Vorgehensweise zur Simulation des gekoppelten Systems aus Maschinenstruktur und den Regelungstechnischen Wechselwirkungen der Antriebe oder des Zerspanprozesses in besonderem Maße.

Mit den Erläuterungen dieses Kapitels endet der allgemeine Teil dieser Arbeit. Im Folgenden wird der Einsatz des Reduktionsverfahrens und des Vorgehensmodells auf diverse Anwendungsfälle beschrieben.

## 6 Anwendung und Validierung des Reduktionsverfahrens

### 6.1 Inhalt des Kapitels und Vorgehen

In diesem Kapitel wird die Anwendung des automatischen Krylov-Unterraum-Verfahrens auf unterschiedliche Beispielmodelle beschrieben. Dabei werden diverse Aspekte beleuchtet und analysiert, um die Eignung des Verfahrens für den Einsatz in der Werkzeugmaschinenentwicklung zu prüfen. Zunächst werden in Abschnitt 6.2 drei FEM-Modelle vorgestellt, auf welche die Reduktion für die Validierung angewendet wird (Abschnitt 6.3). Den Hauptteil dieses Kapitels bildet die Untersuchung der Approximationsqualität (Abschnitt 6.4) und der Berechnungseffizienz (Abschnitt 6.5), um das Reduktionsverfahren im Vergleich zu konventionellen Methoden zu bewerten. Dies geschieht zunächst an einem proportional gedämpften Modell. In Abschnitt 6.6 wird aufgezeigt, wie mit Hilfe der Krylov-Unterraum-Verfahren FEM-Modelle von Werkzeugmaschinen reduziert werden können, welche auch lokale Dämpfungsselemente in einer nicht proportionalen Dämpfungsmatrix enthalten. Am Ende wird die Eignung der reduzierten Systeme für deren Einsatz in einer gekoppelten Simulation bestätigt (Abschnitt 6.7). Damit lassen sich neben der Betrachtung im Frequenzbereich auch Zeitbereichsanalysen durchführen. Das Kapitel schließt mit einer Bewertung und einem Fazit (Abschnitt 6.8).

Den Ausgangspunkt aller Untersuchungen in diesem Kapitel stellen die Koeffizientenmatrizen des Originalsystems dar, für welches eine korrekte Modellierung vorausgesetzt wird. Da in dieser Arbeit eine Veränderung im Berechnungsweg aufgrund eines neuen Reduktionsverfahrens im Mittelpunkt steht, dient das Originalsystem als Grundlage für den Vergleich. Eine auftretende Differenz zwischen den Berechnungsergebnissen von Original- und reduziertem System kann demnach auf einen Approximationsfehler des Reduktionsverfahrens zurückgeführt werden (Bild 6.1).

Ein wichtiges Analysekriterium in strukturdynamischen Betrachtungen von Werkzeugmaschinen ist das Übertragungsverhalten des Systems in Form von Frequenzgängen, wie bspw. des Nachgiebigkeitsfrequenzgangs am TCP. Da die Krylov-Unterraum-Verfahren während der Reduktion dieses Verhalten mit Hilfe eines Momentenabgleichs approximieren, eignet es sich für vergleichende Darstellungen und Bewertungen. Dazu werden die Frequenzgänge sowohl für das Originalsystem als auch für die reduzierten Modelle berechnet. Um eine

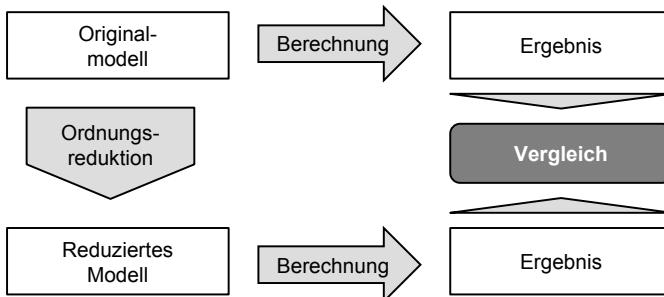


Bild 6.1: Vorgehen zur Validierung des Reduktionsverfahrens

Vergleichsmöglichkeit zur bislang angewandten modalen Reduktion zu schaffen, wird für die folgenden Untersuchungen zusätzlich der aus der modalen Darstellung berechnete Frequenzgang herangezogen.

## 6.2 Beschreibung der Beispielmodelle

### 6.2.1 Finite-Elemente-Modelle

Für die Untersuchung und Bewertung der in dieser Arbeit vorgestellten Krylov-Unterraum-Verfahren werden drei verschiedene FEM-Modelle herangezogen. Die Komponenten der modellierten Strukturen und deren Zusammensetzung sind dabei typisch für Werkzeugmaschinen. Um den Einfluss der Systemdimension auf die Berechnungszeiten aufzeigen zu können (siehe Abschnitt 6.5), wurden für die Koeffizientenmatrizen der Originalsysteme, welche im Folgenden erläutert werden, unterschiedliche Dimensionen herbeigeführt.

#### Antriebsstrang einer Vorschubachse

Als erstes Beispiel dient das FEM-Modell des Antriebsstranges einer Vorschubachse, wie sie typischer Weise in Werkzeugmaschinen verbaut ist. Bild 6.2 zeigt die Komponenten und die dafür verwendeten finiten Elemente. Das Modell spiegelt die Vorschubachse eines Versuchsstandes wider, dessen Maschinenbett aufgrund seiner kompakten, mit Mineralbeton ausgefüllten Stahlkonstruktion als Starrkörper angesehen werden kann. Ebenso werden der Kreuz- und der Oberschlitten als starr betrachtet, was die Modellierung mit einer Punktmasse inklusive deren Trägheitseigenschaften, welche starr mit der Linearführung verbunden ist, zulässt. In diesem einfachen Aufbau tragen insbesondere die bewegten Schlittenmassen sowie die Nachgiebigkeiten entlang des Antriebsstranges

(Kupplung, Spindelwelle, Kugelgewindemutter) maßgeblich zum dynamischen Verhalten bei.

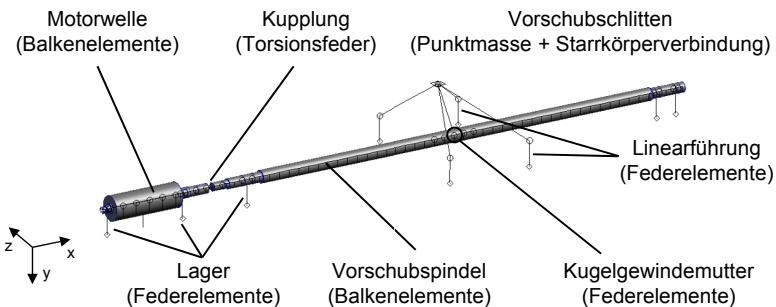


Bild 6.2: Modell eines Antriebsstranges mit Einzelkomponenten und deren Abbildung durch finite Elemente

Das resultierende Systemmodell besitzt 738 Freiheitsgrade und die Massen- und die Steifigkeitsmatrix sind, wie für strukturmechanische FEM-Modelle typisch, dünn besetzt, symmetrisch und enthalten Bandstrukturen. Zudem ist die Massenmatrix aufgrund der konzentrierten Elementmatrixformulierung singulär (vgl. Abschnitt 4.2.1).

Für die Untersuchungen werden zwei Versionen des Modells verwendet. Der Unterschied liegt in der Festlegung des Rotationsfreiheitsgrades der Motorwelle (MW). Ist die Motorwelle geklemmt, was durch eine Torsionsfeder an der Motorwelle mit sehr hoher Steifigkeit realisiert wird, so ist keine Vorschubbewegung des Schlittens möglich, wohl aber die dynamische Nachgiebigkeit des Schlittens analysierbar. Ist die Motorwelle nicht geklemmt, so ist über die Kugelgewindemutter die Übersetzung der Rotationsbewegung der Spindelwelle in eine Translation des Schlittens gewährleistet und es sind kleine Vorschubbewegungen möglich. Dies resultiert in einer singulären Steifigkeitsmatrix, was in diesem Fall eine Starrkörpermode bei Null Hertz verursacht. Mit dieser Modellvariante kann bspw. die Mobilität bzw. die Beweglichkeit der Welle mit Bezug auf das anliegende Motormoment untersucht werden. Diese Darstellung - aufgetragen über der Frequenz - wird Mobilitätsfrequenzgang genannt.

### Abstrahierte Werkzeugmaschinenstruktur

Das zweite Beispiel ist das FEM-Modell einer fiktiven abstrahierten Werkzeugmaschinenstruktur, wie sie bereits in Bild 4.2(a) (S. 91) dargestellt ist. Dieses Modell besitzt 4983 Freiheitsgrade und bildet die grundsätzliche Gestalt einer einfachen Werkzeugmaschine ab. Hierzu gehören die Komponenten Bett,

Ständer, Spindelhalter und Frässpindel. Zudem ist darin eine Vorschubachse enthalten, die analog des in Bild 6.2 dargestellten Antriebsstranges modelliert ist.

Dieses Modell liegt ebenfalls in zwei Varianten vor, jeweils mit und ohne gefesselter Motorwelle, was sich auf die Existenz einer Starrkörpermode auswirkt. Für den ungefesselten Fall wird eine Vorschubbewegung am TCP realisiert, sobald die Motorwelle rotiert.

### Portalfräsmaschine

Als drittes Beispiel wird das FEM-Modell einer Portalfräsmaschine mit drei Vorschubachsen herangezogen, welches 88268 Freiheitsgrade besitzt (Bild 6.3). Die Komplexität des Modells entspricht dabei der des Abbildes einer realen Werkzeugmaschine und die Dimension des Systems ist von einer Größe, welche aus numerischer Sicht bereits als geeignete Prüfung für die vorgestellten Reduktionsmethoden angesehen werden kann. Hiermit soll gezeigt werden, dass diese Verfahren auch auf hochdimensionale und komplexe Strukturmodelle übertragbar sind und in der industriellen Praxis eingesetzt werden können.

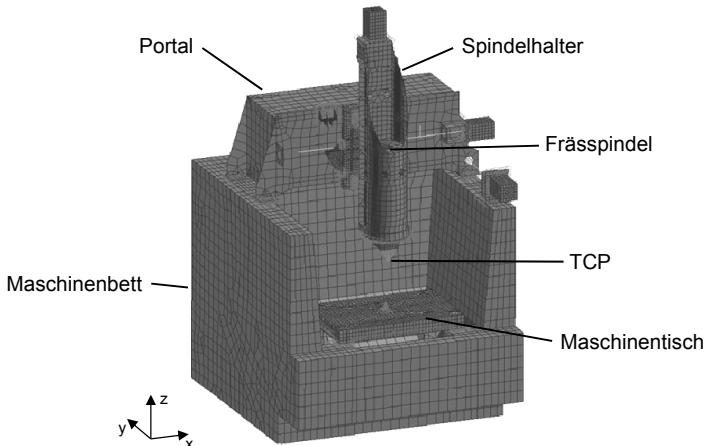


Bild 6.3: FEM-Modell einer Portalfräsmaschine mit 88268 Freiheitsgraden

Für die Beurteilung der dynamischen Nachgiebigkeit der Maschine, welche durch den Nachgiebigkeitsfrequenzgang beschrieben wird, sind die Motorwellen gefesselt. Wie bei den beiden oben beschriebenen Beispielen kann aber auch ein System mit Starrkörperbeweglichkeit erzeugt werden.

### 6.2.2 Definition der Systemein- und -ausgänge

Für die Anwendung des Reduktionsverfahrens müssen die Beispielmodelle in eine systemtheoretische Darstellung nach Gleichung (3.28) überführt werden. Hierzu wird auf das in Kapitel 5 entwickelte Vorgehensmodell zurückgegriffen. Wie in Bild 5.2 beschrieben, werden zunächst die Strukturmatrizen des FEM-Modells erstellt und ausgeleitet. Im nächsten Schritt findet gemäß dem Untersuchungs- oder Simulationsziel die Festlegung der Ein- und Ausgangsmatrizen statt. Tabelle 6.1 zeigt eine Übersicht möglicher Eingangs- und Ausgangsspezifikationen der Beispielmodelle, welche für die überwiegenden Untersuchungen zur Validierung der Krylov-Unterraum-basierten Reduktionsverfahren in diesem Kapitel herangezogen werden.

	Nr.	Dimen- sion	Eingänge	Ausgänge	Besonderheit	Beispielhafte Anwendung
Vorschubachse	1	738	•Rotation MW	•Rotation MW •x-Translation Schlitten	MW ungefesselt	•Mobilitätsfrequenz- gang der MW •Gekoppelte Simulation mit Regelungsmodell
	2	738	•x-Translation Schlitten	•x-Translation Schlitten	MW gefesselt	Nachgiebigkeits- verhalten der Struktur
WZM-Struktur	1	4983	•x-Translation TCP •y-Translation TCP •z-Translation TCP	•x-Translation TCP •y-Translation TCP •z-Translation TCP	MW gefesselt	Dyn. Nachgiebigkeit der Maschinenstruktur
	2	4983	•Rotation MW •x-Translation TCP •y-Translation TCP •z-Translation TCP	•x-Translation TCP •y-Translation TCP •z-Translation TCP •Rotation MW •Rotation SW	MW ungefesselt	•Gekoppelte Simulation mit Regelungsmodell •Prozess-Struktur- Simulation
Pontalfräsmaschine	1	88268	•x-Translation TCP •y-Translation TCP •z-Translation TCP	•x-Translation TCP •y-Translation TCP •z-Translation TCP	MW gefesselt	Dyn. Nachgiebigkeit der Maschinenstruktur
	2	88268	•Rotation MW (x-Achse) •Rotation MW (y-Achse) •x-Translation TCP •y-Translation TCP •z-Translation TCP	•x-Translation TCP •y-Translation TCP •z-Translation TCP •x-Translation d. x-Schlittens •Rotation x-MW •y-Translation d. y-Schlittens •Rotation y-MW	MW der x- und y- Achse ungefesselt	•Gekoppelte Simulation mit Regelungsmodell •Prozess-Struktur- Simulation

Tabelle 6.1: Übersicht der zur Bewertung herangezogenen unterschiedlich dimensionierten Systemmodelle mit deren Ein- und Ausgangsspezifikationen

Entsprechend der Spezifikation der Ein- und Ausgänge werden schließlich die Eingangs- und Ausgangsmatrizen festgelegt (vgl. Abschnitt 5.4.3). Wird nur je

ein Eingangs- und ein Ausgangsfreiheitsgrad betrachtet, wie in Variante 2 des Modells der Vorschubachse, so entsteht ein SISO-System, in diesem Fall der Dimension 738. Werden hingegen mehrere Ein- und Ausgänge benötigt, so resultiert daraus ein MIMO-System. Dies ist bspw. der Fall, wenn die dynamische Nachgiebigkeit am TCP in allen drei Raumrichtungen untersucht wird, siehe Variante 2 der abstrahierten Werkzeugmaschinenstruktur. Damit stehen nun für die Anwendung und Validierung drei Beispielmodelle mit stark unterschiedlichen Dimensionen und unterschiedlicher Anzahl von Übertragungspfaden zur Verfügung, die in den folgenden Abschnitten herangezogen werden.

An dieser Stelle ist zu erwähnen, dass die beschriebenen Modelle zunächst ohne Dämpfungseffekte im FEM-Präprozessor modelliert wurden. Die Berücksichtigung der Dämpfung erfolgt für die weiteren Untersuchungen mit Hilfe des proportionalen Rayleigh-Ansatzes (vgl. Gleichung (2.26)), nach welchem die Dämpfungsmaatrix aus einer Linearkombination der Massen- und Steifigkeitsmatrix gebildet wird. Darüber hinaus wird der Fall der nicht proportionalen Dämpfung in Abschnitt 6.6 gesondert betrachtet.

### 6.3 Anwendung des Reduktionsverfahrens

Den Ausgangspunkt der Anwendung des Reduktionsverfahrens stellen die im vorherigen Abschnitt definierten Systemmodelle 2. Ordnung dar, die dem Reduktionsprogramm übergeben werden. Alle Berechnungen zur Ordnungsreduktion der Beispielmodelle wurden auf einem Rechner mit zwei Intel® Xeon® X5550-Prozessoren mit je 4 Kernen à 2,67 GHz Taktfrequenz durchgeführt. Die Implementierung der Reduktionsalgorithmen und die Durchführung der Berechnungen erfolgte mit der Software *MATLAB/Simulink*® in der Version 7.11, Release R2010b (64-Bit-Version).

Nach der Reduktion liegen die Ergebnisse zunächst als komplexwertiges Systemmodell 2. Ordnung vor. Damit lassen sich Untersuchungen im Frequenzbereich, wie bspw. die Berechnung der Übertragungsfunktion effizient anstellen. Für den Fall einer Zeitbereichsuntersuchung des Systems muss dieses zunächst in eine reelle Form gebracht werden. Dies kann u. a. mit einer *QR*-Zerlegung geschehen, bringt aber den Nachteil mit sich, dass sich die Systemdimension des reduzierten Modells verdoppelt.

Ein Vergleich der Eigenschaften mit den in Abschnitt 4.2.2 gestellten Anforderungen an das Reduktionsverfahren zeigt bereits einen hohen Erfüllungsgrad auf. Da es sich bei den Krylov-Unterraum-Verfahren um Projektionsverfahren handelt, wird die Struktur des Gleichungssystems bewahrt. Das System 2. Ordnung bleibt demnach ein System 2. Ordnung und die Anzahl der Ein-

und Ausgänge ist ebenfalls mit denen des Originals identisch. Zudem wird durch die automatische Wahl der geeigneten Entwicklungsstellen ein hoher Automatisierungsgrad des Verfahrens gewährleistet, sodass das Verfahren auch ohne mathematische Detailkenntnisse anwendbar ist.

In den nächsten Abschnitten werden die Kriterien der Approximationsqualität und der Berechnungseffizienz genauer analysiert. Dabei wird auch der Einsatz von Fehlerschranken sowie der Umgang mit Starrkörpermoden im Modell beleuchtet.

## 6.4 Analyse der Approximationsqualität

### 6.4.1 Allgemeines und Berechnung des Fehlers

Im Folgenden wird die Abbildungsgenauigkeit der reduzierten Modelle nach der Anwendung des automatischen Krylov-Unterraum-basierten Reduktionsverfahrens untersucht. Wie in Bild 6.1 dargestellt ist, geschieht die Bewertung durch den Vergleich der Berechnungsergebnisse von Original- und reduziertem Modell. Hierfür kommt in erster Linie das über der Frequenz aufgetragene Übertragungsverhalten der Systemmodelle zum Einsatz. Um auch Aussagen bezüglich der Unterschiede zu den konventionell modal reduzierten Systemen treffen zu können, werden deren Ergebnisse ebenfalls in die Auswertung mit einbezogen. Auf diese Weise werden die Vorteile des neuen Verfahrens deutlich.

Wie bereits in den Darstellungen der Spektren in Abschnitt 4.3 zu erkennen ist, sind bei der Betrachtung des Übertragungsverhaltens von Original- und reduziertem System kaum Unterschiede erkennbar, vorausgesetzt die Entwicklungspunkte wurden richtig gewählt. Um die Approximationsqualität der Reduktionsverfahren dennoch bewerten zu können, werden die Abweichungen durch die Berechnung des sog. Fehlers aufgezeigt. Um diesen unabhängig vom Funktionswert im Frequenzbereich darstellen zu können, wird der relative Fehler herangezogen, für den der absolute Fehler, d. h. die Differenz zwischen den beiden Funktionen, noch durch die Funktionswerte des Referenz- bzw. des Originalsystems dividiert wird. Da in der vorliegenden Arbeit MIMO-Systeme reduziert wurden, deren mehrdimensionales Übertragungsverhalten durch die Übertragungsmatrix  $\mathbf{H}(s)$  definiert ist, wird der relative Fehler am zweckmäßigsten bezüglich einer geeigneten Matrixnorm, hier der Frobenius-Norm, angegeben:

$$\epsilon_{rel}(s) = \frac{\|\mathbf{H}(s) - \hat{\mathbf{H}}(s)\|_F}{\|\mathbf{H}(s)\|_F} \quad (6.1)$$

Mit  $\epsilon_{rel}$  wird somit ein Fehlermaß über alle Eingangs- und Ausgangspaare angegeben. Für eine konkrete Auswertung eines Paares, wie bspw. des Nachgiebigkeitsfrequenzgangs in x-Richtung, wofür die Knotenverschiebung in x-Richtung am Ausgang und die Krafteinleitung in x-Richtung am Eingang betrachtet wird, lässt sich der relative Fehler

$$\epsilon_{rel,ij}(s) = \frac{\|\mathbf{H}_{ij}(s) - \hat{\mathbf{H}}_{ij}(s)\|_F}{\|\mathbf{H}_{ij}(s)\|_F} \quad (6.2)$$

mit  $i = 1, \dots, q$  und  $j = 1, \dots, m$  berechnen.

Damit können die Ergebnisse der reduzierten Systeme und der Originalsysteme einander gegenübergestellt und bewertet werden.

#### 6.4.2 Einfluss der Modelldimension

Im Folgenden werden anhand der drei vorgestellten Beispielmodelle die Ergebnisse der Reduktionsverfahren präsentiert. Hierfür werden zunächst die Varianten ohne Starrkörpermoden herangezogen, d. h. die Motorwellen sind gefesselt, um deren Rotationsbewegung zu verhindern.

##### Kleines Bepielmodell: Antriebsstrang einer Vorschubachse

Als erstes wurde das Krylov-Unterraum-Verfahren auf das kleine Beispielmodell der Vorschubachse angewendet, welches mit einer proportionalen Dämpfung mit den Faktoren  $\alpha = 0,25$  und  $\beta = 5 \cdot 10^{-5}$  versehen ist. Diese Faktoren wurden ausgewählt, da die maximalen Amplitudenverstärkungen des Übertragungsfrequenzgangs somit mit denen eines modal gedämpften Systems mit 5 % Lehr'scher Dämpfung vergleichbar sind, was in einem für Werkzeugmaschinenstrukturen typischen Bereich liegt (siehe z. B. SUMMER 1986).

Für die Reduktion wurde eine Zieldimension von 20 vorgegeben und der zu approximierende Frequenzbereich auf das Intervall von 0 bis 400 Hz festgelegt. Als Vergleichsmodell dient ein modal reduziertes, für welches die niedrigsten 20 Eigenmoden berücksichtigt wurden, um gleiche Dimensionen der reduzierten Systeme zu erhalten. Diese 20 Eigenmoden decken einen Frequenzbereich bis 781 Hz ab. Das Übertragungsverhalten des Beispielmodells beschreibt das Nachgiebigkeitsverhalten des Vorschubschlittens bei einer harmonischen Anregung des selben. In Bild 6.4 ist dieser Nachgiebigkeitsfrequenzgang mit dem zugehörigen Phasengang des Original- und der beiden reduzierten Systeme dargestellt. In dieser Skalierung ist zunächst kein Unterschied zwischen den Systemen erkennbar, was die Betrachtung des relativen Fehlers der Funktionswerte nötig macht, um eine größere Auflösung zu erzielen (vgl. Bild 6.5). Hierbei ist zu erkennen, dass das modal reduzierte Modell das Original im

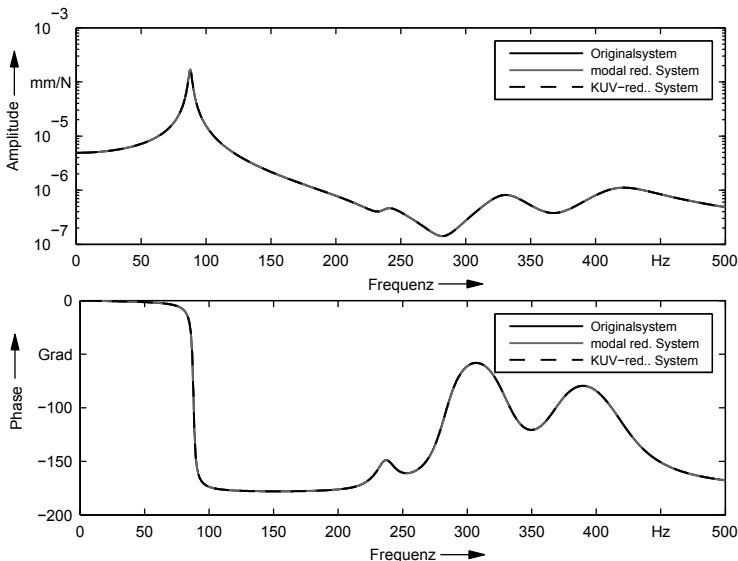


Bild 6.4: Vergleich von Originalmodell (Dimension 738), modal und Krylov-Unterraum-reduziertem Modell, jeweils der Dimension 20, am Beispiel des Nachgiebigkeitsfrequenzganges des Vorschubschlittens in x-Richtung und des zugehörigen Phasenganges

betrachteten Frequenzbereich mit einem maximalen relativen Fehler von ca.  $10^{-3} = 0,1\%$  sehr gut approximiert, der aber um ein Vielfaches höher ist als der des Krylov-Unterraum-reduzierten Systems. Das automatische Krylov-Unterraum-Verfahren hat für diese Reduktion fünf geeignete Entwicklungspunkte identifiziert und in diesen jeweils zwei Momente zur Übereinstimmung gebracht. Dabei fällt auf, dass nur vier der Entwicklungspunkte im vorgegebenen Frequenzintervall bis 400 Hz liegen. Dies ist der iterativen Bestimmung der Entwicklungspunkte geschuldet. Da in der ersten Iteration standardmäßig 5 Punkte vorgegeben sind, versucht das Verfahren, auch in den folgenden Schleifen mindestens 5 Entwicklungspunkte zu berücksichtigen. Da bei diesem kleinen System nur 4 stabile Entwicklungspunkte bis 400 Hz gefunden werden können, nimmt das Verfahren den nächst größeren außerhalb des Frequenzintervalls, um eine stabile Reduktion zu gewährleisten (Abschnitt 4.4.6). Auf diese Weise entsteht ein komplexwertiges reduziertes System der Dimension 10, welches sich während der Reellifizierung auf die gewünschte Größe verdoppelt. Da es sich bei diesem Beispiel um ein SISO-System handelt, beschreibt die zu approximierende Übertragungsmatrix  $H$  nur ein Transferverhalten, sodass

die volle Systeminformation des reduzierten Systems zur Beschreibung des einen Frequenzganges dient. Die Untersuchungen haben ergeben, dass der Phasengang stets dann Abweichungen zwischen Original- und reduziertem System zeigt, wenn auch der Amplitudenverlauf Unterschiede aufweist. Da beide Werte, Amplitude und Phase, aus der Übertragungsmatrix  $H$  berechnet werden und auftretende Unterschiede somit in beiden Verläufen enthalten sind, wird in den folgenden Ausführungen auf die Darstellung der Phase verzichtet.

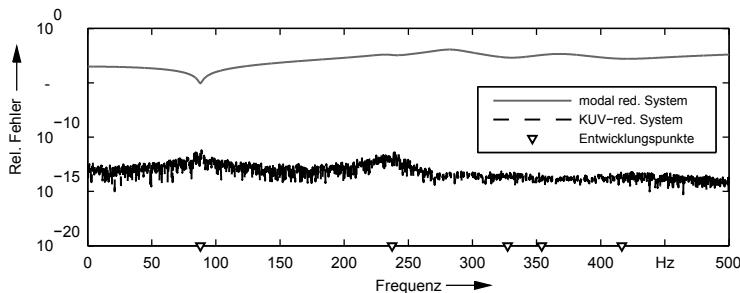


Bild 6.5: Relativer Fehler der Amplitude des Nachgiebigkeitsfrequenzgangs<sup>1</sup> der reduzierten Modelle mit Dimension 20 gegenüber dem Originalsystem

Für einen weiteren Versuch wurde dem Krylov-Unterraum-Verfahren ein maximal zulässiger relativer Fehler von  $10^{-3}$  in den Entwicklungspunkten vorgegeben. Daraus resultierte ein reelles System der Dimension 10, für welches die selben 5 Entwicklungspunkte gefunden wurden, in welchen jeweils ein Moment abgeglichen wurde. Diese Systemdimension reicht immer noch aus, um einen über den gesamten vorgegebenen Frequenzbereich bis 400 Hz deutlich kleineren relativen Fehler zu erreichen, als mit dem modal reduzierten Modell der Dimension 20 (Bild 6.6). Dies hat den Vorteil, dass für eine weitere Verwendung mit einer kleineren Systemdimension gerechnet werden kann, was sich insbesondere bei größeren Modellen positiv auf die Rechenzeiten auswirkt.

<sup>1</sup> Wie oben erläutert, wird im weiteren Verlauf der Arbeit auf die Darstellung der Phase verzichtet. Die folgenden Darstellungen des relativen Fehlers beziehen sich daher stets auf die Unterschiede im Amplitudenfrequenzgang zwischen Original- und reduziertem Modell.

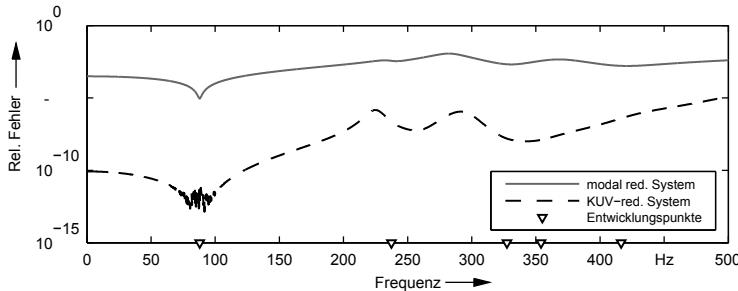


Bild 6.6: Relativer Fehler des modal reduzierten Modells mit Dimension 20 und des KUV-reduzierten Modells mit Dimension 10 gegenüber dem Originalsystem

### Mittleres Beispielmodell: Abstrahierte Werkzeugmaschinenstruktur

Das zweite Beispielsystem, auf welches das Krylov-Unterraum-Verfahren angewendet wurde, ist ein MIMO-System mit drei Ein- und drei Ausgängen als Abbild einer abstrahierten Werkzeugmaschinenstruktur. Da es hierbei bereits neun verschiedene Übertragungspfade gibt, eignet sich für die Auswertung die Frobenius-normierte Darstellung der Übertragungsmatrix  $\|\mathbf{H}\|_F$  der Struktur, was als normierte Amplitudenverstärkung aller Ein- und Ausgangskombinationen verstanden werden kann (siehe Bild 6.7).

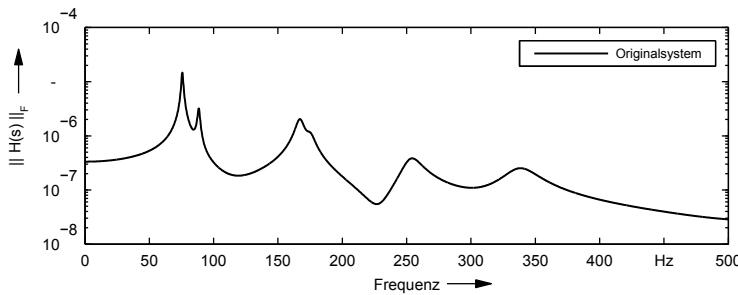


Bild 6.7: Amplitude des Übertragungsfrequenzgang des mittleren Beispielsmodells, dargestellt in der Frobenius-Norm

Für dieses Modell wurde auch eine proportionale Dämpfungsmaatrix bestimmt. Da es sich um ein fiktives Modell handelt, wurden die selben Faktoren,  $\alpha = 0,2$  und  $\beta = 3,64 \cdot 10^{-5}$ , wie sie auch für das große Beispielsystem eingesetzt wurden, herangezogen. Für die Anwendung des Reduktionsverfahrens wurde

als Zieldimension 30 und das Frequenzintervall von 0 bis 400 Hz vorgegeben. Für das modal reduzierte Vergleichsmodell wurden entsprechend 30 Moden berücksichtigt, welche einen Frequenzbereich bis 1374 Hz abdecken. In Bild 6.8 sind die relativen Fehler der verschiedenen reduzierten Modelle einander gegenübergestellt und zeigen die deutlich höhere Approximationsqualität der mit dem Krylov-Unterraum-Verfahren reduzierten Systeme.

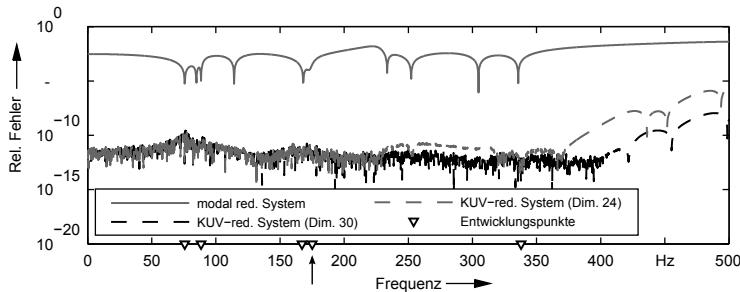


Bild 6.8: Vergleich der relativen Fehler des modal reduzierten (30 Moden), des auf Dimension 30 KUV-reduzierten und des auf Dimension 24 KUV-reduzierten Modells

Zusätzlich wurde in einer weiteren Reduktion ein maximal zulässiger Fehler in den Entwicklungspunkten von  $10^{-2}$  vorgegeben, was zu einem automatisch reduzierten System der Dimension 24 führt (Bild 6.8). Es ist zu erkennen, dass damit nahezu die gleiche Approximationsqualität wie mit dem System der Dimension 30 erreichbar ist. Für die Reduktion des kleineren Systems wurden lediglich 4 Entwicklungspunkte verwendet, woraus die Verkleinerung der Systemdimension resultiert. Der Entwicklungspunkt bei 175 Hz (senkrechter Pfeil in Bild 6.8) wurde hierfür nicht verwendet, was aufgrund des nahe liegenden Entwicklungspunktes bei 167 Hz keine negative Auswirkung in diesem Bereich hat. In dieser Darstellung wird aber die Auswirkung des gewählten Frequenzbereiches deutlich. Da kein Entwicklungspunkt mehr in der Nähe von 400 Hz und darüber verwendet wurde, weisen beide mit dem Krylov-Unterraum-Verfahren reduzierten Systeme einen Anstieg des relativen Fehlers im Bereich oberhalb des Intervalls auf.

Neben dem oben aufgeführten normierten Übertragungsfrequenzgang sind im Anhang A.5.1 zusätzlich die Relativnachgiebigkeitsfrequenzgänge der einzelnen Koordinatenrichtungen mit den entsprechenden Fehlerdarstellungen der reduzierten Systeme aufgeführt (Bild A.5 und A.6).

### Großes Beispielmodell: Portalfräsmaschine

Auch das dritte Beispieldsystem ist ein MIMO-System mit drei Ein- und drei Ausgängen, wofür jeweils die Knoten am TCP verwendet wurden, um Aussagen bezüglich der Relativnachgiebigkeit der Maschine treffen zu können. Für die Erstellung der Dämpfungsmaatrix nach dem proportionalen Rayleigh-Ansatz wurden wiederum die Faktoren  $\alpha = 0,2$  und  $\beta = 3,64 \cdot 10^{-5}$  verwendet. Wie in Bild 6.9 offensichtlich ist, werden bei einem komplexen System mit vielen Eigenfrequenzen, wie es bei Werkzeugmaschinenstrukturen üblich ist, durch den proportionalen Dämpfungsansatz die niederfrequenten Eigenmoden eher schwach bedämpft, was an den großen Gradienten und hohen Amplitudenverstärkungen zu erkennen ist, und die höherfrequenten Anteile stärker bedämpft.

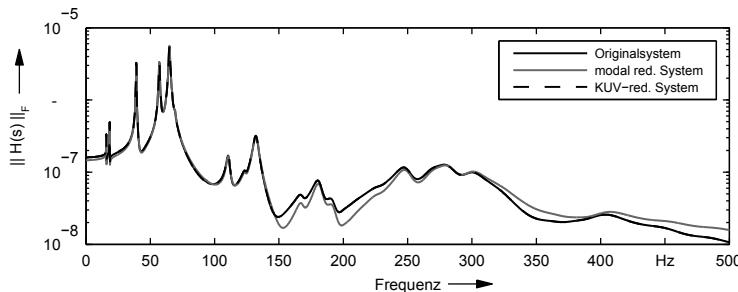


Bild 6.9: Übertragungsfrequenzgang des Originalsystems des großen Beispieldmodells, des modal reduzierten (Dimension 200) und des KUV-reduzierten Systems der Dimension 200

Die Verläufe des Frequenzganges eines modal reduzierten Modells unter Berücksichtigung von 200 Eigenmoden sowie eines mit dem Krylov-Unterraum-Verfahren reduzierten Systems der Dimension 200 sind ebenfalls in Bild 6.9 dargestellt.

Dieses Beispiel zeigt, dass für hochdimensionale Modelle mit vielen Eigenfrequenzen der modale Ansatz erhebliche Schwächen aufweist, obwohl die 200 Moden einen Bereich bis 1524 Hz abdecken. Der Grund hierfür liegt in der

Vernachlässigung der hochfrequenten modalen Anteile<sup>2</sup>. Die Gegenüberstellung der relativen Fehler (Bild 6.10) verdeutlicht die signifikanten Unterschiede und die Vorteile zugunsten des mit dem Krylov-Unterraum-Verfahren reduzierten Systems.

Die Reduktionsergebnisse in Bild 6.9 und 6.10 sind an dieser Stelle anhand des normierten Übertragungsfrequenzganges dargestellt. Eine Detaillierung der Ergebnisse der Relativnachgiebigkeit für die einzelnen Koordinatenrichtungen ist im Anhang A.5.2 zu finden.

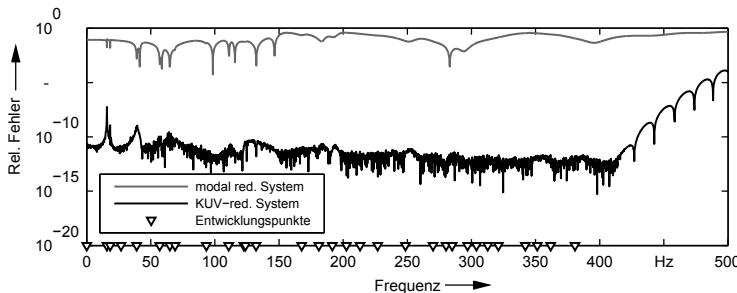


Bild 6.10: Relative Fehler des modal reduzierten Systems (Dimension 200) sowie des KUV-reduzierten Systems (Dimension 200) gegenüber dem Originalsystem

Zusammenfassend ist festzustellen, dass das automatische Krylov-Unterraum-Verfahren unabhängig von der Modelldimension sehr gute Approximationsergebnisse liefert. Um die hohe Qualität zu erreichen, resultiert erwartungsgemäß für sehr große Systeme auch eine größere Dimension des reduzierten Systems. Bei gleicher Dimension der reduzierten Systeme besitzen die mit Krylov-Unterraum-Verfahren reduzierten System jedoch stets den geringeren Approximationenfehler.

<sup>2</sup> Für die direkte Berechnung des Übertragungsverhaltens bieten moderne FEM-Solver die Möglichkeit, die sog. *residual vectors* (modale Residuenvektoren) zu berücksichtigen, mit deren Hilfe sich die Ergebnisse gegenüber dem Originalmodell verbessern lassen, insbesondere auch für den statischen Fall (ROSE 1991, ROY & GIRARD 2005). Für die Erstellung eines modalen Systemmodells ist aber das Eigenwertproblem des Originalmodells zu lösen, weshalb die Verbesserung der Ergebnisse in der direkt berechneten Übertragungsfunktion hinfällig ist. In weiteren Versuchen wurden die *residual vectors* auch für die Eigenwertberechnung berücksichtigt. Da dieser Schritt keinen nennenswerten Einfluss auf die Eigenwerte selbst und somit auf die modal reduzierten Modelle hatte, wurde für die Berechnungen in dieser Arbeit auf ihn verzichtet und das in Abschnitt 2.4.3 beschriebene Standardvorgehen verwendet.

### 6.4.3 Einfluss des gewählten Frequenzbereiches

Für die im vorherigen Abschnitt präsentierten Reduktionsergebnisse wurde dem automatischen Krylov-Unterraum-basierten Verfahren ein zu approximierender Frequenzbereich von 0 bis 400 Hz vorgegeben. In den Darstellungen ist zu erkennen, dass in diesem Bereich die Abweichung gegenüber dem Originalsystem vernachlässigbar ist. Ab der Intervallgrenze steigt der relative Fehler aber jeweils an. Um den Einfluss des gewählten Frequenzbereichs aufzuzeigen, wurde das Originalssystem des großen Beispielmodells dreimal mit verschiedenen Approximationsintervallen ( $[0; 150]$ ,  $[0; 300]$  und  $[0; 500]$  Hertz) reduziert (Bild 6.11). Bei allen drei Reduktionen wurde ein maximal zulässiger relativer Fehler von  $10^{-3}$  in den Entwicklungspunkten vorgegeben. Der definierte Frequenzbereich hat entsprechend Einfluss auf die Anzahl der Entwicklungsstellen, sodass die reduzierten Systeme unterschiedliche Dimensionen aufweisen (Tabelle 6.2). Die niederfrequenten Entwicklungspunkte der drei reduzierten Systeme unterscheiden sich ebenfalls, da für die Wahl der selben stets die Eigenwerte des in der vorangegangenen Iteration bestimmten reduzierten Systems herangezogen wurden (siehe Abschnitt 4.4.6).

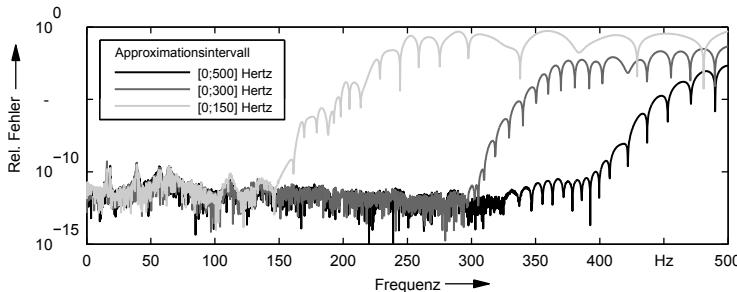


Bild 6.11: Relative Fehler der reduzierten Systeme gegenüber dem Originalmodell der Portalfräsmaschine bei unterschiedlichen vorgegebenen Frequenzintervallen

Frequenzintervall in Hertz	[0 150]	[0 300]	[0 500]
Dimension des red. Systems	42	66	72
Anzahl der verwendeten Entwicklungspunkte	7	11	12
Frequenzlage der Entwicklungspunkte in Hertz (gerundet)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 18,4</li> <li>• 39,1</li> <li>• 57,1</li> <li>• 64,9</li> <li>• 69,5</li> <li>• 110,7</li> <li>• 132,2</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 35,1</li> <li>• 55,6</li> <li>• 64,4</li> <li>• 65,5</li> <li>• 97,3</li> <li>• 131,5</li> <li>• 186,6</li> <li>• 201,6</li> <li>• 253,7</li> <li>• 284,1</li> <li>• 293,6</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 44,3</li> <li>• 60,4</li> <li>• 67,2</li> <li>• 127,4</li> <li>• 133,7</li> <li>• 204,8</li> <li>• 252,8</li> <li>• 289,8</li> <li>• 293,0</li> <li>• 379,9</li> <li>• 393,4</li> <li>• 398,2</li> </ul>

Tabelle 6.2: Anzahl und Lage der verwendeten Entwicklungspunkte in Abhängigkeit des gewählten zu approximierenden Frequenzintervalls

Wie zu erkennen ist, steigt der relative Fehler im Frequenzbereich oberhalb der jeweiligen Intervallgrenze stark an, da dort keine Entwicklungspunkte mehr für einen Momentenabgleich berücksichtigt werden. Wird während der Entwicklungsstellenwahl auch innerhalb des Intervalls in einem bestimmten Bereich kein dominanter Eigenwert gefunden, so kann es auch hier zum Anstieg der Abweichungen kommen. Dies ist für das reduzierte System der Dimension 72 (schwarze Linie in Bild 6.11) der Fall, da oberhalb von 400 Hz kein (dominanter) Eigenwert mehr gefunden wird (vgl. Bild 6.10). Aus diesem Grund ist in der Regel die Wahl eines größeren Frequenzbereichs sinnvoll, wenngleich dies die Reduktionsdauer und die Dimension des reduzierten Systems nach oben treiben kann. Dies ist bspw. von der Anzahl der Eigenfrequenzen und deren Dämpfung abhängig.

#### 6.4.4 Reduzierung der Fehlerwahrscheinlichkeit durch Automatisierung

Ein großer Vorteil des automatischen Krylov-Unterraum-basierten Verfahrens ist, dass die Reduktion auf Basis einer mathematischen Bewertung stattfindet. Auf diese Weise werden Fehler umgangen, die sich bei der modalen Reduktion durch manuelle Selektion der dominanten Eigenfrequenzen oder auch anhand einer normierten Systemdarstellung ergeben können. Wird bspw. der normierte Übertragungsfrequenzgang (Bild 6.9) zur Modenauswahl herangezogen, so erscheinen die Moden 13 (166 Hz) und 15 (189 Hz) als geringfügig dominant (Bild 6.12 links). Bei der Betrachtung des Nachgiebigkeitsfrequenzganges in

$x$ -Richtung fällt aber auf, dass Mode 15 ausgeprägt vorhanden ist und bei Nichtbeachtung dieser Mode auch die entsprechende Schwingungsform (Rotationsschwingung des Spindelhalters inkl. des  $x$ -Schlittens um die  $z$ -Achse, Relativbewegung in den Führungsschuhen des  $x$ -Schlittens) nicht enthalten ist (Bild 6.12 rechts). Diese Problematik wird insbesondere bei höheren Dämpfungsgraden verschärft, da wenig dominante Eigenfrequenzen in einem aufgrund der Dämpfungswirkung abgeflachten und verbreiterten Amplitudenverlauf in den Hintergrund treten.

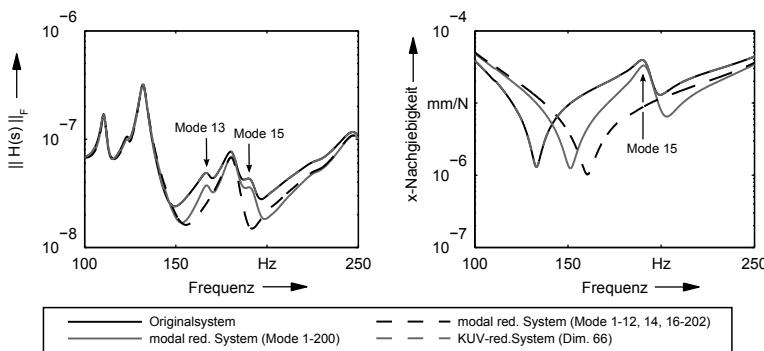


Bild 6.12: Auswirkung der Vernachlässigung der 13. und 15. Eigenmode auf den normierten Frequenzgang (links) sowie den  $x$ -Nachgiebigkeitsfrequenzgang (rechts) des großen Beispielmodells

Nebenbei fällt eine starke Verschiebung der Anti-Resonanz in den modal reduzierten Modellen auf. Das mit dem Krylov-Unterraum-Verfahren reduzierte System (max. zulässiger rel. Fehler in den EP:  $10^{-3}$ , Frequenzintervall  $[0 \text{ } 400]$  Hertz) folgt hingegen dem Verlauf des Originalsystems und bildet das dynamische Verhalten in diesem Frequenzbereich korrekt ab.

#### 6.4.5 Berücksichtigung von Starrkörpermoden

Bei den Anforderungen an das in dieser Arbeit vorgeschlagene Reduktionsverfahren wurde unter anderem die Beherrschung von Starrkörpermoden genannt, da diese für eine gekoppelte Simulation mit einem Regelungstechnischen Modell der Werkzeugmaschinenantriebe notwendig sind. Deshalb wird im Folgenden nochmals explizit auf diese Thematik eingegangen.

Die Existenz von Starrkörpermoden stellt eine Herausforderung an das Reduktionsverfahren dar, weil der zu approximierende Nachgiebigkeitsfrequenzgang im

statischen Bereich ( $f \rightarrow 0$ ) theoretisch gegen Unendlich geht, da die statische Steifigkeit Null ist. Aus systemtheoretischer Sicht resultieren in diesem Fall ein doppelter bzw. zwei konjugiert komplexe Eigenwerte bei 0 Hz<sup>3</sup>.

Um das Bewegungsverhalten der Vorschubachsen einer Werkzeugmaschine korrekt durch ein reduziertes Modell wiederzugeben, muss der jeweilige Eigenwert bei 0 Hz in diesem erhalten bleiben. Das wird im Krylov-Unterraum-basierten Reduktionsverfahren durch die Dominanzanalyse der Residuen während der Wahl der Entwicklungsstellen sicher gestellt (vgl. Abschnitt 4.4.6). Aufgrund der Tatsache, dass die Amplitudenverstärkung des Nachgiebigkeitsfrequenzgangs bei 0 Hz gegen Unendlich geht, wird dieser Eigenwert stark gewichtet und als Entwicklungspunkt für die folgende Iteration herangezogen. Zusätzlich wird in der Reduktionsroutine im betragsmäßig kleinsten Entwicklungspunkt definitiv ein Moment abgeglichen (siehe Abschnitt 4.4.6), sodass der Vergleich von Original- und KUV-reduziertem Modell eine sehr gute Übereinstimmung des Eigenwertes der Starrkörpermode (Bild 6.13) und des Amplitudenverlaufs im sehr niederfrequenten Bereich aufweist (Bild 6.14).

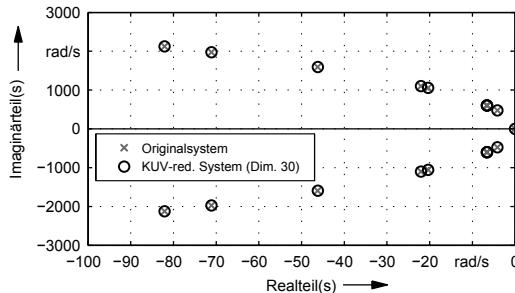


Bild 6.13: Vergleich der Lage der niederfrequenten Eigenwerte des Originalsystems und des KUV-reduzierten Systems am Beispiel des mittelgroßen FEM-Modells

Wie in Bild 6.13 zu erkennen ist, approximieren die Eigenwerte des reduzierten Systems die des Originals sehr gut. Für die Starrkörpermode ist insbesondere der Eigenwert mit  $real(s) = imag(s) = 0$  von Interesse. Auf Basis der Ergebnisse der Dominanzanalyse während der Auswahl relevanter Entwicklungsstellen im Rahmen der Reduktion wird automatisch ein Entwicklungspunkt bei oder nahe bei 0 Hz gelegt (Bild 6.14b). Es ist zu erkennen, dass der relative Fehler im höheren Frequenzbereich erneut stark ansteigt. Dies ist der vorgegebene

<sup>3</sup> In der Praxis können diese Eigenwerte aufgrund von Rundungsfehlern im Federmodell des Kugelgewindetriebes auch sehr kleine Werte größer Null annehmen.

Dimension von 30 geschuldet, die eine Vergleichbarkeit mit dem modal reduzierten Modell gewährleistet. Eine automatische Reduktion mit einem maximal zulässigen Fehler ( $10^{-3}$ ) ergibt eine Systemdimension von 40, bei welcher ein Entwicklungspunkt mehr verwendet wird und somit noch bessere Ergebnisse im höherfrequenten Bereich erzielt werden können (siehe Anhang A.5.3).

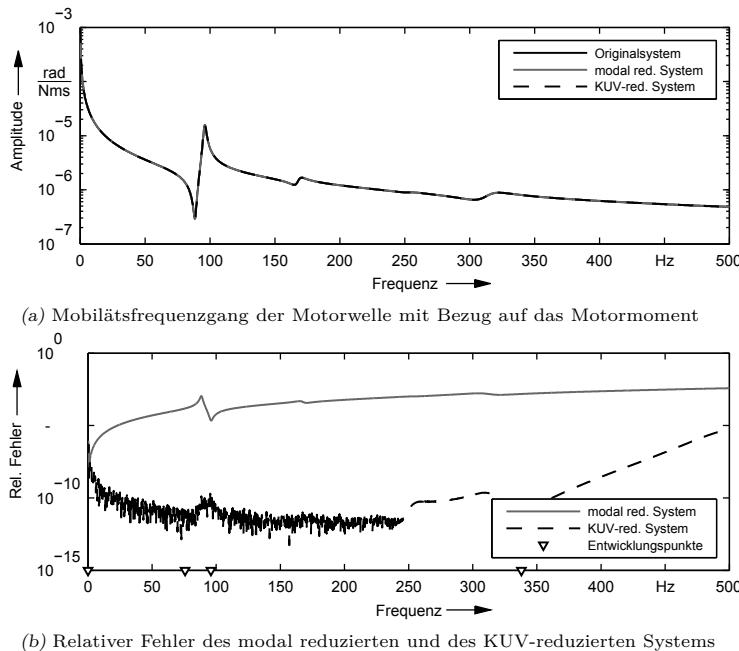


Bild 6.14: Vergleich der Approximationsqualität eines modal reduzierten und eines KUV-reduzierten Systems (beide Dimension 30), ausgewertet anhand des Mobilitätsfrequenzgangs der Motorwelle der y-Achse des mittleren Beispielmodells

Weitere Reduktionsergebnisse zur Berücksichtigung von Starrkörpermoden für das große Beispielmodell mit zwei nicht gefesselten Motorwellen sind ebenfalls im Anhang A.5.3 zu finden.

Zusammenfassend ist festzustellen, dass durch die Verwendung einer Dominanzanalyse während der Entwicklungsstellenwahl die für die Starrkörpermoden relevanten Eigenwerte im reduzierten Modell erhalten bleiben. Damit kommen die Krylov-Unterraum-Verfahren der diesbezüglich gestellten Anforderung nach

und approximieren das Originalmodell stets besser als die konventionellen modalen reduzierten Modelle.

#### 6.4.6 Einfluss der Anzahl von Ein- und Ausgängen

Eine Besonderheit der Krylov-Unterraum-Verfahren gegenüber der modalen Reduktion ist, dass die Anzahl der Ein- und bei zweiseitigen Verfahren auch die Anzahl der Ausgänge einen Einfluss auf die Dimension des reduzierten Modells hat (vgl. Gleichung (3.107)). Da bei Systemen mit vielen Eingängen auch entsprechend viele Übertragungspfade approximiert werden müssen, ist dies bei der automatischen Reduktion zu beachten. Zur Veranschaulichung wurde das große Beispielmodell verwendet, um drei MIMO-Systemvarianten zu erzeugen. Diese werden im Folgenden nach der Anzahl ihrer Ein- und Ausgänge mit  $(3 \times 3)$ ,  $(6 \times 6)$  und  $(9 \times 9)$  bezeichnet. Bei der automatischen Reduktion mit einem vorgegebenen, maximal zulässigen relativen Fehler pro Entwicklungspunkt von  $10^{-3}$  resultieren unterschiedliche Größen der reduzierten Systeme (Tabelle 6.3). Je mehr Eingänge das System aufweist, desto mehr potenzielle Entwicklungspunkte werden zunächst gefunden. Um den maximal zulässigen Fehler zu unterschreiten, werden aber bei allen drei Systemen nur 12 bzw. 13 Punkte, in denen je ein Moment zur Übereinstimmung gebracht wurde, benötigt. Erwartungsgemäß steigen mit zunehmender Anzahl von Eingängen auch die Berechnungszeiten für die Reduktion der Systeme an (siehe Abschnitt 6.5).

MIMO-System	$3 \times 3$	$6 \times 6$	$9 \times 9$
Potenzielle Entwicklungspunkte	12	23	34
Verwendete Entwicklungspunkte	12	13	12
Resultierende Dimension (reell)	76	154	216

Tabelle 6.3: Auswirkung der Anzahl der Ein- und Ausgänge auf die Entwicklungspunkte und die Systemdimension

Mit dem hier verwendeten Krylov-Unterraum-Verfahren lassen sich auch komplexe Modelle mit einer hohen Anzahl von Eingängen zuverlässig reduzieren, wobei verfahrensbedingt die benötigte Dimension des reduzierten Systems ansteigt. Die Untersuchungen hierzu haben ergeben, dass es dabei nicht empfehlenswert ist, eine definierte Dimension vorzugeben, da bei einer maximal zulässigen Größe das Reduktionsverfahren die Erweiterung der Projektionsmatrix bei Erreichen der Dimension abbricht. Auch wenn bis zu dieser Größe stets

diejenigen Entwicklungspunkte für den nächsten Momentenabgleich vom Programm ausgewählt wurden, welche den größten relativen Fehler besitzen, kann es dennoch zu einem erheblichen Anstieg des Approximationsfehlers kommen (Bild 6.15). Bei der Begrenzung auf die Dimension 100 während der Reduktion des großen Beispielmodells wurden keine Entwicklungspunkte oberhalb von 100 Hz verwendet (außer dem in der Routine vorgegebenen betragsmäßig größten, in diesem Fall bei ca. 450 Hz), weil vorher die erlaubte Dimension erreicht wurde. Aus diesem Grund kommt es bei dieser Übertragungsstrecke zu einem erheblichen Anstieg des relativen Fehlers (schwarze Linie in Bild 6.15b).

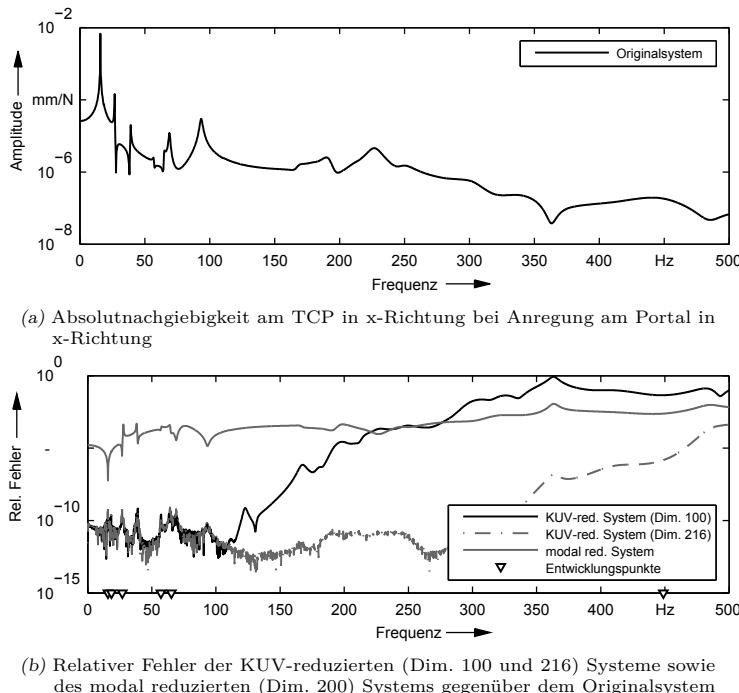


Bild 6.15: Auswirkungen der Dimensionsbegrenzung auf den relativen Fehler, dargestellt am Übertragungsfrequenzgang „Anregung am Portal - Verlagerung am TCP“ (jeweils in x-Richtung) des großen Beispielmodells

Zusätzlich zur dargestellten Absolutnachgiebigkeit in x-Richtung ist im Anhang A.5.4 der genormte Frequenzgang über alle  $9 \times 9$  Übertragungsstrecken mit den zugehörigen Fehlern der untersuchten Systeme aufgeführt.

### 6.4.7 Schlussfolgerungen zur Untersuchung der Approximationsqualität

Die Untersuchungen der Approximationsqualität der mit den Krylov-Unterraum-Verfahren reduzierten Modelle zeigen durchgehend sehr gute Ergebnisse, die stets besser als die der modal reduzierten Modelle sind. Dies wird insbesondere bei größeren Modelldimensionen sichtbar, da hier der modale Ansatz das Originalsystem nur unzulänglich abbilden kann. In dieser Arbeit wurde auf den zusätzlichen Einsatz modularer Domiananalyse-Verfahren verzichtet, da, wie dargestellt, selbst die Verwendung aller modalen Informationen im betrachteten Frequenzbereich zu erheblichen Abweichungen gegenüber dem Originalmodell führt. Eine Auswahl der dominanten Moden kann hier keine weitere Verbesserung bringen.

Ein wichtiger Aspekt zugunsten des Krylov-Unterraum-Verfahrens ist die Tatsache, dass durch den Einsatz des implementierten Fehlerschätzers die Anzahl der Momente für den jeweiligen Entwicklungspunkt adaptiv bestimmt und gleichzeitig eine vorgegebene maximal zulässige Abweichung eingehalten wird. Diese Möglichkeit bieten die modalen Reduktionsverfahren nicht und der Fehler gegenüber dem Originalsystem ist auch nach der Reduktion nicht zu bestimmen.

## 6.5 Untersuchung der Berechnungseffizienz

### 6.5.1 Allgemeines

Neben dem Aspekt der erreichbaren Approximationsqualität spielt auch die Berechnungseffizienz für die Validierung der eingesetzten Krylov-Unterraum-Verfahren eine Rolle. In diesem Abschnitt werden deshalb die benötigten Berechnungszeiten des konventionellen und des neuen Verfahrens einander gegenüber gestellt, um eine Aussage über die Wirtschaftlichkeit der Anwendung treffen zu können. Den Ausgangspunkt der Untersuchungen bilden die Koeffizientenmatrizen des unreduzierten FEM-Modells. Diese werden vom FEM-Solver aufgestellt und jeweils in einer externen Datei abgespeichert (siehe Bild 5.5). Im Normalfall würde vom Solver auch das Eigenwertproblem gelöst und die modalen Informationen erzeugt werden. Hierfür existieren sehr effiziente Berechnungsroutinen, welche vom FEM-Software-Hersteller<sup>4</sup> stetig weiterentwickelt wurden. Die Krylov-Unterraum-Verfahren hingegen wurden im Rahmen der vorliegenden Arbeit prototypisch in *MATLAB*<sup>®</sup> implementiert und sind auf die

---

<sup>4</sup> Für die Untersuchungen wurde der FEM-Solver MSC.Nastran der Fa. MSC.Software Corporation verwendet

Hauptspeicherverwaltung dieser Software angewiesen. Um eine Vergleichbarkeit der Berechnungszeiten zu gewährleisten, wurden die folgenden Untersuchungen gesamthaft mit *MATLAB*<sup>®</sup> durchgeführt.

### 6.5.2 Bestimmung der Berechnungszeiten

Für die Bestimmung der Berechnungsdauer müssen die benötigten Zeiten der Einzelschritte betrachtet werden, da sich die modalen und die Krylov-Unterraum-basierten Verfahren hinsichtlich ihrer Vorgehensweise unterscheiden. Mit beiden Methoden soll aus den vorliegenden Koeffizientenmatrizen eines FEM-Modells ein niedrig dimensioniertes Systemmodell erzeugt werden, mit dem ein bestimmtes Übertragungsverhalten berechnet werden kann.

Die Dauer für die Bestimmung des Übertragungsverhaltens mit Hilfe eines konventionell erstellten modalen Modells setzt sich demnach aus folgenden Einzelzeiten zusammen:

- Lösung des Eigenwertproblems:  $t_{EWP}$
- Auswahl der berücksichtigten Moden:  $t_{ausw}$   
(manuell oder modales Abschneiden)
- Modaltransformation:  $t_{MT}$
- Berechnung der Übertragungsmatrix  $\mathbf{H}(s)$ :  $t_{TF}$

Damit ergibt sich die Gesamtdauer  $t_{modal}$  zur Berechnung der modal reduzierten Übertragungsfunktion:

$$t_{modal} = t_{EWP} + t_{ausw} + t_{MT} + t_{TF} \quad (6.3)$$

Bei der Anwendung der Krylov-Unterraum-Verfahren errechnet sich die gesamte benötigte Zeit aus der

- automatischen Ordnungsreduktion  $t_{MOR}$  und der
- Berechnung der Übertragungsmatrix  $\mathbf{H}(s)$ :  $t_{TF}$ .

Die zu erwartende Gesamtzeit  $t_{KUV}$  stellt sich entsprechend als Summe dar:

$$t_{KUV} = t_{MOR} + t_{TF} \quad (6.4)$$

Der Betrag von  $t_{TF}$  ist von der Anzahl der berechneten Funktionswerte  $s$  abhängig. In dieser Arbeit wurde das Übertragungsverhalten für alle Systeme bis 500 Hz mit einer Auflösung von 0,2 Hz berechnet. Insgesamt wird die Übertragungsfunktion demnach an 2500 Stellen ausgewertet. Wird nur das

reduzierte Systemmodell erstellt, so entfällt in beiden Fällen die Dauer  $t_{TF}$  zur Berechnung der Übertragungsmatrix  $\mathbf{H}(s)$ .

Für die modale Reduktion kann die Auswahl der berücksichtigten Moden entweder manuell oder mit Hilfe einer Dominanzanalyse erfolgen. Hierfür wird aber i. d. R. immer nur ein bestimmter Frequenzbereich berücksichtigt, indem die hochfrequenten Anteile „abgeschnitten“ und vernachlässigt werden. Da für einen Vergleich der Berechnungszeiten die Dauer eines manuellen Schrittes nicht sinnvoll quantifiziert werden kann, wurde für die Gegenüberstellung stets das modale Abschneiden gewählt. Dies bedeutet, dass im Rahmen dieses Vergleichs für das jeweilige Modell eine definierte Anzahl der niederfrequentesten Eigenmoden berechnet und berücksichtigt wurde. Aus diesem Grund entfällt der Summand  $t_{ausw}$  in Gleichung (6.3) für die folgenden Darstellungen.

### 6.5.3 Vergleich der Berechnungszeiten

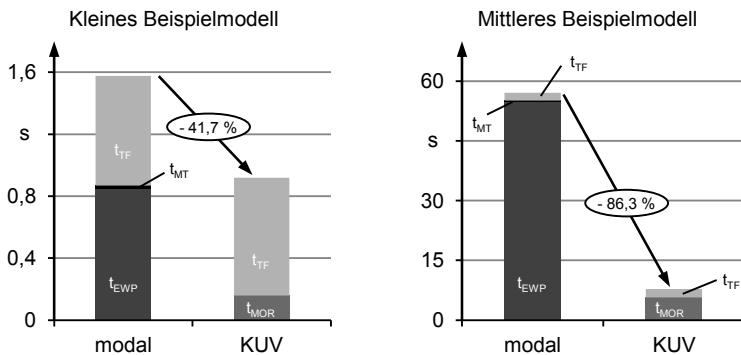
Für den Vergleich der in Abschnitt 6.5.2 definierten Zeiten wurden das kleine Bepielmodell der Vorschubachse und das mittlere Modell der abstahierten Werkzeugmaschinenstruktur herangezogen. Eine Gegenüberstellung anhand des großen Modells war hierfür nicht möglich, da die Lösung des Eigenwertproblems für das System mit fast 90.000 Freiheitsgraden in *MATLAB*<sup>®</sup> trotz des 48-GB-RAM-großen Arbeitsspeichers nicht durchführbar ist.

Analog der in Abschnitt 6.4.2 dargestellten Ergebnisse wurde das kleine Modell der Vorschubachse auch hier von ursprünglich 738 auf die Dimension 20 reduziert. Für die modale Reduktion wurden die kleinsten 20 Eigenfrequenzen und -moden berechnet, mit welchen im Anschluss die Modaltransformation durchgeführt und aus dem resultierenden Systemmodell schließlich die Übertragungsmatrix  $\mathbf{H}$  berechnet wurde. Für den Vergleich erfolgte die Reduktion des Modells mit Hilfe des Krylov-Unterraum-Verfahrens, woraus ein komplexwertiges System der Dimension 10 resultierte, welches nach der Reellifizierung ebenfalls die Dimension 20 hatte. Damit sind auch die Zeiten zur Berechnung der Übertragungsmatrix vergleichbar.

Für das mittlere Modell wurde das selbe Vorgehen angewendet. Dieses wurde mit Hilfe der berechneten, kleinsten 30 Eigenfrequenzen modal reduziert. Für die Krylov-Unterraum-basierte Reduktion wurde ein maximal zulässiger Fehler von  $10^{-3}$  in einem zu approximierenden Frequenzbereich von 0 bis 400 Hz vorgegeben, woraus ebenfalls ein reduziertes reelles Systemmodell der Dimension 30 entstand. Im Anschluss wurde auch für diese beiden reduzierten Modelle die Übertragungsfunktion berechnet und alle benötigten Zeiten wurden dokumentiert (Bild 6.16a).

	Modal reduziert	KUV-reduziert
Kleines Beispielmodell - Vorschubachse	$t_{EWP} = 0,8474 \text{ s}$	$t_{MOR} = 0,1583 \text{ s}$
	$t_{MT} = 0,0206 \text{ s}$	$t_{TF} = 0,7606 \text{ s}$
	$t_{TF} = 0,7088 \text{ s}$	
Mittleres Beispielmodell - Werkzeugmaschinenstruktur	$t_{EWP} = 54,8214 \text{ s}$	$t_{MOR} = 5,7246 \text{ s}$
	$t_{MT} = 0,2977 \text{ s}$	$t_{TF} = 2,0553 \text{ s}$
	$t_{TF} = 1,9484 \text{ s}$	

(a) Benötigte Berechnungszeiten des kleinen und des mittleren Beispielmodells für die Erstellung eines reduzierten Systemmodells



(b) Gegenüberstellung der Berechnungszeiten des kleinen und des mittleren Beispielmodells

Bild 6.16: Vergleich der Berechnungszeiten zur Erstellung eines reduzierten Systemmodells anhand des kleinen Beispielmodells, reduziert auf Dimension 20, und des mittleren Beispielmodells, reduziert auf Dimension 30

Die Gegenüberstellung in Bild 6.16b zeigt, dass das Krylov-Unterraum-Verfahren für die verwendeten Beispielmodelle deutliche Vorteile hinsichtlich der Berechnungszeit gegenüber der modalen Reduktion aufweist. Dies ist zum Großteil der Tatsache geschuldet, dass die Krylov-Unterraum-Verfahren auf die Berechnung des Eigenwertproblems des Originalmodells verzichten können. Die Dauer  $t_{TF}$  zur Berechnung der Übertragungsfunktion ist bei den KUV-reduzierten Modellen geringfügig höher als bei den modal reduzierten. Dies ist damit zu begründen, dass das Gleichungssystem durch die Modaltransformation entkoppelt wird, wodurch es effizienter zu berechnen ist. Bei den kleinen Dimensionen der reduzierten Modelle spielt dies aber eine untergeordnete Rolle. Steht für bestimmte Analysen lediglich die Berechnung definierter Übertragungsfunktionen im Vordergrund, so kann die KUV-Reduktion eine Vorteile hinsichtlich der Berechnungszeit aufweisen.

gungsfunktionen, wie bspw. des Relativnachgiebigkeitsfrequenzgangs am TCP, im Mittelpunkt, so kann auf die Reellifizierung des KUV-reduzierten Systems verzichtet werden, was ein zu berechnendes System der halben Dimension im Vergleich zum reellwertigen System bringt. Dies kann insbesondere bei iterativen Anpassungen einer Maschinenstruktur von Vorteil sein, da hierdurch die Berechnungszeit signifikant verkürzt werden kann.

Für die Auswertungen im Rahmen dieser Arbeit wurde stets auch die Übertragungsmatrix des Originalsystems berechnet. Hier wird der Unterschied zu den reduzierten Modellen besonders deutlich. Für das Modell der Vorschubachse benötigte die Berechnung 6,9 Sekunden und für die abstrahierte Werkzeugmaschine bereits fast 700 Sekunden.

Der Tendenz aus Bild 6.16 folgend steigt auch die Reduktionszeit für das große Beispielmodell nochmals stark an. Bei einem vorgegebenen maximalen Fehler von  $10^{-3}$  und einem Approximationsintervall [0 400] Hz konnte das Krylov-Unterraum-Verfahren bei Anwendung auf das große Beispielmodell das reduzierte System der Dimension 72 innerhalb von 481 Sekunden errechnen. Leider steht hierfür aufgrund der Modellgröße kein Vergleichswert der benötigten Dauer zur Lösung des Eigenwertproblems zur Verfügung. Da das modale Verfahren zur Berechnung der Eigenmoden bei einer Vergrößerung der Modelldimension um den Faktor 6,75 (von 738 auf 4983 FHG) bereits einen Anstieg der Rechendauer um den Faktor 64,7 (von  $t_{EWP} = 0,8474$  s auf  $t_{EWP} = 54,8214$  s) aufwies, ist bei dem weitaus größeren Modell der Portalfräsmaschine (Faktor 17,7 gegenüber dem mittleren Anwendungsbeispiel) eine weitaus längere Berechnungsdauer des modalen Verfahrens gegenüber dem Krylov-Unterraum-Verfahren zu erwarten.

Wie in Abschnitt 6.4.6 bereits angedeutet, hat bei den Krylov-Unterraum-Verfahren allerdings die Anzahl der Eingänge, und bei den zweiseitigen Verfahren auch entsprechend die Anzahl der Ausgänge, einen nicht unerheblichen Einfluss auf die Reduktionszeit. Um dies zu überprüfen und zu konkretisieren, wurden die drei Systeme aus Abschnitt 6.4.6 mit 3, 6 und 9 Eingängen für die Reduktion herangezogen und deren Zeiten miteinander verglichen (Bild 6.17). Für das große Beispielmodell ergab sich bei einer Verdoppelung der Anzahl der Eingänge auch eine Verdoppelung der Reduktionszeit, wobei bei einer weiteren Erhöhung der Eingangszahl ein nahezu lineares Verhalten erkennbar ist.

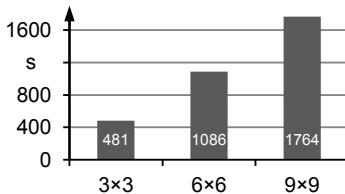


Bild 6.17: Einfluss der Anzahl der Eingänge auf die Reduktionszeit, dargestellt anhand von drei MIMO-Systemen des großen Beispielmodells mit jeweils 3, 6 und 9 Ein- und Ausgängen

#### 6.5.4 Zusammenfassung

Die Untersuchung der benötigten Berechnungszeiten der im Fokus stehenden Reduktionsverfahren zeigt auf, dass die Krylov-Unterraum-Verfahren qualitativ hochwertige reduzierte Modelle mit kleiner Systemdimension in deutlich kürzerer Zeit erzeugen können als dies mit der modalen Reduktion möglich ist. Die Begründung liegt darin, dass das Eigenwertproblem des Originalsystems nicht gelöst werden muss, was den größten numerischen Aufwand während der modalen Reduktion darstellt. Gleichzeitig unterliegt die Berechnungsdauer der Krylov-Unterraum-Verfahren aber etlichen Einflussfaktoren, wie dies bspw. anhand der Anzahl der Ein- und Ausgänge erörtert wurde. Aus diesem Grund ist eine sorgfältige Definition des Simulationsziels nötig, um dem Anwendungsfall entsprechende zweckmäßige Systemmodelle zu verwenden. Dariüber hinaus haben die Untersuchungen ergeben, dass die Wahl der Fehlerschranke ebenfalls Einfluss auf die Berechnungszeiten hat, da mit sinkendem maximal zulässigem Approximationsfehler unter Umständen mehrere Iterationsschleifen während der Reduktion durchlaufen werden müssen, um die Fehlerschranke einhalten zu können.

Wenngleich an dieser Stelle keine quantitativen Aussagen zu Werten und Grenzen getroffen werden können, gelten dennoch folgende qualitative Empfehlungen: Insbesondere für große Modelle wird empfohlen, einen größeren max. Fehler zuzulassen, sofern die Anzahl der Eingänge gering ist. Bei steigender Anzahl von Eingängen sollte der max. zulässige Fehler reduziert werden, um alle Übertragungspfade gut approximieren zu können, auch wenn sich dies negativ auf die Berechnungszeit auswirkt.

In Bezug auf einen realen Entwicklungsprozess, der häufig mehrere Wochen oder länger dauert, spielen die Einsparungen im Sekundenbereich für die Modellreduktion natürlich eine untergeordnete Rolle. Für die Bewertung darf

allerdings nicht allein die Reduktionsdauer betrachtet werden, sondern es muss der gesamte Ablauf des in Kapitel 5 dargestellten Vorgehens bewertet werden. Diesbezüglich leisten die Krylov-Unterraum-Verfahren einen Beitrag, indem die Reduktionsdauer reduziert wird. Zusammen mit den Vorteilen der Automatisierbarkeit, der Einsatzmöglichkeit von Fehlerschätzern und der Anwendbarkeit von automatischen Vernetzern wird der vollständige Mehrwert des Krylov-Unterraum-Verfahrens sichtbar.

Da es sich hierbei um ein neues Verfahren zur Simulation von Werkzeugmaschinen handelt, welches in der vorliegenden Arbeit prototypisch in *MATLAB/Simulink*<sup>®</sup> umgesetzt wurde, ist zum jetzigen Zeitpunkt noch ein entsprechender Einarbeitungsaufwand in die Theorie und die Abläufe der Reduktionsroutinen nötig. Zudem muss, falls noch nicht in der Berechnungsabteilung vorhanden, die entsprechende Software (vorzugsweise *MATLAB/Simulink*<sup>®</sup>) beschafft werden, um das Vorgehen in den bestehenden Berechnungsablauf zu integrieren. Diese Aufwände reduzieren sich allerdings stark, sobald das Verfahren von einem FEM-Softwareanbieter aufgegriffen, professionell implementiert und schließlich als Zusatzmodul der FEM-Softwareumgebung mit entsprechender Anleitung angeboten wird.

### 6.6 Reduktion von Systemen mit nicht-proportionaler Dämpfungsmatrix

#### 6.6.1 Allgemeines

Mit den vorangegangenen Beispielen wurde gezeigt, dass mit den automatischen Krylov-Unterraum-basierten Reduktionsverfahren qualitativ hochwertige Systemmodelle auf effiziente Weise erzeugt werden können. Hierfür kamen bislang die Krylov-Unterräume erster Ordnung zum Einsatz, welche auf proportional gedämpfte FEM-Modelle angewendet wurden. Wie bereits in Abschnitt 2.4.4 erwähnt, bildet der proportionale Ansatz die Realität nicht unbedingt hinreichend genau ab. An dieser Stelle werden deshalb FEM-Modelle mit lokalen viskosen Dämpfungselementen (vgl. Abschnitt 4.5.1) sowie mit berücksichtiger Strukturdämpfung (vgl. Abschnitt 4.5.2) betrachtet. Um derartige Modelle auf konventionelle Weise mit dem modalen Ansatz zu reduzieren, muss das quadratische Eigenwertproblem gelöst werden. Als Alternative kann auch die aus dem generalisierten Eigenwertproblem des ungedämpften Systems resultierende reelle Eigenvektormatrix für die Modaltransformation des gedämpften Systems angewendet werden. Auf diese Weise lässt sich die Dämpfungsmatrix dann aber nicht entkoppeln. In beiden Fällen muss aber das Eigenwertproblem gelöst

werden, was, wie in Abschnitt 6.5 gezeigt wurde, einen erheblichen numerischen Aufwand bedeutet.

Das in Abschnitt 4.5.3 vorgestellte Verfahren auf Basis von Krylov-Unterräumen 2. Ordnung ist geeignet, auch beliebig gedämpfte Systeme 2. Ordnung zu reduzieren. Im Folgenden wird nachgewiesen, dass es damit möglich ist, FEM-Modelle von Werkzeugmaschinen mit lokalen Dämpfungselementen in ein stabiles reduziertes System umzuwandeln. Hierfür wurde das große Beispielmodell der Portalfräsmaschine herangezogen und analog Bild 5.4 mit Dämpfungselementen in den Verbindungskomponenten wie den Linearführungen, Verschraubungen und Kugelgewindetrieben versehen. Darüber hinaus wurde in den Materialeigenschaften des FEM-Modells Strukturdämpfung berücksichtigt. Die resultierenden Koeffizientenmatrizen der Massen-, der Dämpfungs- und der Steifigkeitsverteilung wurden, wie bei den vorangegangenen Untersuchungen vom Solver aufgestellt und ausgeleitet. Als Ein- und Ausgänge des Systems 2. Ordnung wurden wiederum die Knoten am TCP der Werkzeugmaschine mit den drei kartesischen translatorischen Raumrichtungen x, y und z verwendet, sodass ein  $(3 \times 3)$ -MIMO-System gegeben ist (vgl. Tabelle 6.1).

### 6.6.2 Darstellung der Reduktionsergebnisse

Für die automatische Reduktion des nicht-proportional gedämpften FEM-Modells der Portalfräsmaschine wurden die in Bild 4.23 vorgestellten Krylov-Unterräume 2. Ordnung verwendet. Als Parameter wurden das zu approximierende Frequenzintervall von 0 bis 500 Hz, ein maximal zulässiger relativer Fehler in den Entwicklungspunkten von  $10^{-5}$  und standardmäßig 5 Anfangsentwicklungsstellen vorgegeben. Damit entsteht, analog der Reduktion in Abschnitt 6.4.3, ein System, welches nach der Reellifizierung die Dimension 72 hat. Hierfür wurden 12 Entwicklungsstellen gefunden, in denen je ein Moment abgeglichen wurde. Es fällt auf, dass aufgrund der geringen Systemdämpfung, wie sie in Werkzeugmaschinen üblich ist, der Frequenzgang schwieriger zu approximieren ist und die Einhaltung der Fehlerschranke erstmals nicht über den vorgegebenen Frequenzbereich garantiert werden konnte (Bild 6.18). Ein Grund hierfür ist, dass die Fehlerschätzung nur lokale Gültigkeit hat, da der Momentenfehler jeweils in den Entwicklungspunkten ausgewertet wird (SOPPA 2011). In diesen Punkten wird aufgrund der Momentenanpassung stets eine sehr gute Übereinstimmung erreicht, im Frequenzbereich zwischen den Punkten kann es aber zu einem starken Anstieg des Fehlers kommen.

Eine Analyse der reduzierten Systeme ergab, dass es während der automatischen Reduktion der bislang in dieser Arbeit vorgestellten Modelle stets ausreichte, ein Moment pro Entwicklungspunkt zur Übereinstimmung zu bringen, um die Fehlerschranke einzuhalten. Bei nur einem abgeglichenen Moment unterscheiden

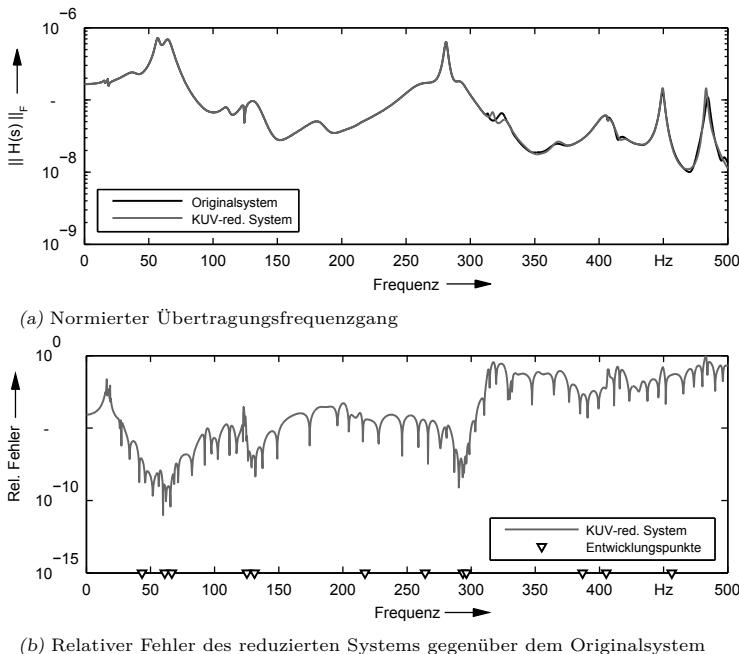


Bild 6.18: Reduktionsergebnis bei Anwendung des Verfahrens auf Basis der Krylov-Unterräume 2. Ordnung, reduziert auf die Dimension 72

sich die Krylov-Unterräume erster und zweiter Ordnung aber noch nicht, da in beiden Fällen lediglich der Startblock  $\mathbf{Q}$  zur Bildung der Projektionsmatrix  $\mathbf{V}$  verwendet wird (vgl. Bild A.4 und 4.23).

Um den Unterschied der Reduktionsergebnisse zwischen den Krylov-Unterräumen 1. und 2. Ordnung deutlich zu machen, wurde das nicht-proportional gedämpfte Beispielmodell der Portalfräsmaschine mit 7 fest vorgegebenen Entwicklungspunkten (siehe Bild 6.19), in welchen je 4 Momente abgeglichen wurden, reduziert. Für dieses Modell mit 3 Eingängen resultiert daher ein komplexwertiges System der Dimension  $7 \cdot 4 \cdot 3 = 84$ . Wie Bild 6.19 zu entnehmen ist, bringt die Reduktion mit den Krylov-Unterräumen 2. Ordnung die besseren Approximationseigenschaften, wenngleich die Unterschiede durchaus gering sind. An dieser Stelle ist zu erwähnen, dass der Grad der Dämpfung großen Einfluss auf die Ergebnisqualität der mit Krylov-Unterräumen 2. Ordnung reduzierten Modelle hat. Insbesondere bei schwach gedämpften Systemen erzielen die Krylov-Unterräume 1. Ordnung teilweise bessere Ergebnisse. Nach SOPPA

(2011) kann aber mit den Krylov-Unterräumen 1. Ordnung bei Anwendung auf nicht-proportional gedämpfte Systeme die Stabilitätserhaltung des Systems nicht garantiert werden.

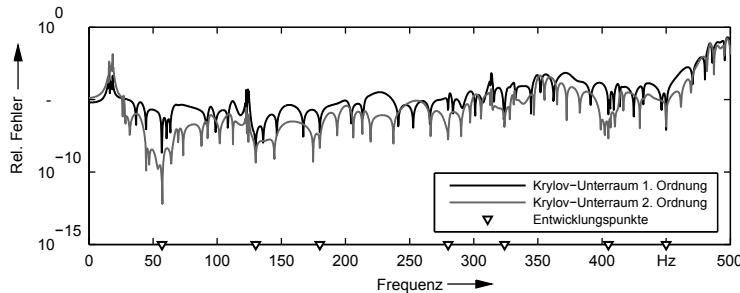


Bild 6.19: Relative Fehler der reduzierten Systeme (Dim. 84) bei Anwendung der Krylov-Unterräume 1. Ordnung und 2. Ordnung

Daher gibt es zwei Möglichkeiten, die Approximationsergebnisse zu verbessern:

- Eine Abwandlung der Vorgehensweise zur adaptiven Bestimmung der Stufe des Krylovraumes; für denjenigen Punkt, der den größten geschätzten Fehler aufweist, werden bei dieser Variante jeweils drei statt nur einem Moment abgeglichen, bevor der nächste Entwicklungspunkt bestimmt wird. Auf diese Weise wird abgesichert, dass die Projektionsmatrix auf Basis der Krylov-Unterräume 2. Ordnung erstellt wird.
- Die Verwendung von mehr Anfangsentwicklungsstellen, die in der ersten Iteration äquidistant über den definierten Frequenzbereich verteilt sind; daraus resultiert eine größere Dimension des ersten reduzierten Modells, das wiederum entsprechend mehr Eigenwerte besitzt, die in der nächsten Iteration als potenzielle Entwicklungspunkte zur Verfügung stehen.

Für die Validierung wurden beide Varianten herangezogen. Im ersten Fall werden zur Erstellung des reduzierten Modells 14 relevante Entwicklungspunkte im Frequenzbereich identifiziert, für die jeweils ein Krylov-Unterraum der Stufe 3 verwendet wurde. Auf diese Weise entsteht nach der Reellifizierung ein System der Dimension 252, was deutlich größer als das in Bild 6.18 verwendete ist. Mit dieser Systemdimension lässt sich die Fehlerschranke einhalten und es werden sehr gute Approximationsergebnisse erzielt (Bild 6.20).

Bei der zweiten Variante wurden anstelle der standardmäßigen 5 Anfangsentwicklungsstellen 10 verwendet. Dadurch stehen in der ersten Folgeiteration

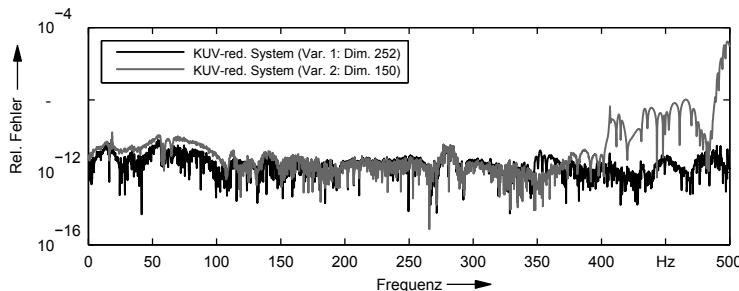


Bild 6.20: Vergleich der Varianten „Erhöhung der Momentenanzahl pro EP“ (Var.1) und „Erhöhung der Anzahl der Anfangsentwickelpunkte“ (Var. 2) anhand der relativen Fehler gegenüber dem Originalsystem

mehr Entwicklungsstellen zur Auswahl. Bei dieser Reduktion wurden 25 relevante Stellen gefunden, für die jeweils ein Moment zur Übereinstimmung gebracht wurde. Daraus resultiert eine Systemdimension von 75 und von 150 nach der Reellifizierung. In Bild 6.20 ist zu erkennen, dass diese Variante ähnliche gute Reduktionsergebnisse hervorbringt.

Um eine Empfehlung für eine der beiden Varianten abgeben zu können, wurden zusätzlich die benötigten Berechnungszeiten gespeichert. Aufgrund der höheren Anzahl von Entwicklungspunkten bzw. Momenten verlängern sich Berechnungszeiten bei beiden Varianten. Während die Reduktion mit der zweiten Variante 1892 s in Anspruch nahm, wurden für die erste Variante 5518 s, d. h. annähernd die dreifache Zeit benötigt. Aus diesem Grund sind mehr Anfangsentwicklungsstellen einer Erhöhung der Momente vorzuziehen.

### 6.6.3 Schlussfolgerung

In diesem Abschnitt wurde gezeigt, dass mit den vorgestellten Krylov-Unterraum-Verfahren auch nicht-proportional gedämpfte FEM-Modelle reduziert werden können und somit auf die Lösung des quadratischen Eigenwertproblems zur Berechnung der komplexen Eigenwerte und -vektoren verzichtet werden kann. Dies ermöglicht künftig die Berücksichtigung lokaler Dämpfungs-effekte in der Simulation des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen. Darüber hinaus hat sich erwiesen, dass für die hier angewendeten schwach gedämpften, linearen Systeme die Verfahren auf Basis der Krylov-Unterräume 1. Ordnung ebenfalls sehr gute Approximationseigenschaften und gleichzeitig sehr geringe Rechenzeiten aufweisen, sofern genügend Entwicklungspunkte verwendet werden.

An dieser Stelle ist keine Aussage möglich, ab welchem Grad der Dämpfung im System die Verwendung der Krylov-Unterräume 2. Ordnung zwingend erforderlich ist, um eine gute Approximationsqualität zu gewährleisten, da dies nicht im Fokus der Untersuchungen der vorliegenden Arbeit stand. Beispielsweise können durch zusätzliche Dämpfungssysteme, die das dynamische Verhalten von Werkzeugmaschinen verbessern sollen, erheblich größere Dämpfungsmaße auftreten als dies in den hier untersuchten Modellen der Fall ist, sodass diesbezüglich weiterer Forschungsbedarf besteht (siehe Kapitel 7).

### 6.7 Einsatz ordnungsreduzierter Modelle in der gekoppelten Simulation

Wie in Kapitel 5 dargelegt wurde, stellt die gekoppelte Simulation, neben der Analyse des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen anhand von Frequenzgängen, ein weiteres Mittel zur Beurteilung des Maschinenentwurfs in den Entwicklungsphasen dar. Die Eignung der mit den Krylov-Unterraum-Verfahren reduzierten Modelle für Analysen im Zeitbereich und die gekoppelte Simulation des Strukturmodells mit dem Regelungstechnischen Modell der Vorschubachsen wurde in (BONIN ET AL. 2011a) und (BONIN ET AL. 2011b) bereits exemplarisch festgestellt (rechter Pfad in Bild 5.10, S. 151). Für die gekoppelte Struktur-Prozess-Simulation auf Basis KUV-reduzierter Systemmodelle (mittlerer Pfad in Bild 5.10) gibt es bislang aber keine Erkenntnisse.

An dieser Stelle wird deshalb ein Krylov-Unterraum-reduziertes System des großen Beispielmodells in Kopplung mit einem Zerspankraftmodell eines Fräsprozesses beschrieben, um die Wechselwirkungen zwischen der Maschinenstruktur und dem Bearbeitungsprozess zu erläutern. Hierfür kam das in Abschnitt 6.6 verwendete Modell mit lokal modellierten viskosen Dämpfungs-elementen zum Einsatz. Die Strukturdämpfung wurde für diese Simulation vernachlässigt, da diese im Zeitbereich physikalisch nicht sinnvoll ist (vgl. Abschnitt 2.4.4). Für die automatische Reduktion wurden 10 Anfangsentwicklungspunkte, eine relative Fehlerschranke von  $10^{-5}$  sowie ein zu approximierendes Frequenz-intervall von 0 bis 500 Hz vorgegeben. Daraus resultierte ein reduziertes System der Dimension 138, was einem Reduktionsgrad von 99.84 % entspricht. Dieses Modell zweiter Ordnung wurde zunächst in ein Zustandsraummodell überführt und, wie in Bild 2.3 dargestellt, mit dem Modell eines Bearbeitungsprozesses in der Berechnungsumgebung *Simulink*® gekoppelt. Auf diese Weise werden die durch die Kräfte hervorgerufenen Relativverlagerungen am TCP der Werkzeugmaschinenstruktur in der Zerspankraftbestimmung berücksichtigt.

Als Bearbeitungsprozess diente ein Stirn-Umfangsfräsprozess mit einem Vorschub in x-Richtung der Maschine. In der Simulation wurde ein 3-Schneiden-Fräser aus Vollhartmetall (VHM) verwendet und die Berechnung der Zerspanungskräfte basierte dabei auf dem Ansatz von ALTINTAS (2000). Tabelle 6.4 listet die verwendeten Zerspanungsparameter und Eingriffsgrößen.

Werkzeug	Prozess
Schneiden: $z = 3$	Drehzahl: $n = 3000 \text{ min}^{-1}$
Durchmesser: $d = 16 \text{ mm}$	Vorschub pro Zahn: $f_z = 0,15 \text{ mm}$
Drallwinkel: $\beta = 30^\circ$	Arbeitseingriff: $a_e = 3 \text{ mm}$
	Schnitttiefe: $a_p = 4 \text{ bis } 9 \text{ mm}$
Werkstoff	Vergütungsstahl 1.0503 (C45)

Tabelle 6.4: Werkzeug- und Prozessparameter für die Simulation der Bearbeitungskräfte

Für die Versuche wurden unterschiedliche Schnitttiefen von 4 bis 9 mm simuliert, während die übrigen Parameter konstant blieben. Dabei war festzustellen, dass der Prozess bei geringer Schnitttiefe (bis einschließlich 6 mm) stabil oder grenzstabil verläuft. In Bild 6.21 ist dies exemplarisch für die Schnitttiefe  $a_p = 4 \text{ mm}$  dargestellt. Die Zerspanungskräfte (a) zeigten dabei einen typischen periodischen Verlauf. Im vergrößerten Ausschnitt sind die Kraftkomponenten zu erkennen. Da in diesem Fall der Arbeitseingriff  $a_e$  kleiner als der Radius des Fräzers ist, befindet sich stets nur eine der drei Schneiden im Eingriff. Auf diese Weise wird die Maschinenstruktur periodisch mit der Schneideneintrittsfrequenz angeregt. Hieraus resultiert eine entsprechende Schwingungsantwort am TCP der Maschine (Bild 6.21b). In x- und y-Richtung kommt es daher zu einer kleinen, statischen Abdrängung aufgrund der Bearbeitungskräfte.

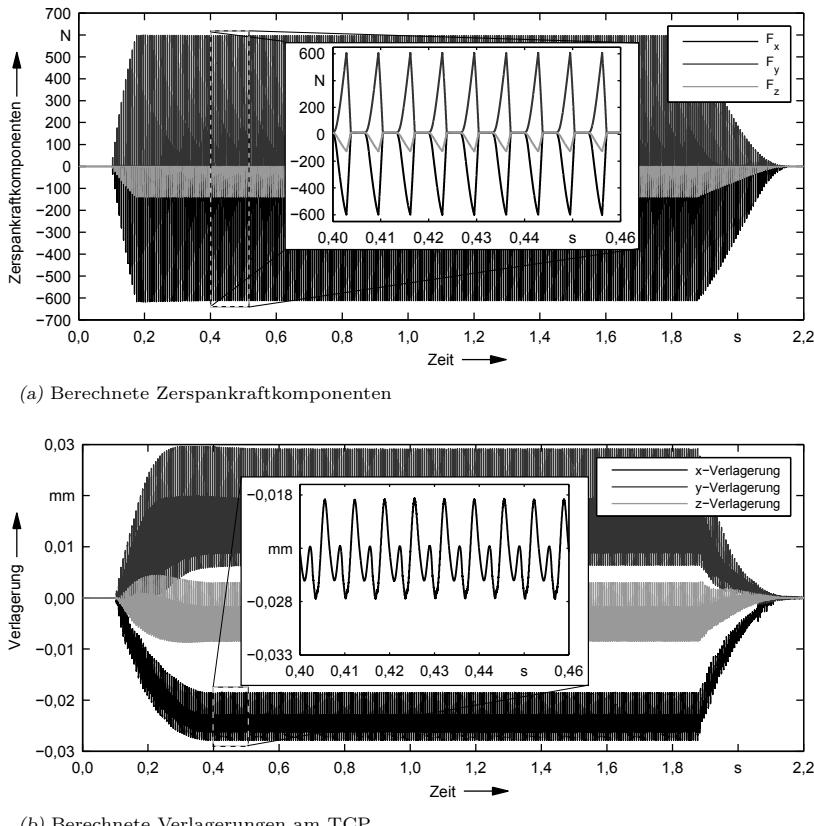
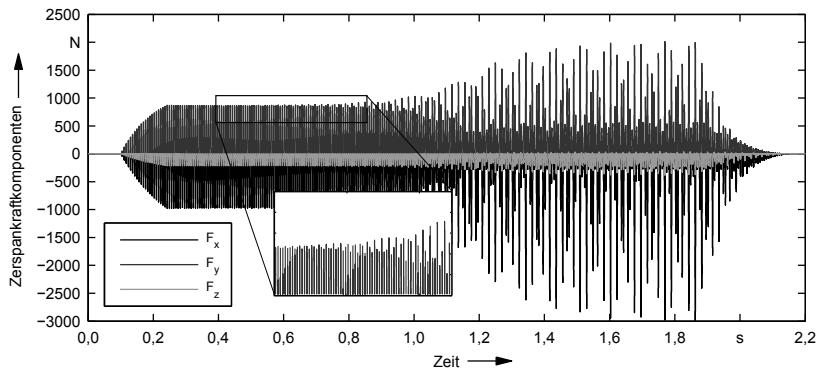


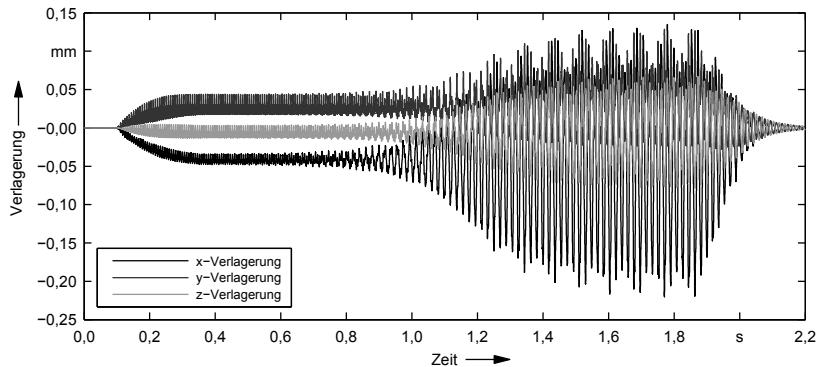
Bild 6.21: Bearbeitungskräfte und Strukturantwort während des stabilen Zerspanprozesses mit der Schnitttiefe  $a_p = 4 \text{ mm}$

Mit zunehmender Schnitttiefe steigen die Bearbeitungskräfte an, wodurch auch die Maschine zu Schwingungen mit höheren Amplituden angeregt wird. In Bild 6.22 ist zu erkennen, dass die Bearbeitung bei der eingestellten Schnitttiefe  $a_p = 7 \text{ mm}$  instabil wird. Der vergrößerte Ausschnitt zeigt, dass die Kräfte nach dem Eintritt ins Werkstück zunächst ansteigen. Gleichzeitig kommt es zu einer Variation der Amplituden, was auf eine Spanungsdickenmodulation zurückzuführen ist. Dieser instabile Zustand wird als *Rattern* bezeichnet. Die Amplituden der Kräfte und die resultierenden Verlagerungen steigen dabei weiter an, bis die Schneiden zeitweise außer Eingriff kommen. Dieser Effekt ist

die Erklärung, warum in der Simulation sowohl die Amplituden der Kraftkomponenten als auch die Verlagerungen sich asymptotisch einem maximalen Wert annähern. In der Realität kann dieses Aufschwingen aufgrund eines instabilen Bearbeitungsprozesses im schlimmsten Fall zur Zerstörung der Maschine führen.



(a) Berechnete Zerspankraftkomponenten



(b) Berechnete Verlagerungen am TCP

Bild 6.22: Bearbeitungskräfte und Strukturantwort während des instabilen Zerspanprozesses mit der Schnitttiefe  $a_p = 7\text{ mm}$

Besonders deutlich werden die Simulationsergebnisse der beiden exemplarisch durchgeführten Bearbeitungsvarianten nach der Transformation der Schwingungsamplituden der Verlagerung am TCP in x-Richtung in den Frequenzbereich. Die Gegenüberstellung der Spektren in Bild 6.23 zeigt, dass während der stabilen Bearbeitung die Schneideneintrittsfrequenz und deren erste Harmonische dominant sind. Beim instabilen Schnitt treten diese in den Hintergrund und die Maschine beginnt dominant in einer ihrer Eigenfrequenzen oder in der Nähe einer solchen mit deutlich höherer Amplitude zu schwingen. An dieser Stelle sei auf die unterschiedliche Skalierung der Ordinate in beiden Darstellungen hingewiesen.

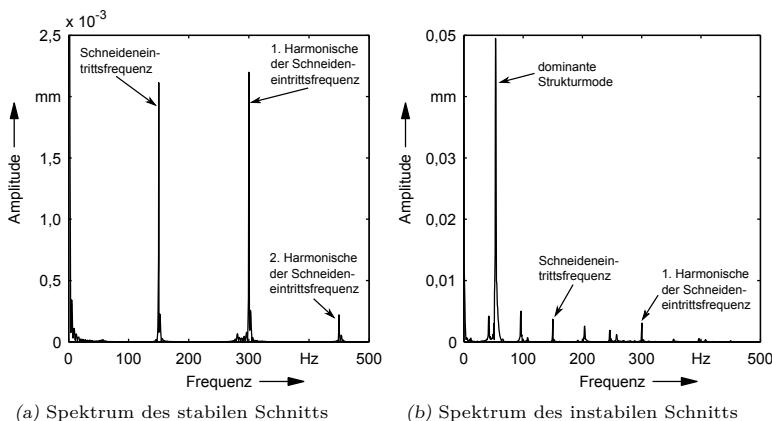


Bild 6.23: Amplitudenspektren der simulierten Schwingungen am TCP für den stabilen und den instabilen Prozess

Die Untersuchungen der Prozess-Struktur-Wechselwirkungen haben ergeben, dass sich die Krylov-Unterraum-reduzierten Modelle einfach in die gekoppelte Simulation integrieren lassen und somit den Anforderungen der Zeitbereichssimulation nachkommen. Auf diese Weise können bspw. diverse Kombinationen von Bearbeitungsparametern in ihrer Wirkung auf das Maschinenverhalten im Betrieb effizient berechnet und auch Stabilitätskarten erzeugt werden.

Damit wurde die Möglichkeit geschaffen, FEM-Modelle von Werkzeugmaschinen mit lokal modellierten Dämpfungselementen hinsichtlich der ratterfrei erreichbaren Zerspanungsleistung zu untersuchen. Gleichermaßen gilt für die Analyse der Wechselwirkungen zwischen der Struktur und den geregelten Vorschubachsen, sofern eine gekoppelte Mechatroniksimulation durchgeführt wird. Da an

dieser Stelle nur der prinzipielle Nachweis geführt werden sollte, wird nicht näher auf letztere eingegangen.

### 6.8 Bewertung des Reduktionsverfahrens und Fazit

In diesem Kapitel wurde die Anwendung der vorgestellten Reduktionsverfahren auf drei FEM-Modelle unterschiedlicher Dimension beschrieben und diese wurden auf ihre Eignung für den Einsatz in den Entwicklungsphasen von Werkzeugmaschinen untersucht. Hierbei resultierte, dass die Krylov-Unterraum-reduzierten Modelle im Vergleich zu konventionell modal reduzierten stets bessere Approximationsqualitäten im gewählten Frequenzbereich aufweisen (Abschnitt 6.4). Zudem zeigte ein Vergleich der Berechnungszeiten, dass die Erstellung eines KUV-reduzierten Systemmodells deutlich schneller ist als die eines konventionellen modalen Systems, da auf die Lösung des Eigenwertproblems des unreduzierten Systems verzichtet werden kann (vgl. Abschnitt 6.5). Als Besonderheit des neuen Verfahrens ist zu nennen, dass sich damit erstmals auch große Systeme mit lokal modellierten Dämpfungseffekten in ihrer Dimension reduzieren lassen, die dann bspw. in der gekoppelten Simulation eingesetzt werden können.

Der Vergleich mit den in Abschnitt 4.2 gestellten Anforderungen zeigt, dass das neue Reduktionsverfahren diese in allen Belangen erfüllt. In den Abschnitten 4.4.2 und 4.5.3 wurde vorgestellt, wie die Krylov-Unterraum-Sequenzen gestaltet sein müssen, um das Reduktionsverfahren direkt auf DGL-Systeme 2. Ordnung anwenden zu können, was bei allen in der Arbeit dargestellten Ergebnissen geschah. Gleichermaßen gilt für die Block-Version des Arnoldi-Algorithmus, die in den Verfahren implementiert ist, um MIMO-Systeme, wie sie bei der Simulation von Werkzeugmaschinen meist auftreten, effizient reduzieren zu können.

Auf diese Weise lässt sich mit den reduzierten Modellen das Systemverhalten des Originalmodells hochgenau abbilden. Dies liegt daran, dass während der automatischen Reduktion die Entwicklungspunkte in einem iterativen Prozess so gewählt werden, dass sie gegen die Eigenwerte des Originalsystems konvergieren. Die Systemeigenschaften bleiben auf diese Weise erhalten, was für die Abbildung des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen elementar ist. Gleichzeitig werden die Starrkörpermoden der Vorschubachsen, falls vorhanden, ebenfalls berücksichtigt. Neben der Tatsache, dass die Approximationsqualität der KUV-reduzierten Systeme höher als die der modal reduzierten ist, liegt der entscheidende Vorteil der neuen Verfahren aber in der Automatisierung. Durch den Einsatz von Fehlerschätzern kann diese hohe Qualität gewährleistet werden,

ohne dass die Expertise eines Anwenders während der Reduktion erforderlich ist.

Einen weiteren Vorteil gegenüber den konventionellen modalen Verfahren besitzen die Krylov-Unterraum-Verfahren durch die Eigenschaft, auch FEM-Modelle mit lokal modellierten, viskosen Dämpfungseffekten reduzieren zu können. Damit eröffnen sich in der Entwicklung von Werkzeugmaschinen neue Möglichkeiten, da bereits in den frühen Phasen Sensibilitätsuntersuchungen hinsichtlich der Dämpfungsverteilung in der Maschine angestellt werden können.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass mit den vorgestellten Krylov-Unterraum-Verfahren ein wertvolles Instrument für die effiziente Reduktion von hochdimensionierten linearen FEM-Modellen von Werkzeugmaschinen präsentiert wurde, welches der Absicherung von Produkteigenschaften anhand von virtuellen Prototypen dient. Durch die automatische Systembewertung können Fehler reduziert und Variationsrechnungen einfach durchgeführt werden. Mit dem in Kapitel 5 entwickelten Vorgehensmodell wird die Integration der Reduktionsverfahren in die entwicklungsbegleitende Simulation von Werkzeugmaschinen vereinfacht und der zielgerichtete Einsatz sichergestellt.



## 7 Zusammenfassung und Ausblick

Der Einsatz von Simulationsmethoden während der Entwicklungsphasen von Werkzeugmaschinen hat in den letzten Jahren stetig zugenommen. Für die Abbildung der mechanischen Maschinenstruktur hat sich die Finite-Elemente-Methode dabei zu einem Standardverfahren etabliert. Da das dynamische Verhalten einer Werkzeugmaschine durch die Wechselwirkungen zwischen der Struktur, den geregelten elektromechanischen Vorschubantrieben und dem Bearbeitungsprozess beeinflusst wird, ist es sinnvoll, das Gesamtsystem durch eine gekoppelte Simulation der Teilsysteme zu berechnen und zu analysieren. Hierfür muss das aus der FEM resultierende große Gleichungssystem in seiner Dimension reduziert werden, um die Berechnung durchführen zu können.

In der vorliegenden Arbeit wurde hierfür ein integriertes Verfahren zur Unterstützung der Berechnung großer FEM-Modelle im Rahmen der entwicklungsbegleitenden Simulation von Werkzeugmaschinen präsentiert. Hierfür kamen erstmals sog. Krylov-Unterraum-Verfahren für die Ordnungsreduktion zum Einsatz, um das hoch dimensionierte Differenzialgleichungssystem, welches das Strukturverhalten der Maschinenstruktur beschreibt, in ein kleines und schnell zu berechnendes Systemmodell zu überführen. Bislang waren die Entwickler von Werkzeugmaschinen auf den konventionellen modalen Ansatz zur Reduktion der Freiheitsgrade des Maschinenmodells angewiesen. Hierfür musste zunächst das Eigenwertproblem gelöst werden, um das Gleichungssystem auf Basis der berechneten Modalmatrix, welche die dominanten Schwingungsformen enthält, in den modalen Raum zu transformieren und somit in seiner Ordnung zu reduzieren. Dabei stellt insbesondere die Identifikation der dominanten Moden die größte Schwierigkeit dar. Sie erfordert sehr viel Erfahrung des Anwenders. In der Regel werden deshalb in der Praxis lediglich die niederfrequenten Moden, welche einen für relevant bestimmten Frequenzbereich abdecken, verwendet. Die hochfrequenten Informationen werden vernachlässigt und die bekannte Abweichung der statischen Steifigkeit in Kauf genommen. Ein weiterer Nachteil der modalen Reduktion ist dabei, dass der entstandene Fehler unbekannt bleibt. In dieser Arbeit kamen deshalb die aus der Regelungstechnik und Kontrolltheorie bekannten Krylov-Unterraum-Verfahren zum Einsatz. Diese weisen gegenüber den modalen Methoden einige Vorteile auf, da sie gut automatisierbar sind, eine verlässliche Systemanalyse auf Basis mathematischer Verfahren bieten und durch den Einsatz von Fehlerschätzern geeignet sind, vorgegebene maximal zulässige Abweichungen vom Originalsystem einzuhalten.

In einem ersten Schritt wurden die Krylov-Unterraum-Verfahren genau analysiert und die Einflussfaktoren auf die Ergebnisqualität untersucht. Daraus

konnten die Anforderungen, die während der Anwendung bzw. der Auslegung des Ordnungsreduktionsverfahrens auftreten, abgeleitet werden. Mit Hilfe des gewonnenen Verständnisses für die mathematischen Verfahren konnte eine Adaption abgeleitet werden, mit der proportional gedämpfte Maschinenmodelle effizient und automatisiert reduziert werden können. Einen besonderen Mehrwert bietet die Erweiterung des Reduktionsverfahrens um die Möglichkeit, auch beliebig gedämpfte Modelle, d. h. wenn lokale Dämpfungseffekte berücksichtigt werden, zu reduzieren.

Um die neuen Reduktionsverfahren auch in der Praxis einsetzen zu können, wurde im nächsten Schritt ein Vorgehensmodell zur Integration der Verfahren in die entwicklungsbegleitende Simulation entwickelt. Hierbei wurden die Randbedingungen und Anforderungen analysiert und dokumentiert und in der Konzeption berücksichtigt. Dieses Vorgehensmodell legt somit einen wichtigen Baustein an der Schnittstelle zwischen den Disziplinen der Mathematik und den Ingenieurwissenschaften. Damit können die Entwicklungingenieure die mathematischen Verfahren zur Ordnungsreduktion zukünftig zielgerichtet einsetzen, ohne sich zunächst Expertenwissen bzgl. des Reduktionsverfahrens aus der Disziplin der Mathematik aneignen zu müssen.

Schließlich wurde der Einsatz des neuen Verfahrens ausführlich getestet und die Ergebnisse wurden analysiert. Hierfür wurden unterschiedliche Beispielmodelle für die Validierung des Reduktionsverfahrens herangezogen. Die Ergebnisse zeigen, dass mit den vorgestellten Krylov-Unterraum-Verfahren das Originalsystem sehr gut approximiert wird und dass die Erstellung des Systemmodells, verglichen mit den modalen Verfahren, auch schneller durchzuführen ist. Die Systemeigenschaften des Originalmodells bleiben dabei stets erhalten, sodass die reduzierten Systeme in der gekoppelten Simulation eingesetzt werden können. Als größter Vorteil ist sicherlich die Automatisierung des Verfahrens zu nennen, da auf diese Weise eine maximale zulässige Abweichung eingehalten werden kann. Abschließend wurde die Reduktion auf ein FEM-Modell einer Portalfräsmaschine, welches lokale Dämpfungselemente in den Verbindungs komponenten enthielt, angewendet und eine gekoppelte Simulation mit einem Zerspankraftmodell durchgeführt. Die Ergebnisse beleuchten das große Potenzial der Effizienz- und Approximationsqualitätssteigerung, welches durch das in dieser Arbeit vorgestellte integrierte Verfahren zur Verfügung gestellt wird.

Die vorliegende Arbeit leistet somit einen Beitrag zur Verbesserung der entwicklungsbegleitenden Simulation von Werkzeugmaschinen. Durch den Einsatz der Krylov-Unterraum-Verfahren wurden zudem neue Möglichkeiten geschaffen, das komplexe Dämpfungsverhalten der Maschinen besser in der Berechnung berücksichtigen zu können. Die vorgestellten Verfahren und Methoden dieser Arbeit wurden für die Untersuchungen prototypisch in der Softwareumgebung

---

*MATLAB/Simulink*<sup>®</sup> implementiert und umgesetzt. Für einen wirtschaftlichen Einsatz in realen Entwicklungsprozessen bedarf es aber einer professionellen Implementierung und Einbindung in entsprechende FEM-Programme. Es ist zu erwarten, dass damit eine weitere Verkürzung der Rechenzeiten erreichbar ist.

Die Verbesserung von Berechnungs- und Simulationsmethoden für den Einsatz in der Entwicklung ist damit aber noch nicht abgeschlossen und bietet noch Potenzial für weitere Forschungsaktivitäten. Werkzeugmaschinenstrukturen können je nach Größe und Beschaffenheit der Struktur ein im Arbeitsraum veränderliches Steifigkeitsverhalten aufweisen. Dies kann dazu führen, dass bestimmte Bearbeitungsprozesse nur in ausgewählten Achspositionen stabil ablaufen können. Für die Berücksichtigung dieses positionsabhängigen Strukturverhaltens wurde in der Vergangenheit die sog. Arbeitsraumstudie vorgeschlagen (siehe z. B. SCHWARZ 2010), wofür aber für jede betrachtete Position im Arbeitsraum ein FEM-Modell erstellt und berechnet werden muss. Im Bereich der Reduktionsverfahren gibt es seit einigen Jahren Forschungsaktivitäten zur sog. *parametrischen* Modellreduktion (siehe hierzu z. B. PANZER ET AL. 2010, BAUR ET AL. 2011). Mit diesen Verfahren ist es möglich, Gleichungssysteme mit veränderlichen und von bestimmten Parametern abhängigen Koeffizientenmatrizen zu reduzieren. Übertragen auf Werkzeugmaschinen können bspw. bestimmte Achspositionen parametrisiert modelliert werden, wodurch sich eine parameterabhängige Massen- und Steifigkeitsverteilung ergibt. Falls es möglich wird, derartige Systeme zu reduzieren, könnten die Untersuchungen des Arbeitsraumes auf Basis des reduzierten Modells stattfinden, ohne dass für jede Position ein vollständiges FEM-Modell berechnet werden müsste. Der Ansatz der parametrischen Modellreduktion ließe sich auch auf Untersuchungen verschiedener Steifigkeiten von Linearführungen oder auch von Wandstärken kritischer Strukturauteile ausweiten.

Darüber hinaus ist auch die Anwendung der Modellreduktion auf das gekoppelte System aus Struktur- und Regelungsmodell, aus Struktur- und Bearbeitungsprozessmodell oder aus allen diesen denkbar. Beim gekoppelten mechatronischen Modell kommt die Besonderheit zum Tragen, dass die Starrkörpermoden im Vergleich zur übrigen Struktur verhältnismäßig hohe Dämpfungswerte aufgrund der Reibung besitzen. Hierbei ist zu untersuchen, inwieweit sich die betragsmäßig großen Unterschiede der Parameter in der Dämpfungsmaatrix mit den Krylov-Unterräumen 2. Ordnung reduzieren und wiedergeben lassen. In einem gekoppelten Prozess-Struktur-Modell kommt eine weitere Herausforderung hinzu, da zur Berücksichtigung der Spanungsdickenmodulation im Zerspankraftmodell ein Totzeitglied enthalten ist. Aus mathematischer Sicht handelt es sich damit bei diesem Gesamtsystem um ein sog. *Delay-System*,

für dessen Behandlung in der Modellreduktion noch Forschungsaktivitäten erforderlich sind.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass an der Schnittstelle zwischen den Disziplinen der Mathematik und den Ingenieurwissenschaften noch viele Handlungsfelder liegen. Damit lassen sich die Berechnungs- und Simulationsmethoden auch zukünftig weiter verbessern und die Entwicklungszeiten von Werkzeugmaschinen weiter verkürzen.

## **Literaturverzeichnis**

### **ABELE & REINHART 2011**

Abele, E.; Reinhart, G.: Zukunft der Produktion - Herausforderungen, Forschungsfelder, Chancen. München: Hanser 2011.

### **ALBERTZ 1995**

Albertz, F.: Dynamikgerechter Entwurf von Werkzeugmaschinen-Gestellstrukturen. Berlin: Springer 1995. (*iwb* Forschungsberichte 93).

### **ALTINTAS 2000**

Altintas, Y.: Manufacturing Automation - Metal Cutting Mechanics, Machine Tool Vibrations, and CNC Design. Cambridge: Cambridge University Press 2000.

### **ALTINTAS & WECK 2004**

Altintas, Y.; Weck, M.: Chatter Stability of Metal Cutting and Grinding. Annals of the CIRP 53 (2004) 2, S. 651–674.

### **ALTINTAS ET AL. 2005**

Altintas, Y.; Brecher, C.; Weck, M.; Witt, S.: Virtual Machine Tool. Annals of the CIRP 54 (2005) 2, S. 651–673.

### **ANTOULAS 2005**

Antoulas, A. C.: Approximation of large-scale dynamical systems. Philadelphia: SIAM 2005.

### **ARNOLDI 1951**

Arnoldi, W. E.: The Principle of Minimized Iterations in the Solution of the Matrix Eigenvalue Problem. Quarterly of Applied Mathematics 9 (1951) o. Nr., S. 17–29.

### **AURICH ET AL. 2009**

Aurich, J. C.; Biermann, D.; Blum, H.; Brecher, C.; Carstensen, C.; Denkena, B.; Klocke, F.; Kröger, M.; Steinmann, P.; Weinert, K.: Modelling and simulation of process: machine interaction in grinding. Production Engineering 3 (2009) 1, S. 111–120.

### **BAI & SU 2005a**

Bai, Z.; Su, Y.: SOAR: A second-order Arnoldi Method for the Solution of the Quadratic Eigenvalue Problem. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 26 (2005) 3, S. 640–659.

BAI & SU 2005b

Bai, Z.; Su, Y.: Dimension Reduction of Large-Scale Second-Order Dynamical Systems via a Second-Order Arnoldi Method. *SIAM Journal of Scientific Computing* 26 (2005) 5, S. 1692–1709.

BATHE 2001

Bathe, K.-J.: Finite-Elemente-Methoden. 2. Auflage. Berlin: Springer 2001.

BAUR ET AL. 2011

Baur, U.; Beattie, C.; Benner, P.; Gugercin, S.: Interpolatory Projection Methods for Parameterized Model Reduction. *SIAM Journal of Scientific Computing* 33 (2011) 5, S. 2489–2518.

BEATTIE & GUGERCIN 2005

Beattie, C.; Gugercin, S.: Krylov-based model reduction of second-order systems with proportional damping. In: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*. Seville, Spain, December 12-15, 2005. S. 2278–2283.

BERKEMER 2003

Berkemer, J.: Gekoppelte Simulation von Maschinendynamik und Antriebsregelung unter Verwendung linearer Finite Elemente Modelle. Dissertation, Universität Stuttgart 2003.

BERKEMER & KNORR 2002

Berkemer, J.; Knorr, M.: Gekoppelte Simulation von Maschinendynamik und Antriebsregelung bei linearangetriebenen Werkzeugmaschinen. *wt Werkstattstechnik online* 92 (2002) 5, S. 226–235.

BONIN ET AL. 2010

Bonin, T.; Faßbender, H.; Soppa, A.; Zäh, M. F.: A global Arnoldi method for the model reduction of second-order structural dynamical systems. Preprint, Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, 2010, <http://www.icm.tu-bs.de/~hfassben/papers/globalArnoldi.pdf>.

BONIN ET AL. 2011a

Bonin, T.; Soppa, A.; Saak, J.; Zäh, M. F.; Faßbender, H.; Benner, P.: Moderne Modellordnungsreduktionsverfahren für Finite-Elemente-Modelle zur Simulation von Werkzeugmaschinen. In: Bertram, T.; Corves, B.; Janschek, K. (Hrsg.): *VDI-Mechatroniktagung* 2011, 2011. S. 333–338.

BONIN ET AL. 2011b

Bonin, T.; Zäh, M. F.; Soppa, A.; Faßbender, H.: Einsatz moderner Ordnungsreduktionsverfahren - Neue Wege für die numerische Simulation von Werkzeugmaschinen. *wt Werkstattstechnik online* 101 (2011) 3, S. 150–155.

BRANDT ET AL. 2008

Brandt, C.; Karimi, H. R.; Piotrowska, I.; Niebsch, J.; Ramlau, R.; Krause, A.; Riemer, O.; Maaß, P.: Process Machine Interactions Model for Turning Processes. In: Denkena, B. (Hrsg.): *Proceedings of the 1st International Conference on Process Machine Interactions*, Hannover, 3.-4.9.2008, 2008. S. 239–246.

BROGLIATO ET AL. 2007

Brogliato, B.; Lozano, R.; Maschke, B.; Egeland, O.: *Dissipative Systems Analysis and Control*. 2. Auflage. London: Springer 2007.

BRONSTEIN ET AL. 2008

Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.; Musiol, G.; Mühlig, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. 7. Auflage. Frankfurt: Harri Deutsch 2008.

BUDAK ET AL. 1996

Budak, E.; Altintas, Y.; Aramarego, E.: Prediction of milling force coefficients from orthogonal cutting data. *Journal of Manufacturing Science and Engineering* 118 (1996) 2, S. 216–224.

BÜRGEL 2001

Bürgel, R.: *Prozessanalyse an spanenden Werkzeugmaschinen mit digital geregelten Antrieben*. München: Herbert Utz 2001. (Forschungsberichte IWB 151).

CAUGHEY & O'KELLY 1965

Caughey, T. K.; O'Kelly, M. E. J.: Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems. *Journal of Applied Mechanics* 32 (1965) 3, S. 583–588.

CHIDAMBARA 1969

Chidambara, M. R.: Two Simple Techniques for the Simplification of Large Dynamic Systems. In: *Proceedings of Tenth Joint Automation Control Conference*, 1969. S. 669–674.

CHIPROUT & NAKHLA 1994

Chiprout, E.; Nakhla, M. S.: *Asymptotic Waveform Evaluation*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers 1994.

CHOI ET AL. 2006

Choi, J.; Bae, D.; Cho, H.: A Relative Method for Finite Element Nonlinear Structural Analysis. Materials Science Forum 505-507 (2006) o. Nr., S. 577–582.

CHU ET AL. 2006

Chu, C.-C.; Lai, M.-H.; Feng, W.-S.: MIMO Interconnects Order Reduction by Using the Multiple Point Adaptive-Order Rational Global Arnoldi Algorithm. IEICE Transactions on Electronics E89-C (2006) 6, S. 792–802.

CHU ET AL. 2008

Chu, C.-C.; Lai, M.-H.; Feng, W.-S.: Model-order reductions for MIMO systems using global Krylov subspace methods. Mathematics and Computers in Simulation 79 (2008) 4, S. 1153–1164.

CRAIG & BAMPTON 1968

Craig, R. R.; Bampton, M. C. C.: Coupling of Substructures for Dynamic Analysis. AIAA Journal 6 (1968) 7, S. 1313–1319.

CRANDALL 1970

Crandall, S.: The Role of Damping in Vibration Theory. Journal of Sound and Vibration 11 (1970) 1, S. 3–18.

DAVISON 1966

Davison, E. J.: A Method for Simplifying Linear Dynamic Systems. IEEE Transactions on Automatic Control 11 (1966) 1, S. 93–101.

DOSSING 1989

Dossing, O.: Strukturen prüfen: Modalanalyse und Simulation (Teil 2). Kopenhagen: Brüel & Kjaer 1989.

EID 2009

Eid, R.: Time Domain Model Reduction By Moment Matching. Dissertation, Technische Universität München 2009.

EID ET AL. 2007

Eid, R.; Salimbahrami, S. B.; Lohmann, B.; Rudnyi, E. B.; Korvink, J. G.: Parametric Order Reduction of Proportionally Damped Second-Order Systems. Sensors and Materials 19 (2007) 3, S. 149–164.

EUBERT 1992

Eubert, P.: Digitale Zustandsregelung elektrischer Vorschubantriebe. Berlin: Springer 1992. (iwb Forschungsberichte 51).

**FAASEN 2007**

Faasen, R.: Chatter Prediction and Control for High-Speed Milling: Modelling and Experiments. Dissertation, Technische Universiteit Eindhoven, The Netherlands 2007.

**FASSBENDER & BENNER 2006**

Faßbender, H.; Benner, P.: Numerische Methoden zur passivitätserhaltenden Modellreduktion. *at - Automatisierungstechnik* 54 (2006) 4, S. 153–160.

**FELDMANN & FREUND 1995**

Feldmann, P.; Freund, R. W.: Efficient Linear Circuit Analysis by Padé Approximation via the Lanczos Process. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems* 14 (1995) 5, S. 639–649.

**FINKE 1977**

Finke, R.: Berechnung des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen. Dissertation, RWTH Aachen 1977.

**FÖLLINGER 1994**

Föllinger, O.: Regelungstechnik - Einführung in die Methoden und ihre Anwendung. 8. Auflage. Heidelberg: Hüthig 1994.

**FREUND 2003**

Freund, R. W.: Model Reduction Methods Based on Krylov Subspaces. *Acta Numerica* 12 (2003) o. Nr., S. 267–319.

**FRISWELL & MOTTERSHEAD 1995**

Friswell, M. I.; Mottershead, J. E.: Finite Element Model Updating in Structural Dynamics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers 1995.

**GASCH & KNOTHE 1989**

Gasch, R.; Knothe, K.: Strukturdynamik - Kontinua und ihre Diskretisierung (Band 2). Berlin: Springer 1989.

**GAWRONSKI 2004**

Gawronski, W. K.: Advanced structural dynamics and active control of structures. New York: Springer 2004.

**GEBHARD 2011**

Gebhard, P.: Dynamisches Verhalten von Werkzeugmaschinen bei Anwendung für das Rührreibschweißen. München: Herbert Utz 2011. (Forschungsberichte IWB 253).

**GÉRADIN & RIXEN 1997**

Gérardin, M.; Rixen, D.: *Mechanical Vibration: Theory and Applications to Structural Dynamics*. Chichester: John Wiley & Sons 1997.

**GOLUB & VAN LOAN 1996**

Golub, G. H.; van Loan, C. F.: *Matrix Computations*. 3. Auflage. Baltimore: Johns Hopkins University Press 1996.

**GRIMME 1997**

Grimme, E. J.: *Krylov Projection Methods for Model Reduction*. Dissertation, University of Illinois at Urbana-Champaign 1997.

**GROSS ET AL. 2006**

Groß, H.; Hamann, J.; Wiegärtner, G.: *Elektrische Vorschubantriebe in der Automatisierungstechnik*. 2. Auflage. Erlangen: Publics Corporate Publishing 2006.

**GROSSMANN 1976**

Großmann, K.: *Ein Beitrag zur Modellfindung und -berechnung für die dynamische Analyse von Werkzeugmaschinen-Strukturen*. Dissertation, Technische Universität Dresden 1976.

**GROSSMANN & RUDOLPH 2008**

Großmann, K.; Rudolph, H.: *Dämpfungsbeschreibung für die modellgestützte dynamische Strukturanalyse*. ZWF 103 (2008) 11, S. 767–773.

**GROSSMANN ET AL. 2007**

Großmann, K.; Rudolph, H.; Brecher, C.; Hoffmann, F.: *Simulationstechnologien für virtuelle Werkzeugmaschinen*. ZWF 102 (2007) 10, S. 614–619.

**GROSSMANN ET AL. 2010**

Großmann, K.; Rudolph, H.; Brecher, C.; Fey, M.; Zäh, M. F.; Niehues, K.; Schwarz, S.: *Dämpfungseffekte in Werkzeugmaschinen*. ZWF 105 (2010) 7-8, S. 676–680.

**GUGERCIN 2003**

Gugercin, S.: *Projection methods for model reduction of large-scale dynamical systems*. Dissertation, Rice University, Houston, Texas 2003.

**GUYAN 1965**

Guyan, R. J.: *Reduction of Stiffness and Mass Matrices*. AIAA Journal 3 (1965) 2, S. 380.

**HEIMANN 1977**

Heimann, A.: Anwendung der Methode finiter Elemente bei Berechnung und Auslegung von Gestellbauteilen. Dissertation, RWTH Aachen 1977.

**HENNINGER 2009**

Henninger, C.: Methoden zur simulationsbasierten Analyse der dynamischen Stabilität von Fräsprozessen. Aachen: Shaker 2009. (Schriften aus dem Institut für Technische und Numerische Mechanik der Universität Stuttgart Band 15 (2009)).

**HOFFMANN 2008**

Hoffmann, F.: Optimierung der dynamischen Bahngenaugkeit von Werkzeugmaschinen mit der Mehrkörpersimulation. Aachen: Apprimus 2008. (Ergebnisse aus der Produktionstechnik 8/2008).

**HÖVEL 2008**

Hövel, S.: Finite Elemente Simulation von Zerspanvorgängen mit geometrisch bestimmter Schneide. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern 2008.

**HURTY 1965**

Hurty, W. C.: Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes. AIAA Journal 3 (1965) 4, S. 678–685.

**ISPAYLAR 1997**

Ispaylar, M. H.: Betriebseigenschaften von Profilschienen-Wälzführungen. Dissertation, RWTH Aachen 1997.

**JBILOU ET AL. 1999**

Jbilou, K.; Messaoudi, A.; Sadok, H.: Global FOM and GMRES algorithms for matrix equations. Applied Numerical Mathematics 31 (1999) 1, S. 49–63.

**KALMAN 1961**

Kalman, R.: On the General Theory of Control Systems. In: Proceedings 1st IFAC Congress, Moskau 1960. London: Butterworth 1961. S. 481–492.

**KALVERAM 2005**

Kalveram, M.: Analyse und Vorhersage der Prozessdynamik und Prozessstabilität beim Hochgeschwindigkeitsfräsen. Dissertation, Universität Dortmund 2005.

KEHL 2004

Kehl, G.: Simulation von Strukturmechanik und Regelungstechnik an Werkzeugmaschinen - Begrenzung der Dynamik. In: Zäh, M. F.; Reinhart, G. (Hrsg.): Mechatronik - Strukturdynamik von Werkzeugmaschinen. Herbert Utz 2004. S. 6–1 – 6–16.

KIENZLE & VICTOR 1957

Kienzle, O.; Victor, H.: Spezifische Schnittkräfte bei der Metallbearbeitung. Werkstofftechnik und Maschinenbau 47 (1957) 5, S. 224–225.

KIPFMÜLLER 2010

Kipfmüller, M.: Aufwandsoptimierte Simulation von Werkzeugmaschinen. Aachen: Shaker 2010. (Forschungsberichte aus dem wbk, Institut für Produktionstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT) 153).

KIRCHKNOPF 1989

Kirchknopf, P.: Ermittlung modaler Parameter aus Übertragungsfrequenzgängen. Berlin: Springer 1989. (*iwb* Forschungsberichte 20).

KLEIN 2007

Klein, B.: FEM - Grundlagen und Anwendungen der Finite-Elemente-Methode. 7. Auflage. Braunschweig: Vieweg 2007.

KNOBLOCH & KWAKERNAAK 1985

Knobloch, H. W.; Kwakernaak, H.: Lineare Kontrolltheorie. Berlin: Springer 1985.

KRAUSE 1997

Krause, F.-L.: Auf dem Weg zur Virtuellen Produktentwicklung. In: VDI-Gesellschaft (Hrsg.): Neue Generation von CAD/CAM-Systemen. Tagung, 28./29.10.1997, München. Düsseldorf: VDI Verlag 1997. S. 17–33. (VDI-Berichte 1357).

LASCHET 1988

Laschet, A.: Simulation von Antriebssystemen. Berlin: Springer 1988.

LEHNER 2007

Lehner, M.: Modellreduktion in elastischen Mehrkörpermodellen. Dissertation, Universität Stuttgart 2007.

LI 2000

Li, J.-R.: Model Reduction of Large Linear Systems via Low Rank System Gramians. PhD Thesis, Massachusetts Institut of Technology, Cambridge, Massachusetts 2000.

**LITZ 1979**

Litz, L.: Reduktion der Ordnung linearer Zustandsraummodelle mittels modaler Verfahren. Dissertation, Universität Karlsruhe 1979.

**LOHMAN & SALIMBAHRAWI 2004**

Lohmann, B.; Salimbahrami, S. B.: Ordnungsreduktion mittels Krylov-Unterraummethoden. In: Automatisierungstechnik 52 (2004) 1, S. 30–38.

**LOHMAN & SALIMBAHRAWI 2005**

Lohmann, B.; Salimbahrami, S. B.: Reduction of Second Order Systems using Second Order Krylov Subspaces. In: International Federation of Automatic Control (Hrsg.): 16th IFAC World Congress, Prague, Czech Republic, July 4th-8th, 2005. S. Paper Code: Tu-E13-TO/5.

**LUNZE 2008**

Lunze, J.: Regelungstechnik 2 - Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung. 5. Auflage. Berlin: Springer 2008.

**MAGLIE 2009**

Maglie, P.: Anwendung von FE-basierten Reduktionsmethoden - Integration von flexiblen Bauteilen in der gekoppelten Simulation von Werkzeugmaschinen. In: VDI Mechatronik 2009: Komplexität beherrschen, Methoden und Lösungen aus der Praxis für die Praxis, 12.-13.05.2009, Wiesloch. VDI Verlag 2009. S. 312–320.

**MAGLIE ET AL. 2010**

Maglie, P.; Carbini, R.; Weikert, S.; Wegener, K.: Efficient mechatronic evaluation of machine tool designs using model reduction. In: inspire AG (Hrsg.): 12th Mechatronics Forum Biennial International Conference, 28.-30.06.2010, ETH Zürich, 2010. S. 285–292.

**MEIROVITCH & KWAK 1990**

Meirovitch, L.; Kwak, M. K.: Convergence of the Classical Rayleigh-Ritz Method and the Finite Element Method. AIAA Journal 28 (1990) 8, S. 1509–1516.

**MELCHINGER & SCHMITZ 2004**

Melchinger, A.; Schmitz, E.-U.: Schneller und effizienter in der Entwicklung durch Simulation und Optimierung. In: Burlies, A.; Sauter, J. (Hrsg.): Simulation in der Produkt- und Prozessentwicklung. Tagungsband zum Symposium, 5.-7.11.2003, Bremen. Fraunhofer Institut IFAM 2004. S. 149–156.

MELCHINGER & SCHMITZ 2006

Melchinger, A.; Schmitz, E.-U.: Anwenderbericht INDEX Werke GmbH & Co. KG. In: wbk Institut für Produktionstechnik (Hrsg.): Abschlussbericht des Verbundforschungsprojekts „SimCAT“. Tagungsband zum Abschlusskolloquium, 14.11.2006, Karlsruhe, 2006. S. 103–114.

MILBERG 1995

Milberg, J.: Werkzeugmaschinen - Grundlagen: Zerspantechnik, Dynamik, Baugruppen und Steuerungen. 2. Auflage. Berlin: Springer 1995.

MSC.SOFTWARE CORPORATION 2003

MSC.Software Corporation (Hrsg.): MSC.Nastran 2004 Reference Manual, Santa Ana 2003.

MÜLLER 1977

Müller, P. C.: Stabilität und Matrizen. Berlin: Springer 1977.

MÜLLER & SCHIEHLEN 1976

Müller, P. C.; Schiehlen, W. O.: Lineare Schwingungen. Wiesbaden: Akademische Verlagsgesellschaft 1976.

NEBELING 1999

Nebeling, P. H.: Abgleich der dynamischen Eigenschaften numerischer Modelle mit realen mechanischen Strukturen. Aachen: Shaker 1999. (Berichte aus der Produktionstechnik 5/1999).

NEITHARDT 2004

Neithardt, W.: Methodik zur Simulation und Optimierung von Werkzeugmaschinen in der Konzept- und Entwurfsphase auf Basis der Mehrkörper-simulation. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH) 2004.

NEUGEBAUER ET AL. 2010

Neugebauer, R.; Scheffler, C.; Zwingenberger, C.; Wabner, M.: Verbesserte Berechnung von statischen und dynamischen Steifigkeiten an Werkzeugmaschinen. *wt Werkstattstechnik online* 100 (2010) 5, S. 354–361.

NOPPEN 1973

Noppen, R.: Berechnung der Elastizitätseigenschaften von Maschinenbau-teilen nach der Methode finiter Elemente. Dissertation, RWTH Aachen 1973.

OERTLI 2008

Oertli, T.: Strukturmechanische Berechnung und Regelungssimulation von Werkzeugmaschinen mit elektromechanischen Vorschubantrieben. München: Herbert Utz 2008. (Forschungsberichte IWB 213).

OLSSON 2002

Olsson, K. H. A.: Model Order Reduction in FEMLAB by Dual Rational Arnoldi. Thesis for the degree of licentiate of engineering, Chalmers University of Technology and Göteborg University 2002.

PANZER ET AL. 2010

Panzer, H.; Mohring, J.; Eid, R.; Lohmann, B.: Parametric Model Order Reduction by Matrix Interpolation. *at - Automatisierungstechnik* 58 (2010) 8, S. 475–484.

PEROVIĆ 2006

Perović, B.: *Handbuch Werkzeugmaschinen: Berechnung, Auslegung und Konstruktion*. München: Hanser 2006.

PETUELLI 1983

Petruelli, G.: Theoretische und experimentelle Bestimmung der Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften normalbelasteter Fügestellen. Dissertation, RWTH Aachen 1983.

PIETRZKO 1992

Pietrzko, S. J.: Verfahren zur Identifikation der Dämpfungsmatrix mechanischer Systeme. Dissertation, ETH Zürich 1992.

PRITSCHOW 1996

Pritschow, G.: On the Influence of the Velocity Gain Factor on the Path Deviation. *Annals of the CIRP* 45 (1996) 1, S. 367–371.

PRITSCHOW ET AL. 2006

Pritschow, G.; Rüdele, H.; Röck, S.: Eigenschaften und Anwendungen von Hardware-in-the-Loop-Simulation in der Steuerungstechnik. In: Brecher, C. (Hrsg.): *Simulationstechnik in der Produktion*. Düsseldorf: VDI Verlag 2006. S. 32–43. (Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 2, Band 658).

QUEINS 2005

Queins, M.: Simulation des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen mit Hilfe flexibler Mehrkörpermodelle. Aachen: Shaker 2005. (Berichte aus der Produktionstechnik 12/2005).

REDEKER 1979

Redeker, W.: Systematische Konstruktion spanender Werkzeugmaschinen. Dissertation, Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig 1979.

RICHARD & SANDER 2008

Richard, H. A.; Sander, M.: Technische Mechanik: Festigkeitslehre. 2. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner 2008.

RICKELT-ROLF 2009

Rickelt-Rolf, C.: Modellreduktion und Substrukturtechnik zur effizienten Simulation dynamischer, teilgeschädigter Systeme. Dissertation, Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig 2009.

RÖCK ET AL. 2009

Röck, S.; Sekler, P.; Dadalau, A.: Zukünftige Einsatzgebiete der Simulation für die Optimierung der Steuerungstechnik in der Produktion. In: Elst, G. (Hrsg.): Tagungsband ASIM. Workshop STS/GMMS, 5./6. März 2009, Dresden. Fraunhofer IRB Verlag 2009.

ROSE 1991

Rose, T.: Using Residual Vectors in MSC/Nastran Dynamic Analysis to Improve Accuracy. In: The MacNeal-Schwendler Corporation (Hrsg.): The MSC 1991 World Users' Conf. Proc., Vol. I, March 11th-15th, 1991, Universal City, CA, USA, 1991. S. Paper No. 12.

ROY & GIRARD 2005

Roy, N.; Girard, A.: Impact of Residual Modes in Structural Dynamics. In: European Space Agency (ESA) (Hrsg.): Proceedings of the European Conference on Spacecraft Structures, Materials and Mechanical Testing 2005. 10-12 May 2005, Noordwijk, The Netherlands, 2005. S. 52.1–52.11.

RUDNYI & KORVINK 2004

Rudnyi, E. B.; Korvink, J. G.: Model Order Reduction for Large Scale Engineering Models Developed in ANSYS. In: Dongarra, J.; Madsen, K.; Wasniewski, J. (Hrsg.): Applied Parallel Computing. State of the Art in Scientific Computing. 7th International Workshop, PARA 2004, Lyngby, Denmark, June 20-23, 2004. Springer 2004. S. 349–356.

SAAD 2003

Saad, Y.: Iterative Methods for Sparse Linear Systems. 2. Auflage. Philadelphia: SIAM 2003.

SADKANE 1993

Sadkane, M.: Block-Arnoldi and Davidson methods for unsymmetric large eigenvalue problems. Numerical Mathematics 64 (1993) 1, S. 195–211.

SALIMBAHRAMI 2005

Salimbahrami, S. B.: Structure Preserving Order Reduction of Large Scale Second Order Models. Dissertation, Technische Universität München 2005.

SALIMBAHRAMI & LOHMANN 2006

Salimbahrami, S. B.; Lohmann, B.: Order reduction of large scale second-order systems using Krylov subspace methods. *Linear Algebra and its Applications* 415 (2006) 2-3, S. 385–405.

SCHNEIDER 2000

Schneider, C.: *Strukturmechanische Berechnungen in der Werkzeugmaschinenkonstruktion*. München: Herbert Utz 2000. (Forschungsberichte IWB 144).

SCHNEIDER 1991

Schneider, M.: *Statistisches und dynamisches Verhalten beim Einsatz linearer Schienenführungen auf Wälzlagerbasis im Werkzeugmaschinenbau*. München: Hanser 1991.

SCHWARZ 2010

Schwarz, F.: *Simulation der Wechselwirkungen zwischen Prozess und Struktur bei der Drehbearbeitung*. München: Herbert Utz 2010. (Forschungsberichte IWB 242).

SCHWERTASSEK & WALLRAPP 1999

Schwertassek, R.; Wallrapp, O.: *Dynamik flexibler Mehrkörpersysteme*. Braunschweig: Vieweg 1999.

SHABANA 1997

Shabana, A. A.: *Vibration of Discrete and Continuous Systems*. New York: Springer 1997.

SHABANA & CHRISTENSEN 1997

Shabana, A. A.; Christensen, A. P.: Three-dimensional absolute nodal co-ordinate formulation: plate problem. *Internation Journal for Numerical Methods in Engineering* 40 (1997) 15, S. 2775–2790.

SIEDL 2008

Siedl, D.: *Simulation des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen während Verfahrbewegungen*. München: Herbert Utz 2008. (Forschungsberichte IWB 213).

SIMON 1986

Simon, W.: *Elektrische Vorschubantriebe an NC-Systemen*. Berlin: Springer 1986. (*iwb Forschungsberichte* 5).

**SÖHNER 2003**

Söhner, J.: Beitrag zur Simulation zerspanungstechnologischer Vorgänge mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH) 2003.

**SOPPA 2011**

Soppa, A.: Krylov-Unterraum basierte Modellreduktion zur Simulation von Werkzeugmaschinen. Dissertation, Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig 2011.

**SORENSEN 2005**

Sorensen, D. C.: Passivity Preserving Model Reduction via Interpolation of Spectral Zeros. *Systems & Control Letter* 54 (2005) 4, S. 347–360.

**SPUR 1996**

Spur, G.: Die Genauigkeit von Maschinen. Eine Kontruktionslehre. Leipzig: Fachbuchverlage Leipzig 1996.

**STEINKE 2010**

Steinke, P.: Finite-Elemente-Methode - Rechnergestützte Einführung. 3. Auflage. Berlin: Springer 2010.

**SU ET AL. 2004**

Su, Y.; Wang, J.; Zeng, X.; Bai, Z.; Chiang, C.; Zhou, D.: SAPOR: Second-Order Arnoldi Method for Passive Order Reduction of RCS Circuits. In: *Proceedings of the 2004 IEEE/ACM International Conference on Computer-aided Design*. November 7-11, 2004, San Jose, CA, USA, 2004. S. 74–79.

**SUMMER 1986**

Summer, H.: Modell zur Berechnung verzweigter Antriebsstrukturen. Berlin: Springer 1986. (*iwb Forschungsberichte* 4).

**TISSEUR & MEERBERGEN 2001**

Tisseur, F.; Meerbergen, K.: The Quadratic Eigenvalue Problem. *SIAM Review* 43 (2001) 2, S. 235–286.

**TLUSTY & MACNEIL 1975**

Tlusty, J.; MacNeil, P.: Dynamics of Cutting Forces in End Milling. *Annals of the CIRP* 24 (1975) 1, S. 21–25.

**TÖNSHOFF 1995**

Tönshoff, H. K.: Werkzeugmaschinen - Grundlagen. Berlin: Springer 1995.

UNBEHAUEN 2007

Unbehauen, H.: Regelungstechnik II - Zustandsregelungen, digitale und nichtlineare Regelsysteme. 9. Auflage. Wiesbaden: Vieweg 2007.

UNBEHAUEN 2008

Unbehauen, H.: Regelungstechnik I - Klassische Verfahren zur Analyse und Synthese linearer kontinuierlicher Regelsysteme, Fuzzy-Regelsysteme. 15. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner 2008.

UNBEHAUEN 2002

Unbehauen, R.: Systemtheorie 1. München: Oldenbourg 2002.

VARGA 1995

Varga, A.: Enhanced Modal Approach for Model Reduction. Mathematical Modelling of Systems 1 (1995) 2, S. 91–105.

WECK & BRECHER 2005

Weck, M.; Brecher, C.: Werkzeugmaschinen 1 - Maschinenarten und Anwendungsbereiche. 6. Auflage. Berlin: Springer 2005.

WECK & BRECHER 2006a

Weck, M.; Brecher, C.: Werkzeugmaschinen 2 - Konstruktion und Berechnung. 8. Auflage. Berlin: Springer 2006.

WECK & BRECHER 2006b

Weck, M.; Brecher, C.: Werkzeugmaschinen 5 - Messtechnische Untersuchung und Beurteilung, dynamische Stabilität. 7. Auflage. Berlin: Springer 2006.

WECK & BRECHER 2006c

Weck, M.; Brecher, C.: Werkzeugmaschinen 3 - Mechatronische Systeme, Vorschubantriebe, Prozessdiagnose. 6. Auflage. Berlin: Springer 2006.

WECK ET AL. 2003

Weck, M.; Queins, M.; Witt, S.: Effektive Entwicklung von Werkzeugmaschinen. VDI-Z 145 (2003) 10, S. 32–36.

WEIKERT 2000

Weikert, S.: Beitrag zur Analyse des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen. Dissertation, ETH Zürich 2000.

WEISSENBERGER 2002

Weißberger, M.: Optimierung der Bewegungsdynamik von Werkzeugmaschinen im rechnergestützten Entwicklungsprozess. München: Herbert Utz 2002. (Forschungsberichte IWB 166).

WITT 2007

Witt, S.: Integrierte Simulation von Maschine, Werkstück und spanendem Fertigungsprozess. Aachen: Shaker 2007. (Berichte aus der Produktions-technik 31/2007).

ZÄH ET AL. 2004

Zäh, M. F.; Engelberger, G.; Oertli, T.; Siedl, D.: Strukturdynamik und Mechatronik in der Werkzeugmaschinenentwicklung. In: Zäh, M. F.; Reinhart, G. (Hrsg.): Mechatronik - Strukturdynamik von Werkzeugmaschinen. München: Herbert Utz 2004. S. 2–0 – 2–26.

ZIEHL 1996

Ziehl, A.: Berechnung des dynamischen Strukturverhaltens von Portalfräsmaschinen. Düsseldorf: VDI Verlag 1996. (Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 11, Band 229).

ZURMÜHL & FALK 1986

Zurmühl, R.; Falk, S.: Matrizen und ihre Anwendungen. Teil 2: Numerische Methoden. 5. Auflage. Berlin: Springer 1986.

## Anhang

### A.1 Beanspruchungsarten mechanischer Strukturen

In folgendem Bild A.1 werden diverse Belastungsfälle mechanischer Strukturen sowie deren zeitlicher Verlauf dargestellt und erläutert.

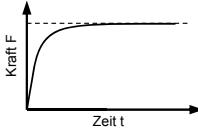
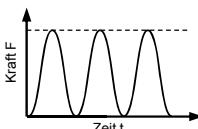
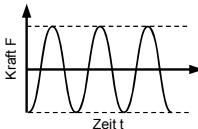
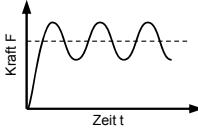
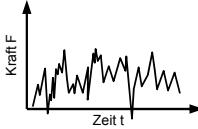
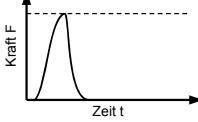
Belastungsfall	zeitlicher Verlauf der Belastung
ruhende, statische Belastung	 <p><b>Statische Belastung:</b> äußere Kraft und entstehende Spannung bleiben ab Erreichen des gemeinsamen Kraftniveaus konstant</p>
zeitlich veränderliche periodische Belastung	 <p><b>Dynamisch schwellende Belastung:</b> Kraft und Spannung schwanken zwischen Null und einem Höchstwert</p>  <p><b>Dynamisch wechselnde Belastung:</b> Kraft und Spannung schwanken zwischen einem negativen und einem positiven Höchstwert</p>  <p><b>Allgemein dynamische Belastung:</b> Kraft und Spannung schwanken dynamisch um einen statischen Wert</p>
zeitlich veränderliche nichtperiodische Belastung	 <p><b>Nichtperiodisch ablaufende Belastung:</b> Kraft und Spannung nehmen stochastisch schwankende Werte an</p>
dynamische, stoßartige Belastung	 <p><b>Stoßartige Belastung:</b> Hohe Kräfte in sehr kurzer Zeit mit Wellenausbreitungsvorgängen</p>

Bild A.1: Statische und dynamische Anteile bei zeitabhängigen Kraftverläufen  
(in Anlehnung an RICHARD & SANDER 2008, PEROVIĆ 2006)

Allgemein wird in der Mechanik zwischen statischen und dynamischen Kräften unterschieden, wobei die Differenzierung nach dem zeitlichen Verlauf erfolgt (RICHARD & SANDER 2008). Bei statischen Lasten, vorwiegend durch Prozess- oder Gewichtskräfte hervorgerufen, ist die auftretende Kraft sowie die dadurch resultierende Spannung in der Struktur konstant. Dagegen werden unter den dynamischen Kräften stoßartige oder auch zeitlich veränderliche und periodische Belastungen verstanden, welche die Maschinenstruktur zu unterschiedlich ausgeprägten Schwingungen anregen können.

## A.2 Parameter der Beispieldsysteme

In diesem Abschnitt werden aus Gründen der Nachvollziehbarkeit die Parameter der in Abschnitt 4.3 verwendeten Beispieldsysteme mit 20 und mit 24 Freiheitsgraden angegeben. Es handelt sich hierbei jeweils um ein Zustandsraummodell nach Gleichung (3.32) der Dimension 20 bzw. 24, welches aus einem Feder-Masse-Dämpfer-System mit  $n = 10$  bzw.  $n = 12$  Massen nach der Transformation in das System 1. Ordnung resultiert. Die Modellierung der Systeme erfolgte in *MATLAB/Simulink*® und ist so implementiert, dass damit auch Systeme beliebiger Dimension modelliert werden können. Daher ähnelt die folgende Beschreibung der *MATLAB*-Notation:

- Für die Massen gilt:  $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 0,7 \text{ kg}$ .
- Die Einzelsteifigkeiten  $k_i$  sind durch folgenden Zeilenvektor  $\mathbf{k}$  festgelegt:  $\mathbf{k} = [10 : (50 - 10)/(n - 1) : 50]$  mit  $n = \text{Anzahl der Massen}$ . Damit sind die erste Federsteifigkeit mit  $k_1 = 10 \text{ m/N}$  und die letzte mit  $k_i = 50 \text{ m/N}$  festgelegt. Für die dazwischen liegenden Steifigkeiten wird, ausgehend vom Startwert 10, jeweils der Wert des Ausdrucks  $(50 - 10)/(n - 1)$  hinzu addiert.
- Die proportionale Dämpfungsmaatrix des Systems wird durch die Gleichung (2.26) mit den Faktoren  $\alpha = 0,05$  und  $\beta = 0,005$  festgelegt.

## A.3 Weiterführende Details zu den Bestandteilen des Reduktionsverfahrens

### A.3.1 Block-Arnoldi-Algorithmus zur Berücksichtigung mehrerer Ein- und Ausgänge

Bei MIMO-Systemen legen die betrachteten Ein- bzw. Ausgänge je einen Spaltenvektor der Eingangs- bzw. Ausgangsmatrix fest. Daher kommen bei der Bestimmung des nächsten Krylov-Unterraumvektors für das jeweilige betrachtete Moment stets mehrere zu einem Block zusammengefasste Vektoren hinzu. Mit Hilfe der Block-Version des Arnoldi-Algorithmus (vgl. Abschnitt 3.7.5) können die Informationen der verschiedenen Ein- und Ausgänge in der Krylov-Sequenz berücksichtigt werden. Wie bereits in Abschnitt 4.4.3 erläutert, ist aus Recheneffizienzgründen lediglich die blockweise Orthogonalisierung des jeweiligen neuen Blocks gegenüber den bestehenden sinnvoll. Zur Vermeidung linearer Abhängigkeiten bietet für die hier betrachteten Modelle ein von SOPPA (2011) erweitertes Verfahren eine sinnvolle Alternative, welches zunächst die blockweise Orthogonalisierung durchführt. Das zugehörige Strukturiagramm ist in Bild A.2 dargestellt. Zur Gewährleistung einer Startmatrix mit orthogonalen Vektoren wird hierfür eine  $QR$ -Zerlegung der Matrix  $\mathbf{Q}$  durchgeführt. Im Anschluss werden alle weiteren Blöcke  $\mathbf{Z}$  auf die bestehenden Vektoren der Krylov-Sequenz projiziert und gegenüber den bereits berechneten Spaltenvektoren der Projektionsmatrix  $\mathbf{V}$  orthonormiert.

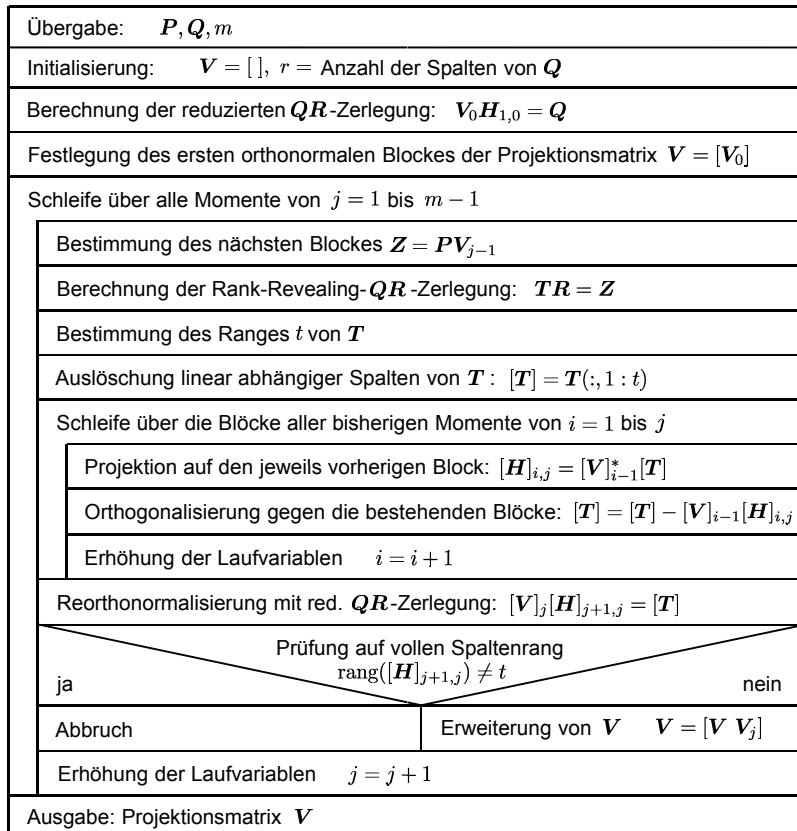


Bild A.2: Strukturdigramm des Block-Arnoldi-Algorithmus mit blockweiser Orthonormalisierung nach SADKANE (1993) und SOPPA (2011)

Darüber hinaus kann auch die Berechnung von  $Z$  zu einer Matrix mit linear abhängigen Spaltenvektoren führen, weshalb das Verfahren um eine Rank-Revealing- $QR$ -Zerlegung und die anschließende Auslöschung der linear abhängigen Vektoren erweitert wird. Die abschließend folgende und bereits im ursprünglichen Algorithmus von SADKANE (1993) enthaltene Reorthonormalisierung bleibt auch hier bestehen. Auf den Einsatz einer Deflationstoleranz kann in diesem Fall verzichtet werden, da das Ergebnis der Reorthogonalisierung auf vollen Spaltenrang geprüft wird und der neu berechnete Block notfalls verworfen wird.

Bei diesem Vorgehen ist zu beachten, dass bei der Anwendung eines zweiseitigen Krylov-Unterraum-Verfahrens auf MIMO-Systeme die Basen  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{W}$  unterschiedliche Dimensionen haben können, sofern die Anzahl der Eingänge nicht mit der Anzahl der Ausgänge übereinstimmt. Dies kann ebenfalls eintreten, wenn aufgrund von Deflation für eine der beiden Projektionsmatrizen keine weiteren Spaltenvektoren mehr durch den Block-Arnoldi-Algorithmus erzeugt werden. Da der Dimensionsunterschied aber eine Projektion, wie sie in Abschnitt 3.5 beschrieben wurde, unmöglich macht, wird von OLSSON (2002) hierfür vorgeschlagen, weitere Elemente des Krylov-Unterraumes der Entwicklungsstelle zu verwenden. Auf diese Weise wird die Projektionsmatrix mit der niedrigeren Dimension um weitere Basisvektoren ergänzt und in ihrer Dimension angeglichen.

### A.3.2 Rationale Interpolation für die Verwendung mehrerer Entwicklungspunkte

Bei der rationalen Interpolation wird die Gesamtprojektionsmatrix  $\mathbf{V}$  aus mehreren Basismatrizen zusammengesetzt. Zur Bestimmung dieser Basismatrizen wird der (Block-)Arnoldi-Algorithmus für die Krylov-Sequenz jeder Entwicklungsstelle durchlaufen, wodurch die Projektionsmatrix nicht nur für jede Stufe des Krylov-Unterraumes erweitert wird, sondern auch für jede Entwicklungsstelle mit deren zugehörigen Stufenvektoren. Bild A.3 gibt dieses Vorgehen als Strukturdiagramm wieder. Hierbei wird ebenfalls auf die **LU**-Zerlegung zurückgegriffen, um die Recheneffizienz zu erhöhen. Neben den Koeffizientenmatrizen des Systems benötigt der Algorithmus einen Vektor  $\mathbf{s}$ , welcher die Entwicklungsstellen enthält, einen Vektor  $\mathbf{m}$ , der angibt, wieviele Momente pro Entwicklungsstelle zur Übereinstimmung gebracht werden sollen, sowie die Deflationstoleranz  $\tau$ .

Für ein zweiseitiges Verfahren wird die zweite Projektionsmatrix  $\mathbf{W}$  auf die gleiche Weise erzeugt. Auch an dieser Stelle sei auf die etwaige Problematik unterschiedlicher Dimensionen der berechneten Projektionsmatrizen  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{W}$  hingewiesen. Zur Vermeidung werden, wie von OLSSON (2002) vorgeschlagen, weitere Elemente des Block-Krylov-Unterraumes der letzten Entwicklungsstelle herangezogen.

Bei der Anwendung des Reduktionsverfahrens kann es unter Umständen sinnvoll sein, komplexwertige Entwicklungsstellen, d. h.  $s_{0,i} \in \mathbb{C}$  mit  $\text{Im}(s_{0,i}) \neq 0$ , zu wählen. Da in diesem Fall im Allgemeinen eine komplexwertige Projektionsmatrix resultiert, ist eine ggf. gewünschte Reellwertigkeit des reduzierten Systems

Übergabe:	$M, D, K, F, s, m, \tau$
Initialisierung:	$V = []$
Schleife über die Anzahl $i$ aller Entwicklungsstellen in $s$	
Berechnung der $LU$ -Zerlegung $LU = (s_i^2 M + s_i D + K)$	
Berechnung der Matrizen $P$ und $Q$ der Krylov-Sequenz nach Gleichung (4.5/4.6) $P = -U \setminus (L \setminus M)$ $Q = U \setminus (L \setminus F)$	
Berechnung von $[V_i]$ mit Block-Arnoldi ( $M, Q, m, \tau$ ) (vgl. Bild 3.10 oder A.2)	
Erweiterung von $V$ $V = [V \ V_i]$	
Erhöhung der Laufvariablen $i = i + 1$	
Ausgabe: Projektionsmatrix $V$	

Bild A.3: Strukturdiagramm zur Erläuterung der Rationalen Interpolation in Anlehnung an SOPPA (2011)

nicht gegeben. Für diesen Fall schlägt SOPPA (2011) vor, die komplexwertige Projektionsmatrix  $V \in \mathbb{C}^{n \times r}$  in ihren Real- und Imaginärteil

$$V_{real} = [\operatorname{Re}([V]_{(:,1)}) \cdots \operatorname{Re}([V]_{(:,r)})] \quad \text{und} \quad (\text{A.1})$$

$$V_{imag} = [\operatorname{Im}([V]_{(:,1)}) \cdots \operatorname{Im}([V]_{(:,r)})] \quad (\text{A.2})$$

aufzuteilen und die Spaltenvektoren der Matrizen  $V_{real}$  und  $V_{imag}$  anschließend z. B. mit Hilfe einer reduzierten  $QR$ -Zerlegung, die nach  $2r$  orthogonalen Spalten der Matrix  $V$  abbricht, zu reorthogonalisieren. Dasselbe Vorgehen wird für die Matrix  $W$  vorgeschlagen, sollte ein zweiseitiges Verfahren angewendet werden. Hierbei ist zu beachten, dass sich die Dimension des reduzierten Systems verdoppelt, ohne dass dabei die Anzahl der Momente, die zur Übereinstimmung gebracht werden, erhöht wird. Weil dieses Vorgehen aber ein effizientes Verfahren zur Reellifizierung des reduzierten Systems darstellt, wird es in der vorliegenden Arbeit herangezogen.

### A.3.3 Globaler Arnoldi-Algorithmus zur Vereinfachung der Orthogonalisierung

Das Hauptziel des globalen Arnoldi-Algorithmus ist eine Vereinfachung der Orthogonalisierung der neu berechneten Blöcke gegenüber den bestehenden Krylov-Unterraumvektoren. In Bild A.4 ist der globale Arnoldi-Algorithmus als Strukturdiagramm dargestellt.

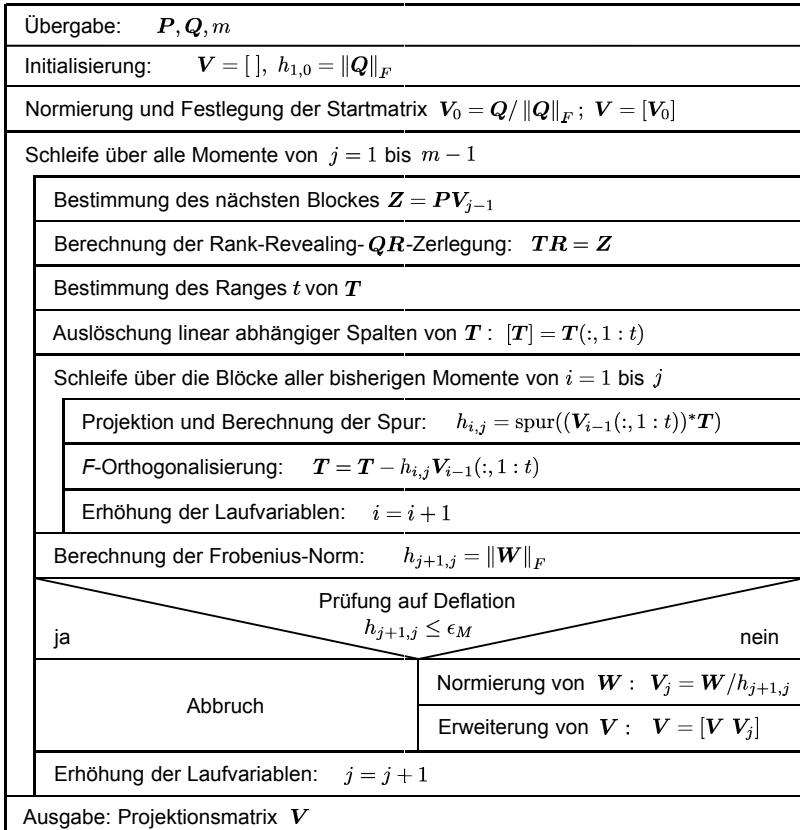


Bild A.4: Strukturdiagramm zur Erläuterung des Ablaufs des globalen Arnoldi-Algorithmus nach JBILOU ET AL. (1999) und SOPPA (2011)

Aufgrund der Verwendung der Frobenius-Norm unterscheidet sich, verglichen mit dem Block-Arnoldi-Verfahren in Bild 3.11, auch die Überprüfung auf Deflation. Für den Fall, dass die Norm gleich Null ist bzw. bei der numerischen Berechnung kleiner als die Maschinengenauigkeit  $\epsilon_M$  wird, bricht der Algorithmus ab, da hierbei ein sog. invarianter Unterraum erzeugt wird, welcher nicht weiter zu gebrauchen ist (SOPPA 2011).

CHU ET AL. (2006) zeigten am Beispiel von Systemen erster Ordnung die Äquivalenz der Übertragungsfunktionen der reduzierten Systeme, für die die Projektionsmatrix einerseits mit dem Block-Arnoldi- und andererseits mit dem

globalen Arnoldi-Algorithmus generiert wurde. Sofern beide Verfahren auf das selbe, geeignete Matrizenpaar  $(P, Q)$  angewendet werden, bleibt die Eigenschaft des Momentenabgleichs erhalten und die ersten Momente der Übertragungsfunktion stimmen jeweils mit den ersten Momenten der Übertragungsfunktion des Originalsystems überein.

Dies lieferte die Grundlage für SOPPA (2011), der diese Erkenntnisse auf Systeme zweiter Ordnung übertrug und somit eine Möglichkeit zur Reduktion von Systemen zweiter Ordnung auf Basis eines globalen Arnoldi-Algorithmus schuf. Liegt die Matrix  $\mathbf{V}_m = [\mathbf{V}_0 \mathbf{V}_1 \dots \mathbf{V}_{m-1}]$ , die eine Basis des Block-Krylov-Unterraumes  $\mathcal{K}(P, Q)$  darstellt, in  $F$ -orthogonaler Form vor, d. h. es gilt

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j \rangle_F &= 0, \quad \text{für } i, j = 0, 1, \dots, m-1 \quad \text{mit } i \neq j \\ \langle \mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j \rangle_F &= 1, \quad \text{für } i = j,\end{aligned}\tag{A.3}$$

dann muss für die Projektion anstatt  $\mathbf{V}^*$  die sog. Pseudo-Inverse

$$\mathbf{V}^\dagger = (\mathbf{V}^* \mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^*\tag{A.4}$$

verwendet werden. Da die Berechnung der Pseudo-Inversen numerische Instabilitäten erzeugen kann, bietet sich für die hier vorgestellten Verfahren die Berechnung einer  $QR$ -Zerlegung  $\mathbf{V}_m = \mathbf{V}\mathbf{R}$  an, so dass  $\mathbf{V}^*\mathbf{V} = \mathbf{I}_r$  gilt. Damit kann die Projektion  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{V}\mathbf{V}^*$  angewendet werden, um ein reduziertes System zweiter Ordnung zu erhalten:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{M}} &= \mathbf{V}^* \mathbf{M} \mathbf{V}, \quad \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{V}^* \mathbf{D} \mathbf{V}, \quad \hat{\mathbf{K}} = \mathbf{V}^* \mathbf{K} \mathbf{V}, \\ \hat{\mathbf{B}} &= \mathbf{V}^* \mathbf{B}; \quad \hat{\mathbf{C}}_p = \mathbf{C}_p \mathbf{V}, \quad \hat{\mathbf{C}}_v = \mathbf{C}_v \mathbf{V}.\end{aligned}\tag{A.5}$$

#### A.3.4 Detailierung des VAIRGA-Verfahrens

An dieser Stelle soll näher auf die beiden in Bild 4.20 hervorgehobenen Schritte eingegangen werden, da diese für eine etwaige Nachstellung des Vorgehens von Bedeutung sind. Zunächst wird die von SOPPA (2011) vorgeschlagene Methode zur Bestimmung desjenigen Entwicklungspunktes, welcher den größten geschätzten Momentenfehler aufweist, erläutert. Für diesen Punkt wird anschließend die Anzahl der Momente erhöht, um in diesem Bereich den Approximationsfehler zu verringern. Demnach ist der  $j_i$ -te Momentenfehler  $\epsilon_{j_i}(s_i)$  der Übertragungsfunktion des reduzierten Systems an den Entwicklungsstellen  $s_i$  bzgl. der  $F$ -Norm in der  $j$ -ten Iteration der inneren Schleife in Bild 4.20 über die Gleichung

$$\begin{aligned}\epsilon_{j_i}(s_i) &= \|\mathbf{H}_{j_i}(s_i) - \hat{\mathbf{H}}_{j_i}(s_i)\|_F \\ &= \|h_{\pi, j-2}(s_i) \mathbf{C}_v \mathbf{R}_{j-2}(s_i) + h_{\pi, j-1}(s_i) (\mathbf{C}_p + s_i \mathbf{C}_v) \mathbf{R}_{j-1}(s_i)\|_F\end{aligned}\tag{A.6}$$

zu bestimmen. Dabei bezeichnen  $\mathbf{H}_{ji}(s_i)$  und  $\hat{\mathbf{H}}_{ji}(s_i)$  die  $ji$ -ten Momente der Übertragungsfunktion des originalen und des reduzierten Systems 2. Ordnung. Die Blöcke  $\mathbf{R}_{j-1}(s_i)$  und  $\mathbf{R}_{j-2}(s_i)$  werden in der  $(j-1)$ -ten bzw.  $(j-2)$ -ten Iteration der inneren Schleife und die Werte der globalen Hessenbergmatrix  $h_{\pi,j-2}(s_i) = \prod_{t=1}^{j-2} \Gamma_t$  und  $h_{\pi,j-1}(s_i) = \prod_{t=1}^{j-1} \Gamma_t$  mit

$$\Gamma_t = \begin{cases} \|\mathbf{R}_t(s_i)\|_F, & \text{falls } s_i \text{ ein EP in der } t\text{-ten Iteration ist} \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

berechnet. Mit Gleichung (A.7) lässt sich der Fehler für alle potenziellen Entwicklungspunkte berechnen. Für den Punkt, welcher in der jeweiligen Iteration den größten Fehler aufweist, wird ein weiteres Moment zur Übereinstimmung gebracht, um die Approximationsqualität in diesem Bereich zu verbessern. Da die Laufvariable der inneren Iteration  $j$  mit dem Wert 1 beginnt und für die Berechnung des Fehlers die Informationen der beiden vorangegangenen Wiederholungen nötig sind, werden in den ersten beiden Durchläufen die beiden Entwicklungsstellen, die an erster und zweiter Stelle im Vektor der Entwicklungspunkte stehen, für den Momentenabgleich herangezogen.

Der zweite Schwerpunkt im VAIRGA-Verfahren liegt auf der Berechnung der jeweils neu zu berücksichtigenden Entwicklungsstellen. Die Grundidee besteht darin, als Entwicklungspunkte jeweils die berechneten Eigenwerte des in der vorherigen Iteration bestimmten reduzierten Systems zu verwenden. Dabei besteht die Herausforderung in der Identifikation der relevanten Eigenwerte für die Bestimmung der neuen Entwicklungsstellen. SOPPA (2011) schlägt hierzu folgende Vorgehensweise vor:

1. Zunächst erfolgt eine Sortierung der Eigenwerte  $\lambda_i$  nach aufsteigendem Imaginärteil. Mehrfach auftretende Eigenwerte werden nur einmal verwendet. Alle  $k$  Eigenwerte, die im betrachteten Frequenzintervall liegen, d. h. für die  $|imag(\lambda_1)| \leq |imag(\lambda_2)| \leq \dots \leq |imag(\lambda_r)| \leq 2\pi f_{max}$  gilt, werden als potenzielle Entwicklungsstellen weiter verwendet.
2. Werden innerhalb des betrachteten Frequenzbereiches weniger potenzielle neue Entwicklungsstellen gefunden als Anfangsstellen vorhanden waren, so werden aus der Menge der berechneten Eigenwerte die mit den nächsthöheren Beträgen der Imaginärteile verwendet, bis die Anzahl erreicht ist.
3. Für die Bestimmung der Dominanz der Entwicklungsstellen werden die Eigenwerte  $\lambda_i, i = 2, \dots, k-1$  mit Hilfe des Residuums

$$\mathbf{R}(\lambda_i) = \frac{(\mathbf{C}_p + \lambda_i \mathbf{C}_v) \mathbf{B}}{\lambda_i} \quad (\text{A.8})$$

gewichtet. Anschließend erfolgt die Sortierung mit Hilfe der Frobenius-Norm. Die dominanten Eigenwerte stehen somit als erste Einträge des Vektors  $s$  der potenziellen Entwicklungsstellen fest und werden damit berücksichtigt:

$$\|\mathbf{R}(\lambda_2)\|_F \geq \|\mathbf{R}(\lambda_3)\|_F \geq \dots \geq \|\mathbf{R}(\lambda_{k-1})\|_F \quad (\text{A.9})$$

4. Für eine gute Abdeckung des gewünschten Frequenzbereichs werden mit den Stellen  $s_1 = \lambda_1$  und  $s_k = \lambda_k$  der kleinste und der größte im relevanten Intervall liegende Eigenwert verwendet. Alle weiteren Entwicklungspunkte werden vom VAIRGA-Verfahren mit Hilfe der nach der Dominanz geordneten Reihe berücksichtigt<sup>1</sup>.

Diese vier Schritte werden für die Auswahl der neuen Entwicklungsstellen durchlaufen. Durch die Sortierung nach der Dominanz der Residuen wird eine schnelle Annäherung der neu ausgewählten Entwicklungsstellen an die Eigenwerte des Originalsystems erreicht. Dies wiederum stellt eine Voraussetzung für eine hohe Approximationsqualität dar.

#### A.4 Invertierung einer Matrix des $\mathbb{K}^{2 \times 2}$

Die Bildung der Inversen der Matrix  $\check{\mathbf{A}}$  aus Abschnitt 4.5.3, Gleichung 4.7 lässt sich mit Hilfe der folgenden Berechnungsvorschrift für inverse Matrizen des  $\mathbb{K}^{2 \times 2}$  am Beispiel der Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$  nachvollziehen:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

---

<sup>1</sup> In einer alternativen Variante des Algorithmus besteht die Möglichkeit, einen Distanzparameter  $\Delta$  zu verwenden, mit dessen Hilfe nur Eigenwerte verwendet werden, die einen gewissen Mindestabstand zueinander aufweisen. Dies ist relevant, wenn auf die adaptive Anpassung der Stufe zu dem Entwicklungspunkt, welcher mit Hilfe des Momentenfehlerschätzers bestimmt wurde, verzichtet wird. So werden über den Frequenzbereich verteilte Entwicklungsstellen ausgewählt, um die Approximationsqualität im geforderten Bereich zu gewährleisten. Weitere Details dazu sind SOPPA (2011) zu entnehmen.

## A.5 Ergänzende Ergebnisse

### A.5.1 Approximationsqualität der Nachgiebigkeitsfrequenzgänge des Modells der abstrahierten WZM-Struktur

Bild A.5 zeigt die Relativnachgiebigkeitsfrequenzgänge in den drei Koordinatenrichtungen x, y und z am TCP des proportional gedämpften Modells der abstrahierten Werkzeugmaschinenstruktur aus Abschnitt 6.4.2. Hierfür wurde das Übertragungsverhalten des Originalsystems mit 4983 Freiheitsgraden berechnet.

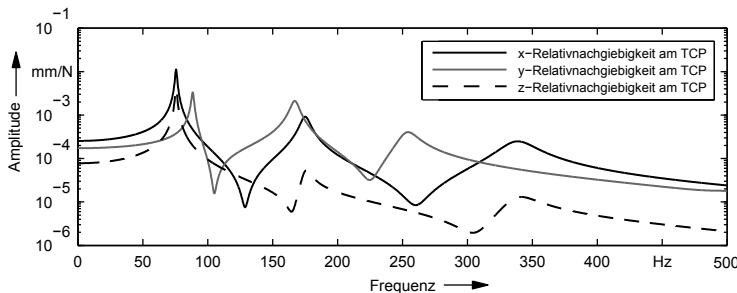
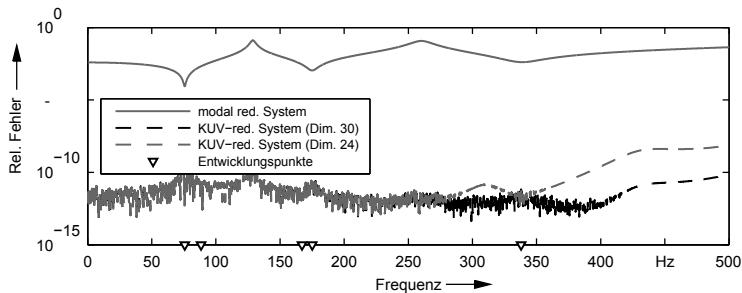
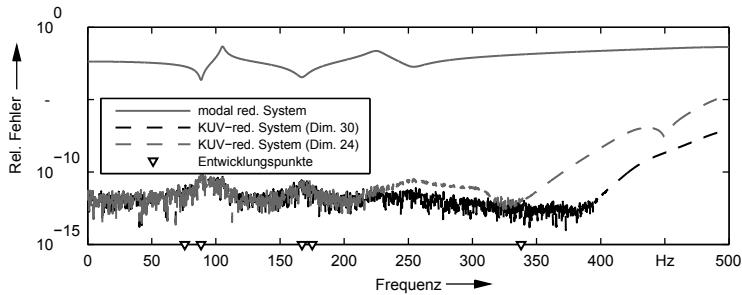


Bild A.5: Relativnachgiebigkeitsfrequenzgänge in x-, y- und z-Richtung am TCP der abstrahierten WZM-Struktur

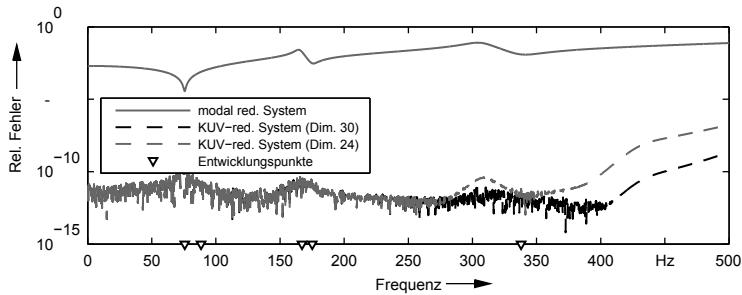
Dieses Modell wurde mit Hilfe des automatischen Krylov-Unterraum-Verfahrens auf die Zieldimension 30 reduziert (vgl. Abschnitt 6.4.2). Als Vergleich dient ein modal reduziertes Modell, für welches die 30 niederfrequentesten Eigenmoden berücksichtigt wurden. Wie auch bei der Fehlergegenüberstellung anhand des normierten Frequenzganges aller Übertragungspfade der Matrix  $\mathbf{H}$  besitzt das mit dem Krylov-Unterraum-Verfahren reduzierte System einen erheblich geringeren relativen Fehler (Bild A.6). Die gleiche Tendenz zeigt das mit Hilfe des vorgegebenen maximal zulässigen Fehlers auf Dimension 24 reduzierte System in allen drei Richtungen.



(a) Relativer Fehler der Amplitude gegenüber dem x-Nachgiebigkeitsfrequenzgang des Originalsystems



(b) Relativer Fehler der Amplitude gegenüber dem y-Nachgiebigkeitsfrequenzgang des Originalsystems



(c) Relativer Fehler der Amplitude gegenüber dem z-Nachgiebigkeitsfrequenzgang des Originalsystems

Bild A.6: Relative Approximationsfehler des modal reduzierten Systems (Dimension 30) sowie der KUV-reduzierten Systeme (Dimension 30 und 24) gegenüber dem Originalsystem

### A.5.2 Approximationsqualität der Nachgiebigkeitsfrequenzgänge des Portalfräsmaschinenmodells

Bild A.7 zeigt die Relativnachgiebigkeitsfrequenzgänge in den drei Koordinatenrichtungen x, y und z am TCP des proportional gedämpften Modells der Portalfräsmaschine aus Abschnitt 6.4.2. Hierfür wurde das Übertragungsverhalten des Originalsystems mit 88268 Freiheitsgraden berechnet.

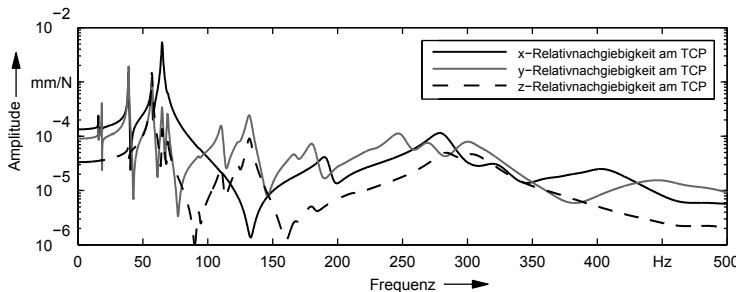
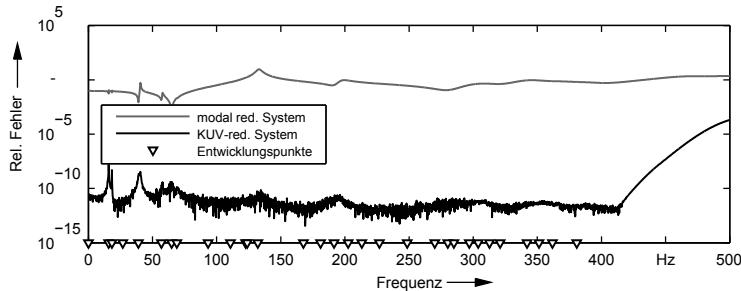
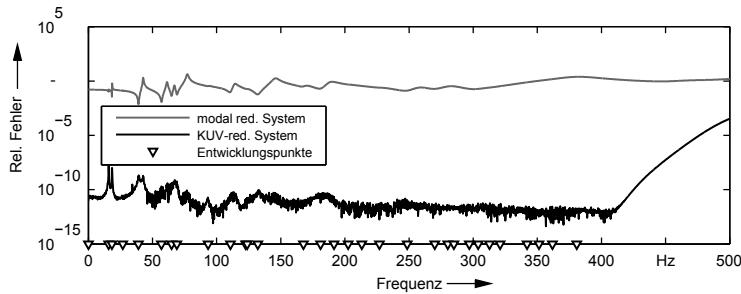


Bild A.7: Relativnachgiebigkeitsfrequenzgänge in x-, y- und z-Richtung am TCP des Portalfräsmaschinenmodells

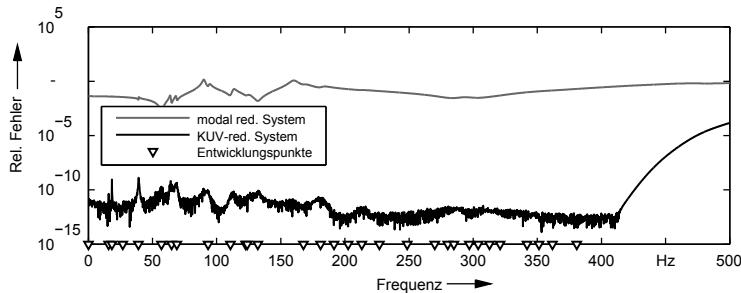
Die Gegenüberstellung der relativen Fehler des modal reduzierten Modells unter Berücksichtigung der ersten 200 Eigenmoden mit denen des mit dem Krylov-Unterraum-Verfahren auf Dimension 200 reduzierten Modells, berechnet für die Relativnachgiebigkeitsfrequenzgänge am TCP in den Raumrichtungen x, y und z, zeigt die großen Vorteile zugunsten des Krylov-Unterraum-basierten Verfahrens auf (Bild A.8). Dabei fällt auf, dass der modale Fehler teilweise einen Betrag größer 1 aufweist, was einer 100 %igen Abweichung vom Originalsystem entspricht. Diese Problematik wird bei den Krylov-Unterraum-Verfahren aufgrund der eingesetzten Fehlerschranken verhindert (siehe Abschnitt 6.4.4).



(a) Relativer Fehler der Amplitude gegenüber dem x-Nachgiebigkeitsfrequenzgang des Originalsystems



(b) Relativer Fehler der Amplitude gegenüber dem y-Nachgiebigkeitsfrequenzgang des Originalsystems



(c) Relativer Fehler der Amplitude gegenüber dem z-Nachgiebigkeitsfrequenzgang des Originalsystems

Bild A.8: Relative Approximationsfehler des modal reduzierten Systems (Dimension 200) sowie des KUV-reduzierten Systems (Dimension 200) gegenüber dem Originalsystem

### A.5.3 Approximationsqualität bei Modellen mit Starrkörpermoden

Da bei Modellen mit Starrkörpermoden die Eigenwerte bei 0 Hz mit Hilfe eines eigenen Entwicklungspunktes im reduzierten Modell erhalten bleiben, stellt sich die Verteilung der Entwicklungspunkte über den Frequenzbereich im Vergleich zur automatischen Reduktion von Systemen ohne Starrkörpermoden leicht anders dar. Ggf. muss ein weiterer Punkt hinzugenommen werden, um den geforderten maximalen Fehler zu unterschreiten. Dies resultiert in einer vergrößerten Dimension, welche aber zu einem geringeren Fehler in einem größeren Frequenzintervall führt (Bild A.9).

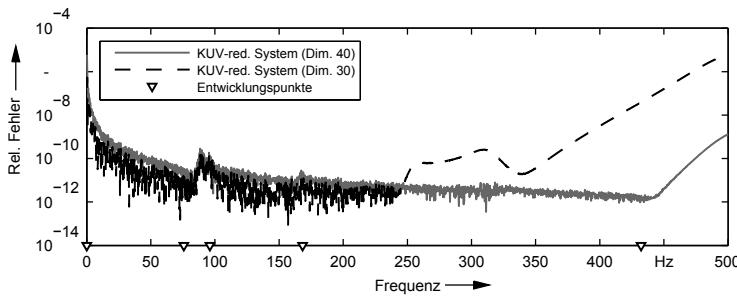


Bild A.9: Vergleich des relativen Fehlers gegenüber dem Mobilitätsfrequenzgang der Motorwelle des mittleren Beispielsystems (Bild 6.14) eines auf Dimension 30 reduzierten und eines mit max. zulässigem Fehler von  $10^{-3}$  reduzierten Systems (Dimension 40)

Mit den Krylov-Unterraum-Verfahren lassen sich auch problemlos Modelle reduzieren, welche mehr als nur eine ungefesselte Motorwelle und somit mehr als eine Starrkörpermode besitzen. In Bild A.10 sind die Reduktionsergebnisse des Portalfräsmaschinenmodells, bei dem sowohl die x- als auch die y-Achse ungefesselt modelliert wurde, anhand des normierten Frequenzganges dargestellt. Mehrere Starrkörpermoden der Vorschubachsen sind bspw. für die Simulation von Kreisformtests nötig, welche für die Parametrierung von Reglern angewendet wird. Auf diese Weise entsteht für dieses Beispielmodell ein  $5 \times 7$ -MIMO-System (siehe Tabelle 6.1).

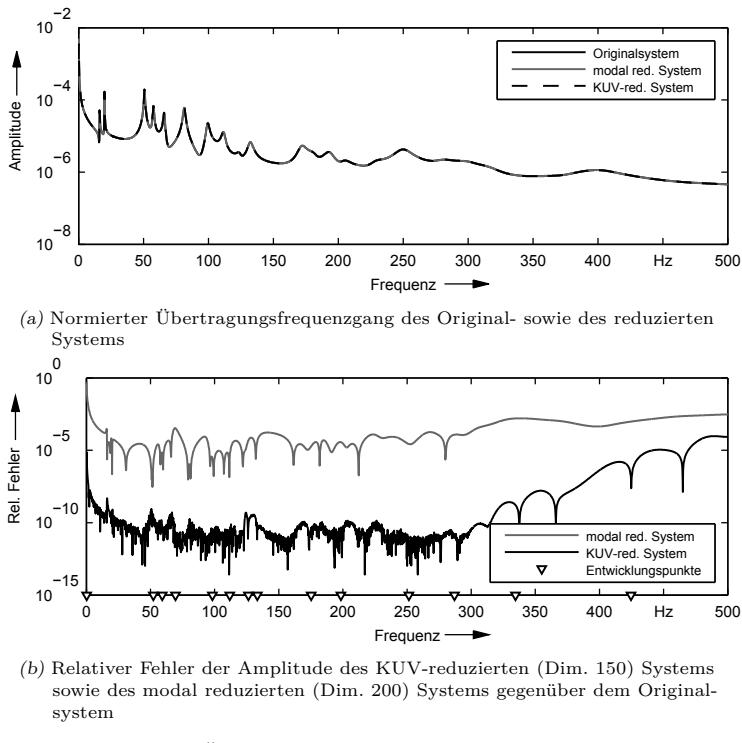


Bild A.10: Normierter Übertragungsfrequenzgang des Portalfräsmaschinenmodells mit zwei Starrkörpermoden zur Verfahrsimulation einer x- sowie einer y-Bewegung und zugehöriger Reduktionsfehler

#### A.5.4 Auswirkung der Dimensionsbegrenzung bei der Reduktion des $(9 \times 9)$ -Systems

Ergänzend zu den Erläuterungen in Abschnitt 6.4.6 sind in Bild A.11 der normierte Übertragungsfrequenzgang des  $(9 \times 9)$ -Systems des Portalfräsmaschinenmodells sowie die relativen Fehler des automatisch KUV-reduzierten Systems (Dim. 216), des mit dem Krylov-Unterraum-Verfahren reduzierten, aber auf Dimension 100 begrenzten sowie des modal reduzierten (200 Eigenmoden) Systems dargestellt.

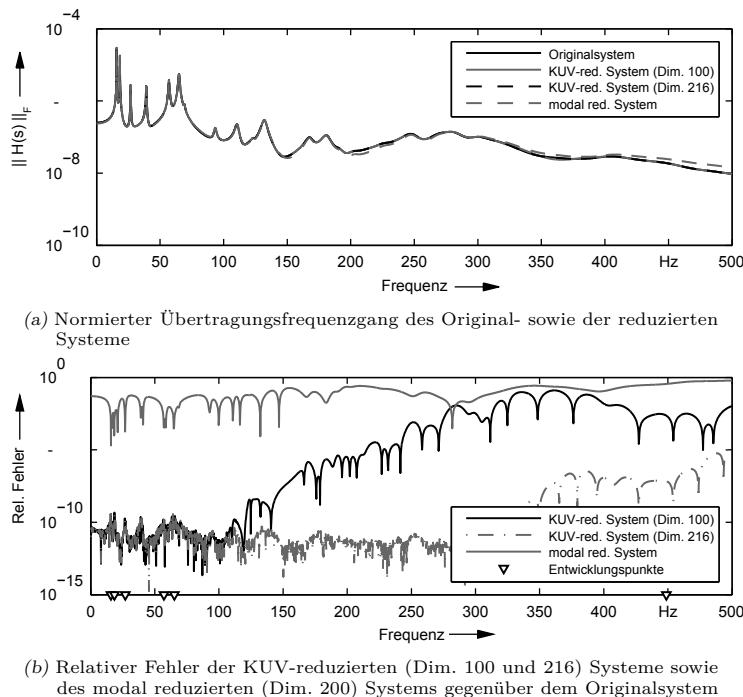


Bild A.11: Auswirkungen der Dimensionsbegrenzung auf den relativen Fehler, dargestellt am normierten Übertragungsfrequenzgang des Portalfräsmaschinenmodells



## Verzeichnis betreuter Studienarbeiten

Im Rahmen dieser Dissertation entstanden am Institut für Werkzeugmaschinen und Betriebswissenschaften der Technischen Universität München (*iwb*) unter wesentlicher wissenschaftlicher, fachlicher und inhaltlicher Anleitung des Autors die im Folgenden aufgeführten studentischen Arbeiten, in welchen verschiedene Fragestellungen zum Einsatz von Ordnungsreduktionsverfahren für die Simulation von Werkzeugmaschinen untersucht wurden. Deren Ergebnisse sind in Teilen in das vorliegende Dokument eingeflossen. Der Autor dankt allen Studierenden für ihr Engagement bei der Unterstützung dieser wissenschaftlichen Arbeit.

---

<b>Studierende(r)</b>	<b>Studienarbeit</b>
Hunzelmann T.	Vergleich von Ordnungsreduktionsverfahren für Strukturmodelle mit unterschiedlichen Dämpfungsansätzen, Semesterarbeit, abgegeben im Oktober 2012.
Sauerer B.	Einsatz moderner Modellordnungsreduktionsverfahren für die effiziente Simulation von Werkzeugmaschinen, Diplomarbeit, abgegeben im Dezember 2011.
Kapp M.	Untersuchung der Auswirkungen moderner Reduktionsverfahren auf die gekoppelte Simulation von Werkzeugmaschine und Zerspanprozess, Semesterarbeit, abgegeben im Juli 2011.
Volpert G.	Einsatz moderner Reduktionsmethoden für die Reglerauslegung von Werkzeugmaschinen, Semesterarbeit, abgegeben im Juli 2011.
Li H.	Finite-Elemente-Simulation mit ordnungsreduzierten Strukturkomponenten, Semesterarbeit, abgegeben im Mai 2011.
Hepp D.	Finite-Elemente-Simulation mit ordnungsreduzierten Strukturkomponenten, Semesterarbeit, abgegeben im November 2009.
Roth A.	Untersuchung der Approximationsqualität ordnungsreduzierter FEM-Strukturmodelle für statische und dynamische Lastfälle, Semesterarbeit, abgegeben im Februar 2009.

---



# Seminarberichte IWB

herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. Gunther Reinhart und Prof. Dr.-Ing. Michael Zäh,  
Institut für Werkzeugmaschinen und Betriebswissenschaften der Technischen Universität München

Seminarberichte IWB sind erhältlich im Buchhandel oder beim  
Herbert Utz Verlag, München, Fax 089-277791-01, [info@utzverlag.de](mailto:info@utzverlag.de), [www.utzverlag.de](http://www.utzverlag.de)

- 1 Innovative Montagesysteme - Anlagengestaltung, -bewertung und -überwachung  
115 Seiten · ISBN 3-931327-0-9
- 2 Integriertes Produktmodell - Von der Idee zum fertigen Produkt  
82 Seiten · ISBN 3-931327-02-7
- 3 Konstruktion von Werkzeugmaschinen - Berechnung, Simulation und Optimierung  
110 Seiten · ISBN 3-931327-03-5
- 4 Simulation - Einsatzmöglichkeiten und Erfahrungsberichte  
134 Seiten · ISBN 3-931327-04-3
- 5 Optimierung der Kooperation in der Produktentwicklung  
95 Seiten · ISBN 3-931327-05-1
- 6 Materialbearbeitung mit Laser - von der Planung zur Anwendung  
86 Seiten · ISBN 3-931327-76-0
- 7 Dynamisches Verhalten von Werkzeugmaschinen  
80 Seiten · ISBN 3-931327-77-9
- 8 Qualitätsmanagement - der Weg ist das Ziel  
130 Seiten · ISBN 3-931327-78-7
- 9 Installationstechnik an Werkzeugmaschinen - Analysen und Konzepte  
120 Seiten · ISBN 3-931327-79-5
- 10 3D-Simulation - Schneller, sicherer und kostengünstiger zum Ziel  
90 Seiten · ISBN 3-931327-10-8
- 11 Unternehmensorganisation - Schlüssel für eine effiziente Produktion  
110 Seiten · ISBN 3-931327-11-6
- 12 Autonome Produktionsysteme  
100 Seiten · ISBN 3-931327-12-4
- 13 Planung von Montageanlagen  
130 Seiten · ISBN 3-931327-13-2
- 14 Nicht erschienen - wird nicht erscheinen
- 15 Flexible fluide Kleb/Dichtstoffe - Dosierung und Prozeßgestaltung  
80 Seiten · ISBN 3-931327-15-9
- 16 Time to Market - Von der Idee zum Produktionsstart  
80 Seiten · ISBN 3-931327-16-7
- 17 Industrieramik in Forschung und Praxis - Probleme, Analysen und Lösungen  
80 Seiten · ISBN 3-931327-17-5
- 18 Das Unternehmen im Internet - Chancen für produzierende Unternehmen  
165 Seiten · ISBN 3-931327-18-3
- 19 Leittechnik und Informationslogistik - mehr Transparenz in der Fertigung  
85 Seiten · ISBN 3-931327-19-1
- 20 Dezentrale Steuerungen in Produktionsanlagen – Plug & Play – Vereinfachung von Entwicklung und Inbetriebnahme  
105 Seiten · ISBN 3-931327-20-5
- 21 Rapid Prototyping - Rapid Tooling - Schnell zu funktionalen Prototypen  
95 Seiten · ISBN 3-931327-21-3
- 22 Mikrotechnik für die Produktion - Greifbare Produkte und Anwendungspotentiale  
95 Seiten · ISBN 3-931327-22-1
- 24 EDM Engineering Data Management  
195 Seiten · ISBN 3-931327-24-8
- 25 Rationelle Nutzung der Simulationstechnik - Entwicklungstrends und Praxisbeispiele  
152 Seiten · ISBN 3-931327-25-6
- 26 Alternative Dichtungssysteme - Konzepte zur Dichtungsmontage und zum Dichtmittelauftrag  
110 Seiten · ISBN 3-931327-26-4
- 27 Rapid Prototyping - Mit neuen Technologien schnell vom Entwurf zum Serienprodukt  
111 Seiten · ISBN 3-931327-27-2
- 28 Rapid Tooling - Mit neuen Technologien schnell vom Entwurf zum Serienprodukt  
154 Seiten · ISBN 3-931327-28-0
- 29 Installationstechnik an Werkzeugmaschinen - Abschlußseminar  
156 Seiten · ISBN 3-931327-29-9
- 30 Nicht erschienen - wird nicht erscheinen
- 31 Engineering Data Management (EDM) - Erfahrungsberichte und Trends  
183 Seiten · ISBN 3-931327-31-0
- 32 Nicht erschienen - wird nicht erscheinen
- 33 3D-CAD - Mehr als nur eine dritte Dimension  
181 Seiten · ISBN 3-931327-33-7
- 34 Laser in der Produktion - Technologische Randbedingungen für den wirtschaftlichen Einsatz  
102 Seiten · ISBN 3-931327-34-5
- 35 Ablaufsimulation - Anlagen effizient und sicher planen und betreiben  
129 Seiten · ISBN 3-931327-35-3
- 36 Moderne Methoden zur Montageplanung - Schlüssel für eine effiziente Produktion  
124 Seiten · ISBN 3-931327-36-1
- 37 Wettbewerbsfaktor Verfügbarkeit - Produktivitätsteigerung durch technische und organisatorische Ansätze  
95 Seiten · ISBN 3-931327-37-X
- 38 Rapid Prototyping - Effizienter Einsatz von Modellen in der Produktentwicklung  
128 Seiten · ISBN 3-931327-38-8
- 39 Rapid Tooling - Neue Strategien für den Werkzeug- und Formenbau  
130 Seiten · ISBN 3-931327-39-6
- 40 Erfolgreich kooperieren in der produzierenden Industrie - Flexibler und schneller mit modernen Kooperationen  
160 Seiten · ISBN 3-931327-40-X
- 41 Innovative Entwicklung von Produktionsmaschinen  
146 Seiten · ISBN 3-89675-041-0
- 42 Stückzahlflexible Montagesysteme  
139 Seiten · ISBN 3-89675-042-9
- 43 Produktivität und Verfügbarkeit ...durch Kooperation steigern  
120 Seiten · ISBN 3-89675-043-7
- 44 Automatisierte Mikromontage - Handhaben und Positionieren von Mikrobauteilen  
125 Seiten · ISBN 3-89675-044-5
- 45 Produzieren in Netzwerken - Lösungsansätze, Methoden, Praxisbeispiele  
173 Seiten · ISBN 3-89675-045-3
- 46 Virtuelle Produktion - Ablaufsimulation  
108 Seiten · ISBN 3-89675-046-1

- 47 **Virtuelle Produktion - Prozeß- und Produktsimulation**  
131 Seiten · ISBN 3-89675-047-X
- 48 **Sicherheitstechnik an Werkzeugmaschinen**  
106 Seiten · ISBN 3-89675-048-8
- 49 **Rapid Prototyping - Methoden für die reaktionsfähige Produktentwicklung**  
150 Seiten · ISBN 3-89675-049-6
- 50 **Rapid Manufacturing - Methoden für die reaktionsfähige Produktion**  
121 Seiten · ISBN 3-89675-050-X
- 51 **Flexibles Kleben und Dichten - Produkt- & Prozeßgestaltung, Mischverbindungen, Qualitätskontrolle**  
137 Seiten · ISBN 3-89675-051-8
- 52 **Rapid Manufacturing - Schnelle Herstellung von Klein- und Prototypenserenien**  
124 Seiten · ISBN 3-89675-052-6
- 53 **Mischverbindungen - Werkstoffauswahl, Verfahrensauswahl, Umsetzung**  
107 Seiten · ISBN 3-89675-054-2
- 54 **Virtuelle Produktion - Integrierte Prozess- und Produktsimulation**  
133 Seiten · ISBN 3-89675-054-2
- 55 **e-Business in der Produktion - Organisationskonzepte, IT-Lösungen, Praxisbeispiele**  
150 Seiten · ISBN 3-89675-055-0
- 56 **Virtuelle Produktion - Ablaufsimulation als planungsbegleitendes Werkzeug**  
150 Seiten · ISBN 3-89675-056-9
- 57 **Virtuelle Produktion - Datenintegration und Benutzerschnittstellen**  
150 Seiten · ISBN 3-89675-057-7
- 58 **Rapid Manufacturing - Schnelle Herstellung qualitativ hochwertiger Bauteile oder Kleinserien**  
169 Seiten · ISBN 3-89675-058-7
- 59 **Automatisierte Mikromontage - Werkzeuge und Fügetechnologien für die Mikrosystemtechnik**  
114 Seiten · ISBN 3-89675-059-3
- 60 **Mechatronische Produktionsysteme - Genauigkeit gezielt entwickeln**  
131 Seiten · ISBN 3-89675-060-7
- 61 **Nicht erscheinen - wird nicht erscheinen**
- 62 **Rapid Technologien - Anspruch - Realität - Technologien**  
100 Seiten · ISBN 3-89675-062-3
- 63 **Fabrikplanung 2002 - Visionen - Umsetzung - Werkzeuge**  
124 Seiten · ISBN 3-89675-063-1
- 64 **Mischverbindungen - Einsatz und Innovationspotenzial**  
143 Seiten · ISBN 3-89675-064-X
- 65 **Fabrikplanung 2003 - Basis für Wachstum - Erfahrungen Werkzeuge Visionen**  
136 Seiten · ISBN 3-89675-065-8
- 66 **Mit Rapid Technologien zum Aufschwung - Neue Rapid Technologien und Verfahren, Neue Qualitäten, Neue Möglichkeiten, Neue Anwendungsfelder**  
185 Seiten · ISBN 3-89675-066-6
- 67 **Mechatronische Produktionsysteme - Die Virtuelle Werkzeugmaschine: Mechatronisches Entwicklungsvergehen, Integrierte Modellbildung, Applikationsfelder**  
148 Seiten · ISBN 3-89675-067-4
- 68 **Virtuelle Produktion - Nutzenpotenziale im Lebenszyklus der Fabrik**  
139 Seiten · ISBN 3-89675-068-2
- 69 **Kooperationsmanagement in der Produktion - Visionen und Methoden zur Kooperation - Geschäftsmodelle und Rechtsformen für die Kooperation - Kooperation entlang der Wertschöpfungskette**  
134 Seiten · ISBN 3-89675-069-0
- 70 **Mechatronik - Strukturdynamik von Werkzeugmaschinen**  
161 Seiten · ISBN 3-89675-070-4
- 71 **Klebtechnik - Zerstörungsfreie Qualitätssicherung beim flexibel automatisierten Kleben und Dichten**  
ISBN 3-89675-071-2 - vergriffen
- 72 **Fabrikplanung 2004 Erfolgsfaktor im Wettbewerb - Erfahrungen - Werkzeuge - Visionen**  
ISBN 3-89675-072-0 - vergriffen
- 73 **Rapid Manufacturing Vom Prototyp zur Produktion - Erwartungen - Erfahrungen - Entwicklungen**  
179 Seiten · ISBN 3-89675-073-9
- 74 **Virtuelle Produktionssystemplanung - Virtuelle Inbetriebnahme und Digitale Fabrik**  
133 Seiten · ISBN 3-89675-074-7
- 75 **Nicht erschienen - wird nicht erscheinen**
- 76 **Berührungslose Handhabung - Vom Wafer zur Glaslinse, von der Kapsel zur aseptischen Ampulle**  
95 Seiten · ISBN 3-89675-076-3
- 77 **ERP-Systeme - Einführung in die betriebliche Praxis - Erfahrungen, Best Practices, Visionen**  
153 Seiten · ISBN 3-89675-077-7
- 78 **Mechatronik - Trends in der interdisziplinären Entwicklung von Werkzeugmaschinen**  
155 Seiten · ISBN 3-89675-078-X
- 79 **Produktionsmanagement**  
267 Seiten · ISBN 3-89675-079-8
- 80 **Rapid Manufacturing - Fertigungsverfahren für alle Ansprüche**  
154 Seiten · ISBN 3-89675-080-1
- 81 **Rapid Manufacturing - Heutige Trends - Zukünftige Anwendungsfelder**  
172 Seiten · ISBN 3-89675-081-X
- 82 **Produktionsmanagement - Herausforderung Variantenmanagement**  
100 Seiten · ISBN 3-89675-082-8
- 83 **Mechatronik - Optimierungspotenzial der Werkzeugmaschine nutzen**  
160 Seiten · ISBN 3-89675-083-6
- 84 **Virtuelle Inbetriebnahme - Von der Kür zur Pflicht?**  
104 Seiten · ISBN 978-3-89675-084-6
- 85 **3D-Erfahrungsförum - Innovation im Werkzeug- und Formenbau**  
375 Seiten · ISBN 978-3-89675-085-3
- 86 **Rapid Manufacturing - Erfolgreich produzieren durch innovative Fertigung**  
162 Seiten · ISBN 978-3-89675-086-0
- 87 **Produktionsmanagement - Schlank im Mittelstand**  
102 Seiten · ISBN 978-3-89675-087-7
- 88 **Mechatronik - Vorsprung durch Simulation**  
134 Seiten · ISBN 978-3-89675-088-4
- 89 **RFID in der Produktion - Wertschöpfung effizient gestalten**  
122 Seiten · ISBN 978-3-89675-089-1
- 90 **Rapid Manufacturing und Digitale Fabrik - Durch Innovation schnell und flexibel am Markt**  
100 Seiten · ISBN 978-3-89675-090-7
- 91 **Robotik in der Kleinserienproduktion - Die Zukunft der Automatisierungstechnik**  
ISBN 978-3-89675-091-4
- 92 **Rapid Manufacturing - Ressourceneffizienz durch generative Fertigung im Werkzeug- und Formenbau**  
ISBN 978-3-89675-092-1
- 93 **Handhabungstechnik - Innovative Greiftechnik für komplexe Handhabungsaufgaben**  
136 Seiten · ISBN 978-3-89675-093-8
- 94 **iwb Seminarreihe 2009 Themengruppe Werkzeugmaschinen**  
245 Seiten · ISBN 978-3-89675-094-5
- 95 **Zuführtechnik - Herausforderung der automatisierten Montage!**  
111 Seiten · ISBN 978-3-89675-095-2
- 96 **Risikobewertung bei Entscheidungen im Produktionsumfeld - Seminar »Risiko und Chance«**  
151 Seiten · ISBN 978-3-89675-096-9
- 97 **Seminar Rapid Manufacturing 2010 - Innovative Einsatzmöglichkeiten durch neue Werkstoffe bei Schichtbauverfahren**  
180 Seiten · ISBN 978-3-89675-097-6

- 98 Handhabungstechnik - Der Schlüssel für eine automatisierte Herstellung von Composite-Bauteilen  
260 Seiten · ISBN 978-3-89675-098-3
- 99 Abschlussveranstaltung SimuSint 2010 - Modulares Simulationsystem für das Strahlschmelzen  
270 Seiten · ISBN 978-3-89675-099-0
- 100 Additive Fertigung: Innovative Lösungen zur Steigerung der Bauteilqualität bei additiven Fertigungsverfahren  
200 Seiten · ISBN 978-3-8316-4114-7
- 101 Mechatronische Simulation in der industriellen Anwendung  
91 Seiten · ISBN 978-3-8316-4149-9
- 102 Wissensmanagement in produzierenden Unternehmen  
ISBN 978-3-8316-4169-7
- 103 Additive Fertigung: Bauteil- und Prozessauslegung für die wirtschaftliche Fertigung  
ISBN 978-3-8316-4188-8
- 104 Ressourceneffizienz in der Lebensmittelkette  
ISBN 978-3-8316-4192-5
- 105 Werkzeugmaschinen: Leichter schwer zerspanen! - Herausforderungen und Lösungen für die Zerspanung von Hochleistungswerkstoffen  
120 Seiten · ISBN 978-3-8316-4217-5
- 106 Batterieproduktion - Vom Rohstoff bis zum Hochvoltspeicher  
108 Seiten · ISBN 978-3-8316-4221-2
- 107 Batterieproduktion - Vom Rohstoff bis zum Hochvoltspeicher  
150 Seiten · ISBN 978-3-8316-4249-6

## Forschungsberichte IWB Band 1-121

herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. J. Milberg und Prof. Dr.-Ing. G. Reinhart,  
Institut für Werkzeugmaschinen und Betriebswissenschaften der Technischen Universität München

Band 1 -121 sind im Springer Verlag, Berlin, Heidelberg erschienen.

- 1 Streifinger, E.: Beitrag zur Sicherung der Zuverlässigkeit und Verfügbarkeit moderner Fertigungsmittel  
1986 - 72 Abb. - 167 Seiten · ISBN 3-540-16391-3
- 2 Fuchsberger, A.: Untersuchung der spanenden Bearbeitung von Knochen  
1986 - 90 Abb. - 175 Seiten · ISBN 3-540-16392-1
- 3 Maier, C.: Montageautomatisierung am Beispiel des Schraubens mit Industrierobotern  
1986 - 77 Abb. - 144 Seiten · ISBN 3-540-16393-X
- 4 Summer, H.: Modell zur Berechnung verzweigter Antriebsstrukturen  
1986 - 74 Abb. - 197 Seiten · ISBN 3-540-16394-8
- 5 Simon, W.: Elektrische Vorschubantriebe an NC-Systemen  
1986 - 141 Abb. - 198 Seiten · ISBN 3-540-16693-9
- 6 Büchs, S.: Analytische Untersuchungen zur Technologie der Kugelbearbeitung  
1986 - 74 Abb. - 173 Seiten · ISBN 3-540-16694-7
- 7 Hunzinger, J.: Schneiderodierte Oberflächen  
1986 - 79 Abb. - 162 Seiten · ISBN 3-540-16695-5
- 8 Pilland, U.: Echtzeit-Kollisionsschutz an NC-Drehmaschinen  
1986 - 54 Abb. - 127 Seiten · ISBN 3-540-17274-2
- 9 Barthelmeß, P.: Montagegerechte Konstruktionen durch die Integration von Produkt- und Montageprozeßgestaltung  
1987 - 70 Abb. - 144 Seiten · ISBN 3-540-18120-2
- 10 Reithofer, N.: Nutzungssicherung von flexibel automatisierten Produktionsanlagen  
1987 - 84 Abb. - 176 Seiten · ISBN 3-540-18440-6
- 11 Diess, H.: Rechnerunterstützte Entwicklung flexibel automatisierter Montageprozesse  
1988 - 56 Abb. - 144 Seiten · ISBN 3-540-18799-5
- 12 Reinhart, G.: Flexible Automatisierung der Konstruktion und Fertigung elektrischer Leitungssätze  
1988 - 112 Abb. - 197 Seiten · ISBN 3-540-19003-1
- 13 Bürstner, H.: Investitionsentscheidung in der rechnerintegrierten Produktion  
1988 - 74 Abb. - 190 Seiten · ISBN 3-540-19099-6
- 14 Groha, A.: Universelles Zellenrechnerkonzept für flexible Fertigungssysteme  
1988 - 74 Abb. - 153 Seiten · ISBN 3-540-19182-8
- 15 Riese, K.: Klipsmontage mit Industrierobotern  
1988 - 92 Abb. - 150 Seiten · ISBN 3-540-19183-6
- 16 Lutz, P.: Leitsysteme für rechnerintegrierte Auftragsabwicklung  
1988 - 44 Abb. - 144 Seiten · ISBN 3-540-19260-3
- 17 Klippel, C.: Mobiler Roboter im Materialfluß eines flexiblen Fertigungssystems  
1988 - 86 Abb. - 164 Seiten · ISBN 3-540-50468-0
- 18 Rascher, R.: Experimentelle Untersuchungen zur Technologie der Kugelherstellung  
1989 - 110 Abb. - 200 Seiten · ISBN 3-540-51301-9
- 19 Heusler, H.-J.: Rechnerunterstützte Planung flexibler Montagesysteme  
1989 - 43 Abb. - 154 Seiten · ISBN 3-540-51723-5
- 20 Kirchknopf, P.: Ermittlung modularer Parameter aus Übertragungsfrequenzgängen  
1989 - 57 Abb. - 157 Seiten · ISBN 3-540-51724-3
- 21 Sauerer, Ch.: Beitrag für ein Zerspanprozeßmodell Metallbandsägen  
1990 - 89 Abb. - 166 Seiten · ISBN 3-540-51868-1
- 22 Karstedt, K.: Positionsbestimmung von Objekten in der Montage- und Fertigung automatisierung  
1990 - 92 Abb. - 157 Seiten · ISBN 3-540-51879-7
- 23 Peiker, St.: Entwicklung eines integrierten NC-Planungssystems  
1990 - 66 Abb. - 180 Seiten · ISBN 3-540-51880-0
- 24 Schugmann, R.: Nachgiebige Werkzeugaufhängungen für die automatische Montage  
1990 - 71 Abb. - 155 Seiten · ISBN 3-540-52138-0
- 25 Wrba, P.: Simulation als Werkzeug in der Handhabungstechnik  
1990 - 125 Abb. - 178 Seiten · ISBN 3-540-52231-X
- 26 Eibelshäuser, P.: Rechnerunterstützte experimentelle Modalanalyse mittels gestufter Sinusanregung  
1990 - 79 Abb. - 156 Seiten · ISBN 3-540-52451-7
- 27 Prasch, J.: Computerunterstützte Planung von chirurgischen Eingriffen in der Orthopädie  
1990 - 113 Abb. - 164 Seiten · ISBN 3-540-52543-2

- 28 Teich, K.: Prozeßkommunikation und Rechnerverbund in der Produktion  
1990 - 52 Abb. - 158 Seiten - ISBN 3-540-52764-8
- 29 Pfrang, W.: Rechnergestützte und graphische Planung manueller und teilautomatisierter Arbeitsplätze  
1990 - 59 Abb. - 153 Seiten - ISBN 3-540-52829-6
- 30 Tauber, A.: Modellbildung kinematischer Strukturen als Komponente der Montageplanung  
1990 - 93 Abb. - 190 Seiten - ISBN 3-540-52911-X
- 31 Jäger, A.: Systematische Planung komplexer Produktionssysteme  
1991 - 75 Abb. - 148 Seiten - ISBN 3-540-53021-5
- 32 Hartberger, H.: Wissensbasierte Simulation komplexer Produktionssysteme  
1991 - 58 Abb. - 154 Seiten - ISBN 3-540-53326-5
- 33 Tuzcek, H.: Inspektion von Karosseriepreßteilen auf Risse und Einschnürungen mittels Methoden der Bildverarbeitung  
1992 - 125 Abb. - 179 Seiten - ISBN 3-540-53965-4
- 34 Fischbacher, J.: Planungsstrategien zur störungstechnischen Optimierung von Reinraum-Fertigungssräten  
1991 - 60 Abb. - 166 Seiten - ISBN 3-540-54027-X
- 35 Moser, O.: 3D-Echtzeitkollisionschutz für Drehmaschinen  
1991 - 66 Abb. - 177 Seiten - ISBN 3-540-54076-8
- 36 Naber, H.: Aufbau und Einsatz eines mobilen Roboters mit unabhängiger Lokomotions- und Manipulationskomponente  
1991 - 85 Abb. - 139 Seiten - ISBN 3-540-54216-7
- 37 Kupec, Th.: Wissensbasiertes Leitsystem zur Steuerung flexibler Fertigungsanlagen  
1991 - 68 Abb. - 150 Seiten - ISBN 3-540-54260-4
- 38 Maulhardt, U.: Dynamisches Verhalten von Kreissägen  
1991 - 109 Abb. - 159 Seiten - ISBN 3-540-54365-1
- 39 Götz, R.: Strukturierte Planung flexibel automatisierter Montagesysteme für flächige Bauteile  
1991 - 86 Abb. - 201 Seiten - ISBN 3-540-54401-1
- 40 Koepfer, Th.: 3D-grafisch-interaktive Arbeitsplanung - ein Ansatz zur Aufhebung der Arbeitsteilung  
1991 - 74 Abb. - 126 Seiten - ISBN 3-540-54436-4
- 41 Schmidt, M.: Konzeption und Einsatzplanung flexibel automatisierter Montagesysteme  
1992 - 108 Abb. - 168 Seiten - ISBN 3-540-55025-9
- 42 Burger, C.: Produktionsregelung mit entscheidungsunterstützenden Informationssystemen  
1992 - 94 Abb. - 186 Seiten - ISBN 3-540-55187-5
- 43 Hößmann, J.: Methodik zur Planung der automatischen Montage von nicht formstabilen Bauteilen  
1992 - 73 Abb. - 168 Seiten - ISBN 3-540-5520-0
- 44 Petry, M.: Systematik zur Entwicklung eines modularen Programmbaukastens für robotergeführte Klebefprozesse  
1992 - 106 Abb. - 139 Seiten - ISBN 3-540-55374-6
- 45 Schönecker, W.: Integrierte Diagnose in Produktionszellen  
1992 - 87 Abb. - 159 Seiten - ISBN 3-540-55375-4
- 46 Bick, W.: Systematische Planung hybrider Montagesysteme unter Berücksichtigung der Ermittlung des optimalen Automatisierungsgrades  
1992 - 70 Abb. - 156 Seiten - ISBN 3-540-55378-0
- 47 Gebauer, L.: Prozeßuntersuchungen zur automatisierten Montage von optischen Linsen  
1992 - 84 Abb. - 150 Seiten - ISBN 3-540-55378-9
- 48 Schrüfer, N.: Erstellung eines 3D-Simulationssystems zur Reduzierung von Rüstzeiten bei der NC-Bearbeitung  
1992 - 103 Abb. - 161 Seiten - ISBN 3-540-55431-9
- 49 Wisbacher, J.: Methoden zur rationalen Automatisierung der Montage von Schnellbefestigungselementen  
1992 - 77 Abb. - 176 Seiten - ISBN 3-540-55512-9
- 50 Garnich, F.: Laserbearbeitung mit Robotern  
1992 - 110 Abb. - 184 Seiten - ISBN 3-540-55513-7
- 51 Eubert, P.: Digitale Zustandesregelung elektrischer Vorschubantriebe  
1992 - 89 Abb. - 159 Seiten - ISBN 3-540-44441-2
- 52 Glaas, W.: Rechnerintegrierte Kabelsatzfertigung  
1992 - 67 Abb. - 140 Seiten - ISBN 3-540-55749-0
- 53 Helm, H.J.: Ein Verfahren zur On-Line Fehlererkennung und Diagnose  
1992 - 60 Abb. - 135 Seiten - ISBN 3-540-55750-4
- 54 Lang, Ch.: Wissensbasierte Unterstützung der Verfügbarkeitsplanung  
1992 - 75 Abb. - 150 Seiten - ISBN 3-540-55751-2
- 55 Schuster, G.: Rechnergestütztes Planungssystem für die flexibel automatisierte Montage  
1992 - 67 Abb. - 135 Seiten - ISBN 3-540-55830-6
- 56 Bomm, H.: Ein Ziel- und Kennzahlensystem zum Investitionscontrolling komplexer Produktionssysteme  
1992 - 87 Abb. - 195 Seiten - ISBN 3-540-55964-7
- 57 Wendt, A.: Qualitätssicherung in flexibel automatisierten Montagesystemen  
1992 - 74 Abb. - 179 Seiten - ISBN 3-540-56044-0
- 58 Hansmaier, H.: Rechnergestütztes Verfahren zur Geräuschminderung  
1993 - 67 Abb. - 156 Seiten - ISBN 3-540-56053-2
- 59 Dilling, U.: Planung von Fertigungssystemen unterstützt durch Wirtschaftssimulationen  
1993 - 72 Abb. - 146 Seiten - ISBN 3-540-56307-5
- 60 Strohmayr, R.: Rechnergestützte Auswahl und Konfiguration von Zubringereinrichtungen  
1993 - 80 Abb. - 152 Seiten - ISBN 3-540-56652-X
- 61 Glas, J.: Standardisierte Aufbau anwendungsspezifischer Zellenrechnersoftware  
1993 - 80 Abb. - 145 Seiten - ISBN 3.540-56890-5
- 62 Stetter, R.: Rechnergestützte Simulationswerkzeuge zur Effizienzsteigerung des Industrieroboterbetriebs  
1994 - 91 Abb. - 146 Seiten - ISBN 3-540-56889-1
- 63 Dirndorfer, A.: Robotersysteme zur förderbandsynchronen Montage  
1993 - 76 Abb. - 144 Seiten - ISBN 3-540-57031-4
- 64 Wiedemann, M.: Simulation des Schwingungsverhaltens spanender Werkzeugmaschinen  
1993 - 81 Abb. - 137 Seiten - ISBN 3-540-57177-9
- 65 Woenckhaus, Ch.: Rechnergestütztes System zur automatisierten 3D-Layoutoptimierung  
1994 - 81 Abb. - 140 Seiten - ISBN 3-540-57284-8
- 66 Kummelsteiner, G.: 3D-Bewegungssimulation als integratives Hilfsmittel zur Planung manueller Montagesysteme  
1994 - 62 Abb. - 146 Seiten - ISBN 3-540-57535-9
- 67 Kugelman, F.: Einsatz nachgiebiger Elemente zur wirtschaftlichen Automatisierung von Produktionssystemen  
1993 - 76 Abb. - 144 Seiten - ISBN 3-540-57549-9
- 68 Schwarz, H.: Simulationsgestützte CAD/CAM-Kopplung für die 3D-Laserbearbeitung mit integrierter Sensorik  
1994 - 96 Abb. - 148 Seiten - ISBN 3-540-57577-4
- 69 Viethen, U.: Systematik zum Prüfen in flexiblen Fertigungssystemen  
1994 - 70 Abb. - 142 Seiten - ISBN 3-540-57794-7
- 70 Seehuber, M.: Automatische Inbetriebnahme geschwindigkeitsadaptiver Zustandsregler  
1994 - 72 Abb. - 155 Seiten - ISBN 3-540-57896-X
- 71 Armann, W.: Eine Simulationsumgebung für Planung und Betrieb von Produktionssystemen  
1994 - 71 Abb. - 129 Seiten - ISBN 3-540-57924-9
- 72 Schöpf, M.: Rechnergestütztes Projektinformations- und Koordinationsystem für das Fertigungsvorfeld  
1997 - 63 Abb. - 130 Seiten - ISBN 3-540-58052-2
- 73 Welling, A.: Effizienter Einsatz bildgebender Sensoren zur Flexibilisierung automatisierter Handhabungsvorgänge  
1994 - 66 Abb. - 139 Seiten - ISBN 3-540-580-0
- 74 Zettmayer, H.: Verfahren zur simulationsgestützten Produktionseinstellung in der Einzel- und Kleinserienproduktion  
1994 - 62 Abb. - 143 Seiten - ISBN 3-540-58134-0

- 75 Lindl, M.: Auftragsleittechnik für Konstruktion und Arbeitsplanung  
1994 - 66 Abb. - 147 Seiten - ISBN 3-540-58221-5
- 76 Zipper, B.: Das integrierte Betriebsmittelwesen - Baustein einer flexiblen Fertigung  
1994 - 64 Abb. - 147 Seiten - ISBN 3-540-58222-3
- 77 Raitt, P.: Programmierung und Simulation von Zellenabläufen in der Arbeitsvorbereitung  
1995 - 51 Abb. - 130 Seiten - ISBN 3-540-58223-1
- 78 Engel, A.: Strömungstechnische Optimierung von Produktionsystemen durch Simulation  
1994 - 69 Abb. - 160 Seiten - ISBN 3-540-58258-4
- 79 Zäh, M. F.: Dynamisches Prozeßmodell Kreissägen  
1995-95 Abb. - 186 Seiten - ISBN 3-540-58624-5
- 80 Zwaner, N.: Technologisches Prozeßmodell für die Kugelschleifbearbeitung  
1995 - 65 Abb. - 150 Seiten - ISBN 3-540-58634-2
- 81 Romanov, P.: Konstruktionsbegleitende Kalkulation von Werkzeugmaschinen  
1995 - 66 Abb. - 151 Seiten - ISBN 3-540-58771-3
- 82 Kahlenberg, R.: Integrierte Qualitätssicherung in flexiblen Fertigungszellen  
1995 - 71 Abb. - 136 Seiten - ISBN 3-540-58772-1
- 83 Huber, A.: Arbeitsfolgenplanung mehrstufiger Prozesse in der Hartbearbeitung  
1995 - 87 Abb. - 152 Seiten - ISBN 3-540-58773-X
- 84 Birkel, G.: Aufwandsminimierter Wissenserwerb für die Diagnose in flexiblen Produktionszellen  
1995 - 64 Abb. - 137 Seiten - ISBN 3-540-58869-8
- 85 Simon, D.: Fertigungsregelung durch zielgrößenorientierte Planung und logistisches Störungsmanagement  
1995 - 77 Abb. - 132 Seiten - ISBN 3-540-58942-2
- 86 Nedeljkovic-Groha, V.: Systematische Planung anwendungsspezifischer Materialflussteuerungen  
1995 - 94 Abb. - 188 Seiten - ISBN 3-540-58953-8
- 87 Rockland, M.: Flexibilisierung der automatischen Teilbereitstellung in Montageanlagen  
1995-83 Abb. - 168 Seiten - ISBN 3-540-58999-6
- 88 Linner, St.: Konzept einer integrierten Produktentwicklung  
1995 - 67 Abb. - 168 Seiten - ISBN 3-540-59016-1
- 89 Eder, Th.: Integrierte Planung von Informationssystemen für rechnergestützte Produktionsysteme  
1995 - 62 Abb. - 150 Seiten - ISBN 3-540-59084-6
- 90 Deutsche, U.: Prozeßorientierte Organisation der Auftragsentwicklung in mittelständischen Unternehmen  
1995 - 80 Abb. - 188 Seiten - ISBN 3-540-59337-3
- 91 Dieterle, A.: Recyclingintegrierte Produktentwicklung  
1995 - 68 Abb. - 146 Seiten - ISBN 3-540-60120-1
- 92 Hechl, Chr.: Personalorientierte Montageplanung für komplexe und variantenreiche Produkte  
1995 - 73 Abb. - 158 Seiten - ISBN 3-540-60325-5
- 93 Albertz, F.: Dynamikgerechter Entwurf von Werkzeugmaschinen - Gestellstrukturen  
1995 - 83 Abb. - 156 Seiten - ISBN 3-540-60608-8
- 94 Trunzer, W.: Strategien zur On-Line Bahnplanung bei Robotern mit 3D-Konturfolgesensoren  
1996 - 101 Abb. - 164 Seiten - ISBN 3-540-60961-X
- 95 Fichtmüller, N.: Rationalisierung durch flexible, hybride Montagesysteme  
1996 - 83 Abb. - 145 Seiten - ISBN 3-540-60960-1
- 96 Trucks, V.: Rechnergestützte Beurteilung von Getriebestrukturen in Werkzeugmaschinen  
1996 - 64 Abb. - 141 Seiten - ISBN 3-540-60599-8
- 97 Schäffer, G.: Systematische Integration adaptiver Produktionssysteme  
1996 - 71 Abb. - 170 Seiten - ISBN 3-540-60958-X
- 98 Koch, M. R.: Autonome Fertigungszellen - Gestaltung, Steuerung und integrierte Störungsbehandlung  
1996 - 67 Abb. - 138 Seiten - ISBN 3-540-61104-5
- 99 Moctezuma da la Barrera, J. L.: Ein durchgängiges System zur Computer- und rechnergestützten Chirurgie  
1996 - 99 Abb. - 175 Seiten - ISBN 3-540-61145-2
- 100 Geuer, A.: Einsatzpotential des Rapid Prototyping in der Produktentwicklung  
1996 - 84 Abb. - 154 Seiten - ISBN 3-540-61495-8
- 101 Ebner, C.: Ganzheitliches Verfügbarkeits- und Qualitätsmanagement unter Verwendung von Felddaten  
1996 - 67 Abb. - 132 Seiten - ISBN 3-540-61678-0
- 102 Pischelsrieder, K.: Steuerung autonomer mobiler Roboter in der Produktion  
1996 - 74 Abb. - 171 Seiten - ISBN 3-540-61714-0
- 103 Köhler, R.: Disposition und Materialbereitstellung bei komplexen variantenreichen Kleinprodukten  
1997 - 62 Abb. - 177 Seiten - ISBN 3-540-62024-9
- 104 Feldmann, Ch.: Eine Methode für die integrierte rechnergestützte Montageplanung  
1997 - 71 Abb. - 163 Seiten - ISBN 3-540-62059-1
- 105 Lehmann, H.: Integrierte Materialfluß- und Layoutplanung durch Kopplung von CAD- und Ablaufsimulationssystem  
1997 - 96 Abb. - 191 Seiten - ISBN 3-540-62202-0
- 106 Wagner, M.: Steuerungsintegrierte Fehlerbehandlung für maschinennahre Abläufe  
1997 - 94 Abb. - 164 Seiten - ISBN 3-540-62656-5
- 107 Lorenzen, J.: Simulationsgestützte Kostenanalyse in produktorientierten Fertigungsstrukturen  
1997 - 63 Abb. - 129 Seiten - ISBN 3-540-62794-4
- 108 Kröner, U.: Systematik für die rechnergestützte Ähnlichkeitssuche und Standardisierung  
1997 - 53 Abb. - 127 Seiten - ISBN 3-540-63338-3
- 109 Pfersdorf, I.: Entwicklung eines systematischen Vorgehens zur Organisation des industriellen Service  
1997 - 74 Abb. - 172 Seiten - ISBN 3-540-63615-3
- 110 Kuba, R.: Informations- und kommunikationstechnische Integration von Menschen in der Produktion  
1997 - 77 Abb. - 155 Seiten - ISBN 3-540-63642-0
- 111 Kaiser, J.: Vernetztes Gestalten von Produkt und Produktionsprozeß mit Produktmodellen  
1997 - 67 Abb. - 139 Seiten - ISBN 3-540-63999-3
- 112 Geyer, M.: Flexibles Planungssystem zur Berücksichtigung ergonomischer Aspekte bei der Produkt- und Arbeitsystemgestaltung  
1997 - 85 Abb. - 154 Seiten - ISBN 3-540-64195-5
- 113 Martin, C.: Produktionsregelung - ein modularer, modellbasierter Ansatz  
1998 - 73 Abb. - 162 Seiten - ISBN 3-540-64401-6
- 114 Löffler, Th.: Akustische Überwachung automatisierter Fügeprozesse  
1998 - 85 Abb. - 136 Seiten - ISBN 3-540-64511-X
- 115 Lindermairer, R.: Qualitätsorientierte Entwicklung von Montagesystemen  
1998 - 84 Abb. - 164 Seiten - ISBN 3-540-64686-8
- 116 Koehler, J.: Prozeßorientierte Teamstrukturen in Betrieben mit Großserienfertigung  
1998 - 75 Abb. - 185 Seiten - ISBN 3-540-65037-7
- 117 Schuller, R. W.: Leitfaden zum automatisierten Auftrag von hochviskosen Dichtmaschen  
1999 - 76 Abb. - 162 Seiten - ISBN 3-540-65320-1
- 118 Debusch, M.: Integrierte Methodik und Werkzeuge zur herstellungsoorientierten Produktentwicklung  
1999 - 104 Abb. - 169 Seiten - ISBN 3-540-65350-3

- 119 **Bauer, L.:** Strategien zur rechnergestützten Offline- Programmierung von 3D-Laseranlagen  
1999 - 98 Abb. - 145 Seiten - ISBN 3-540-65382-1
- 120 **Pfob, E.:** Modellgestützte Arbeitsplanung bei Fertigungsmaschinen  
1999 - 69 Abb. - 154 Seiten - ISBN 3-540-65525-5
- 121 **Spitznagel, J.:** Erfahrungsgleitete Planung von Laseranlagen  
1999 - 63 Abb. - 156 Seiten - ISBN 3-540-65896-3

## Forschungsberichte IWB ab Band 122

herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. Gunther Reinhart und Prof. Dr.-Ing. Michael Zäh,  
Institut für Werkzeugmaschinen und Betriebswissenschaften der Technischen Universität München

Forschungsberichte IWB ab Band 122 sind erhältlich im Buchhandel oder beim  
Herbert Utz Verlag, München, Fax 089-277791-01, [info@utzverlag.de](mailto:info@utzverlag.de), [www.utzverlag.de](http://www.utzverlag.de)

- 122 **Burghard Schneider:** Prozesskettenorientierte Bereitstellung nicht  
formstabiler Bauteile  
183 Seiten - ISBN 978-3-89675-559-9
- 123 **Bernd Goldstein:** Modellgestützte Geschäftsprozeßgestaltung in der  
Produktentwicklung  
170 Seiten - ISBN 978-3-89675-546-9
- 124 **Helmut E. Mößner:** Methode zur simulationsbasierten Regelung  
zeitvarianter Produktionsysteme  
164 Seiten - ISBN 978-3-89675-585-8
- 125 **Ralf-Gunter Gräser:** Ein Verfahren zur Kompensation  
temperaturinduzierter Verformungen an Industrierobotern  
167 Seiten - ISBN 978-3-89675-603-9
- 126 **Hans-Jürgen Trossin:** Nutzung der Ähnlichkeitstheorie zur  
Modellbildung in der Produktionstechnik  
162 Seiten - ISBN 978-3-89675-614-5
- 127 **Doris Kugelman:** Aufgabenorientierte Offline-Programmierung von  
Industrierobotern  
168 Seiten - ISBN 978-3-89675-615-2
- 128 **Rolf Diesch:** Steigerung der organisatorischen Verfügbarkeit von  
Fertigungszellen  
160 Seiten - ISBN 978-3-89675-618-3
- 129 **Werner E. Lulay:** Hybrid-hierarchische Simulationsmodelle zur  
Konstruktion teilautonomer Produktionsstrukturen  
190 Seiten - ISBN 978-3-89675-620-6
- 130 **Otto Murr:** Adaptive Planung und Steuerung von integrierten  
Entwicklungs- und Planungsprozessen  
178 Seiten - ISBN 978-3-89675-636-7
- 131 **Michael Macht:** Ein Vorgehensmodell für den Einsatz von Rapid  
Prototyping  
170 Seiten - ISBN 978-3-89675-638-1
- 132 **Bruno H. Mehler:** Aufbau virtueller Fabriken aus dezentralen  
Partnerverbünden  
152 Seiten - ISBN 978-3-89675-645-9
- 133 **Knut Heitmann:** Sichere Prognosen für die Produktionsoptimierung  
mittels stochastischer Modelle  
146 Seiten - ISBN 978-3-89675-675-6
- 134 **Stefan Blessing:** Gestaltung der Materialflußsteuerung in  
dynamischen Produktionsstrukturen  
160 Seiten - ISBN 978-3-89675-690-9
- 135 **Can Abay:** Numerische Optimierung multivariater mehrstufiger  
Prozesse am Beispiel der Hartbearbeitung von Industriereramik  
159 Seiten - ISBN 978-3-89675-697-8
- 136 **Stefan Brandner:** Integriertes Produktdaten- und Prozeßmanagement  
in virtuellen Fabriken  
172 Seiten - ISBN 978-3-89675-715-9
- 137 **Arnd G. Hirschberg:** Verbindung der Produkt- und  
Funktionsorientierung in der Fertigung  
165 Seiten - ISBN 978-3-89675-729-6
- 138 **Alexandra Reek:** Strategien zur Fokuspositionierung beim  
Laserstrahlschweißen  
193 Seiten - ISBN 978-3-89675-730-2
- 139 **Khalid-Alexander Sabbah:** Methodische Entwicklung  
störungstoleranter Steuerungen  
148 Seiten - ISBN 978-3-89675-739-5
- 140 **Klaus U. Schlippenbacher:** Konfiguration virtueller  
Wertschöpfungsketten in dynamischen, heterarchischen  
Kompetenznetzwerken  
187 Seiten - ISBN 978-3-89675-754-8
- 141 **Andreas Sprengel:** Integrierte Kostenkalkulationsverfahren für die  
Werkzeugmaschinenentwicklung  
144 Seiten - ISBN 978-3-89675-757-9
- 142 **Andreas Gallasch:** Informationstechnische Architektur zur  
Unterstützung des Wandels in der Produktion  
150 Seiten - ISBN 978-3-89675-781-4
- 143 **Ralf Cuiper:** Durchgängige rechnergestützte Planung und Steuerung  
von automatisierten Montagevorgängen  
174 Seiten - ISBN 978-3-89675-783-8
- 144 **Christian Schneider:** Strukturmechanische Berechnungen in der  
Werkzeugmaschinenkonstruktion  
180 Seiten - ISBN 978-3-89675-789-0
- 145 **Christian Jonas:** Konzept einer durchgängigen, rechnergestützten  
Planung von Montageanlagen  
183 Seiten - ISBN 978-3-89675-870-5
- 146 **Ulrich Willnecker:** Gestaltung und Planung leistungsorientierter  
manueller Fließmontagen  
194 Seiten - ISBN 978-3-89675-891-0
- 147 **Christof Lehrer:** Beschreibung des Nd:YAG-  
Laserstrahlschweißprozesses von Magnesiumdruckguss  
205 Seiten - ISBN 978-3-8316-0004-5
- 148 **Frank Rick:** Simulationsgestützte Gestaltung von Produkt und Prozess  
am Beispiel Laserstrahlschweißen  
145 Seiten - ISBN 978-3-8316-0008-3
- 149 **Michael Höhn:** Sensorgeführt Montage hybrider Mikrosysteme  
185 Seiten - ISBN 978-3-8316-0012-0

- 150 *Jörn Böhl*: Wissensmanagement im Klein- und mittelständischen Unternehmen der Einzel- und Kleinserienfertigung  
190 Seiten · ISBN 978-3-8316-0020-5
- 151 *Robert Bürgel*: Prozessanalyse an spanenden Werkzeugmaschinen mit digital geregelten Antrieben  
185 Seiten · ISBN 978-3-8316-0212-2
- 152 *Stephan Dürschmidt*: Planung und Betrieb wandlungsfähiger Logistiksysteme in der variantenreichen Serienproduktion  
194 Seiten · ISBN 978-3-8316-0023-6
- 153 *Bernhard Eich*: Methode zur prozesskettenorientierten Planung der Teilebereitstellung  
136 Seiten · ISBN 978-3-8316-0028-1
- 154 *Wolfgang Ruderer*: Eine Methode zur Qualifizierung von produzierenden Unternehmen für Kompetenznetzwerke  
207 Seiten · ISBN 978-3-8316-0037-3
- 155 *Hans Meier*: Verteilte kooperative Steuerung maschinennaher Abläufe  
166 Seiten · ISBN 978-3-8316-0044-1
- 156 *Gerhard Nowak*: Informationstechnische Integration des industriellen Service in das Unternehmen  
208 Seiten · ISBN 978-3-8316-0055-7
- 157 *Martin Werner*: Simulationsgestützte Reorganisation von Produktions- und Logistikprozessen  
191 Seiten · ISBN 978-3-8316-0058-8
- 158 *Bernhard Lenz*: Finite Elemente-Modellierung des Laserstrahlenschweißens für den Einsatz in der Fertigungsplanung  
162 Seiten · ISBN 978-3-8316-0094-6
- 159 *Stefan Grunwald*: Methode zur Anwendung der flexiblen integrierten Produktentwicklung und Montageplanung  
216 Seiten · ISBN 978-3-8316-0095-3
- 160 *Josef Gartner*: Qualitätssicherung bei der automatisierten Applikation hochviskoser Dichtungen  
165 Seiten · ISBN 978-3-8316-0096-0
- 161 *Wolfgang Zeller*: Gesamtheitliches Sicherheitskonzept für die Antriebs- und Steuerungstechnik bei Werkzeugmaschinen  
192 Seiten · ISBN 978-3-8316-0100-4
- 162 *Michael Löfer*: Rechnergestützte Gestaltung von Montagesystemen  
178 Seiten · ISBN 978-3-8316-0118-9
- 163 *Jörg Fähr*: Ganzheitliche Optimierung des indirekten Metall-Lasersinterprozesses  
176 Seiten · ISBN 978-3-8316-0124-0
- 164 *Jürgen Höppner*: Verfahren zur berührungslosen Handhabung mittels leistungsfreier Schallwandler  
144 Seiten · ISBN 978-3-8316-0125-7
- 165 *Hubert Götte*: Entwicklung eines Assistenzrobotersystems für die Knieendoprothetik  
258 Seiten · ISBN 978-3-8316-0126-4
- 166 *Martin Weißenberger*: Optimierung der Bewegungsdynamik von Werkzeugmaschinen im rechnergestützten Entwicklungsprozess  
210 Seiten · ISBN 978-3-8316-0138-7
- 167 *Dirk Jacob*: Verfahren zur Positionierung unterseitenstrukturierter Bauelemente in der Mikrosystemtechnik  
200 Seiten · ISBN 978-3-8316-0142-4
- 168 *Ulrich Roßgoderer*: System zur effizienten Layout- und Prozessplanung von hybriden Montageanlagen  
175 Seiten · ISBN 978-3-8316-0154-7
- 169 *Robert Klingel*: Anzielverfahren für hochfeste Schraubenverbindungen auf Basis akustischer Emissionen  
164 Seiten · ISBN 978-3-8316-0174-5
- 170 *Paul lens Peter Ross*: Bestimmung des wirtschaftlichen Automatisierungsgrades von Montageprozessen in der frühen Phase der Montageplanung  
144 Seiten · ISBN 978-3-8316-0191-2
- 171 *Stefan von Praun*: Toleranzanalyse nachgiebiger Baugruppen im Produktentstehungsprozess  
252 Seiten · ISBN 978-3-8316-0202-5
- 172 *Florian von der Hagen*: Gestaltung kurzfristiger und unternehmensübergreifender Engineering-Kooperationen  
220 Seiten · ISBN 978-3-8316-0208-7
- 173 *Oliver Kramer*: Methode zur Optimierung der Wertschöpfungskette mittelständischer Betriebe  
212 Seiten · ISBN 978-3-8316-0211-7
- 174 *Winfried Dohmen*: Interdisziplinäre Methoden für die integrierte Entwicklung komplexer mechatronischer Systeme  
200 Seiten · ISBN 978-3-8316-0214-8
- 175 *Oliver Anton*: Ein Beitrag zur Entwicklung telepräsentier Montagesysteme  
158 Seiten · ISBN 978-3-8316-0215-5
- 176 *Wolfgang Broser*: Methode zur Definition und Bewertung von Anwendungsfeldern für Kompetenznetzwerke  
224 Seiten · ISBN 978-3-8316-0217-9
- 177 *Frank Breitinger*: Ein ganzheitliches Konzept zum Einsatz des indirekten Metall-Lasersinters für das Druckgießen  
156 Seiten · ISBN 978-3-8316-0227-8
- 178 *Johann von Pieverling*: Ein Vorgehensmodell zur Auswahl von Konturfertigungsverfahren für das Rapid Tooling  
163 Seiten · ISBN 978-3-8316-0230-8
- 179 *Thomas Baudisch*: Simulationsumgebung zur Auslegung der Bewegungsdynamik des mechatronischen Systems Werkzeugmaschine  
190 Seiten · ISBN 978-3-8316-0249-0
- 180 *Heinrich Schieferstein*: Experimentelle Analyse des menschlichen Kausystems  
132 Seiten · ISBN 978-3-8316-0251-3
- 181 *Joachim Berkak*: Methodik zur strukturierten Auswahl von Auftragsabwicklungsystmen  
244 Seiten · ISBN 978-3-8316-0258-2
- 182 *Christian Meierlohr*: Konzept zur rechnergestützten Integration von Produktions- und Gebäudeplanung in der Fabrikgestaltung  
181 Seiten · ISBN 978-3-8316-0292-6
- 183 *Volker Weber*: Dynamisches Kostenmanagement in kompetenzorientierten Unternehmensnetzwerken  
230 Seiten · ISBN 978-3-8316-0330-5
- 184 *Thomas Bongardt*: Methode zur Kompensation betriebsabhängiger Einflüsse auf die Absolutgenauigkeit von Industrierobotern  
170 Seiten · ISBN 978-3-8316-0332-9
- 185 *Tim Angerer*: Effizienzsteigerung in der automatisierten Montage durch aktive Nutzung mechatronischer Produktkomponenten  
180 Seiten · ISBN 978-3-8316-0336-7
- 186 *Alexander Krüger*: Planung und Kapazitätsabstimmung stückzahlflexibler Montagesysteme  
197 Seiten · ISBN 978-3-8316-0371-8
- 187 *Matthias Meinrl*: Beitrag zur Entwicklung generativer Fertigungsverfahren für das Rapid Manufacturing  
236 Seiten · ISBN 978-3-8316-0465-4
- 188 *Thomas Fusch*: Betriebsbegleitende Prozessplanung in der Montage mit Hilfe der Virtuellen Produktion am Beispiel der Automobilindustrie  
190 Seiten · ISBN 978-3-8316-0467-8
- 189 *Thomas Mosandl*: Qualitätssteigerung bei automatisiertem Klebstoffauftrag durch den Einsatz optischer Konturfolgesysteme  
182 Seiten · ISBN 978-3-8316-0471-5
- 190 *Christian Patron*: Konzept für den Einsatz von Augmented Reality in der Montageplanung  
150 Seiten · ISBN 978-3-8316-0474-6
- 191 *Robert Cisek*: Planung und Bewertung von Rekonfigurationsprozessen in Produktionsystemen  
200 Seiten · ISBN 978-3-8316-0475-3

- 192 *Florian Auer*: Methode zur Simulation des Laserstrahlenschweißens unter Berücksichtigung der Ergebnisse vorangegangener Umformsimulationen  
160 Seiten · ISBN 978-3-8316-0485-2
- 193 *Carsten Selke*: Entwicklung von Methoden zur automatischen Simulationsmodellgenerierung  
137 Seiten · ISBN 978-3-8316-0495-1
- 194 *Markus Seefried*: Simulation des Prozessschrittes der Wärmebehandlung beim Indirekten-Metall-Lasersintern  
216 Seiten · ISBN 978-3-8316-0503-3
- 195 *Wolfgang Wagner*: Fabrikplanung für die standortübergreifende Kostenenkung bei marktnaher Produktion  
208 Seiten · ISBN 978-3-8316-0586-6
- 196 *Christopher Ulrich*: Erhöhung des Nutzungsgrades von Laserstrahlquellen durch Mehrfach-Anwendungen  
192 Seiten · ISBN 978-3-8316-0590-3
- 197 *Johann Härtl*: Prozessgaseinfluss beim Schweißen mit Hochleistungsdiodenlasern  
148 Seiten · ISBN 978-3-8316-0611-5
- 198 *Bernd Hartmann*: Die Bestimmung des Personalbedarfs für den Materialfluss in Abhängigkeit von Produktionsfläche und -menge  
208 Seiten · ISBN 978-3-8316-0615-3
- 199 *Michael Schilp*: Auslegung und Gestaltung von Werkzeugen zum berührungslosen Greifen kleiner Bauteile in der Mikromontage  
180 Seiten · ISBN 978-3-8316-0631-3
- 200 *Florian Manfred Grätz*: Teilautomatische Generierung von Stromlauf- und Fluidplänen für mechatronische Systeme  
192 Seiten · ISBN 978-3-8316-0643-6
- 201 *Dieter Eireiner*: Prozessmodelle zur statischen Auslegung von Anlagen für das Friction Stir Welding  
214 Seiten · ISBN 978-3-8316-0650-4
- 202 *Gerhard Volkwein*: Konzept zur effizienten Bereitstellung von Steuerungsfunktionalität für die NC-Simulation  
192 Seiten · ISBN 978-3-8316-0668-9
- 203 *Sven Rooren*: Komplexitätsvariable Einflussgrößen für die bauteilbezogene Struktursimulation thermischer Fertigungsprozesse  
224 Seiten · ISBN 978-3-8316-0680-1
- 204 *Henning Rudolf*: Wissensbasierte Montageplanung in der Digitalen Fabrik am Beispiel der Automobilindustrie  
200 Seiten · ISBN 978-3-8316-0697-9
- 205 *Stella Clarke-Griebisch*: Overcoming the Network Problem in Telepresence Systems with Prediction and Inertia  
150 Seiten · ISBN 978-3-8316-0701-3
- 206 *Michael Ehrensträßer*: Sensorsreinsatz in der telepräsenten Mikromontage  
180 Seiten · ISBN 978-3-8316-0743-3
- 207 *Rainer Schack*: Methodik zur bewertungsorientierten Skalierung der Digitalen Fabrik  
260 Seiten · ISBN 978-3-8316-0748-8
- 208 *Wolfgang Sudhoff*: Methodik zur Bewertung standortübergreifender Mobilität in der Produktion  
300 Seiten · ISBN 978-3-8316-0749-5
- 209 *Stefan Müller*: Methodik für die entwicklungs- und planungsbegleitende Generierung und Bewertung von Produktionsalternativen  
260 Seiten · ISBN 978-3-8316-0750-1
- 210 *Ulrich Kohler*: Methodik zur kontinuierlichen und kostenorientierten Planung produktionstechnischer Systeme  
246 Seiten · ISBN 978-3-8316-0753-2
- 211 *Klaus Schlickerrieder*: Methodik zur Prozessoptimierung beim automatisierten elastischen Kleben großflächiger Bauteile  
204 Seiten · ISBN 978-3-8316-0776-1
- 212 *Niklas Möller*: Bestimmung der Wirtschaftlichkeit wandlungsfähiger Produktionsysteme  
260 Seiten · ISBN 978-3-8316-0778-5
- 213 *Daniel Siedl*: Simulation des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen während Verfahrbewegungen  
226 Seiten · ISBN 978-3-8316-0779-2
- 214 *Dirk Ansorge*: Auftragsabwicklung in heterogenen Produktionsstrukturen mit spezifischen Planungsfreiräumen  
150 Seiten · ISBN 978-3-8316-0785-3
- 215 *Georg Wünsch*: Methoden für die virtuelle Inbetriebnahme automatisierter Produktionssysteme  
238 Seiten · ISBN 978-3-8316-0795-2
- 216 *Thomas Oertli*: Strukturmechanische Berechnung und Regelungssimulation von Werkzeugmaschinen mit elektromechanischen Vorschubantrieben  
194 Seiten · ISBN 978-3-8316-0798-3
- 217 *Bernd Petzold*: Entwicklung eines Operatorarbeitsplatzes für die telepräsente Mikromontage  
234 Seiten · ISBN 978-3-8316-0805-8
- 218 *Locas Papadakis*: Simulation of the Structural Effects of Welded Frame Assemblies in Manufacturing Process Chains  
260 Seiten · ISBN 978-3-8316-0813-3
- 219 *Mathias Mörtl*: Ressourcenplanung in der variantenreichen Fertigung  
228 Seiten · ISBN 978-3-8316-0820-1
- 220 *Sebastian Weig*: Konzept eines integrierten Risikomanagements für die Ablauf- und Strukturgestaltung in Fabrikplanungsprojekten  
252 Seiten · ISBN 978-3-8316-0823-2
- 221 *Tobias Hornfeck*: Laserstrahlbiegen komplexer Aluminiumstrukturen für Anwendungen in der Luftfahrtindustrie  
150 Seiten · ISBN 978-3-8316-0826-3
- 222 *Hans Egermeier*: Entwicklung eines Virtual-Reality-Systems für die Montagesimulation mit kraftrückkoppelnden Handschuhen  
230 Seiten · ISBN 978-3-8316-0833-1
- 223 *Matthäus Sigl*: Ein Beitrag zur Entwicklung des Elektronenstrahlsinterns  
200 Seiten · ISBN 978-3-8316-0841-6
- 224 *Mark Hartensteller*: Eine Methodik zur Entwicklung und Herstellung von Radiumtargets  
198 Seiten · ISBN 978-3-8316-0849-2
- 225 *Jochen Werner*: Methode zur roboterbasierten förderbandsynchronen Fließmontage am Beispiel der Automobilindustrie  
210 Seiten · ISBN 978-3-8316-0857-7
- 226 *Florian Hagemann*: Ein formflexibles Werkzeug für das Rapid Tooling beim Spritzgießen  
244 Seiten · ISBN 978-3-8316-0861-4
- 227 *Haitham Rashidy*: Knowledge-based quality control in manufacturing processes with application to the automotive industry  
226 Seiten · ISBN 978-3-8316-0862-1
- 228 *Wolfgang Vogl*: Eine interaktive räumliche Benutzerschnittstelle für die Programmierung von Industrierobotern  
248 Seiten · ISBN 978-3-8316-0869-0
- 229 *Sonja Schedl*: Integration von Anforderungsmanagement in den mechatronischen Entwicklungsprozess  
176 Seiten · ISBN 978-3-8316-0874-4
- 230 *Andreas Trautmann*: Bifocal Hybrid Laser Welding - A Technology for Welding of Aluminium and Zinc-Coated Steels  
314 Seiten · ISBN 978-3-8316-0876-8
- 231 *Patrick Neise*: Managing Quality and Delivery Reliability of Suppliers by Using Incentives and Simulation Models  
226 Seiten · ISBN 978-3-8316-0878-2
- 232 *Christian Habicht*: Einsatz und Auslegung zeitfensterbasierter Planungssysteme in überbetrieblichen Wertschöpfungsketten  
204 Seiten · ISBN 978-3-8316-0891-1
- 233 *Michael Spitzweg*: Methoden und Konzept für den Einsatz eines physikalischen Modells in der Entwicklung von Produktionsanlagen  
180 Seiten · ISBN 978-3-8316-0931-4

- 234 *Ulrich Munzert*: Bahnplanungsalgorithmen für das robotergestützte Remote-Laserstrahlschweißen  
176 Seiten - ISBN 978-3-8316-0948-2
- 235 *Georg Völlner*: Röhrebschweißen mit Schwerlast-Industrierobotern  
232 Seiten - ISBN 978-3-8316-0955-0
- 236 *Nils Müller*: Modell für die Beherrschung und Reduktion von Nachfrageschwankungen  
286 Seiten - ISBN 978-3-8316-0992-5
- 237 *Franz Decker*: Unternehmensspezifische Strukturierung der Produktion als permanente Aufgabe  
180 Seiten - ISBN 978-3-8316-0996-3
- 238 *Christian Lau*: Methodik für eine selbstoptimierende Produktionssteuerung  
204 Seiten - ISBN 978-3-8316-4012-6
- 239 *Christoph Rimpau*: Wissensbasierte Risikobewertung in der Angebotskalkulation für hochgradig individualisierte Produkte  
268 Seiten - ISBN 978-3-8316-4015-7
- 240 *Michael Loy*: Modularer Vibrationswendelförderer zur flexiblen Teilezuführung  
190 Seiten - ISBN 978-3-8316-4027-0
- 241 *Andreas Ersch*: Konzept eines immersiven Assistenzsystems mit Augmented Reality zur Unterstützung manueller Aktivitäten in radioaktiven Produktionsumgebungen  
226 Seiten - ISBN 978-3-8316-4029-4
- 242 *Florian Schwarz*: Simulation der Wechselwirkungen zwischen Prozess und Struktur bei der Drehbearbeitung  
282 Seiten - ISBN 978-3-8316-4030-0
- 243 *Martin Georg Prasch*: Integration leistungsgewandelter Mitarbeiter in die varianterneiche Serienmontage  
261 Seiten - ISBN 978-3-8316-4031-1
- 244 *Johannes Schilp*: Adaptive Montagesysteme für hybride Mikrosysteme unter Einsatz von Telepräsenz  
192 Seiten - ISBN 978-3-8316-4063-8
- 245 *Stefan Lutzmann*: Beitrag zur Prozessbeherrschung des Elektronenstrahl schmelzens  
242 Seiten - ISBN 978-3-8316-4070-6
- 246 *Gregor Branner*: Modellierung transienter Effekte in der Struktursimulation von Schichtbauverfahren  
230 Seiten - ISBN 978-3-8316-4071-3
- 247 *Josef Ludwig Zimmermann*: Eine Methodik zur Gestaltung berührungsloser arbeitender Handhabungssysteme  
186 Seiten - ISBN 978-3-8316-4091-1
- 248 *Clemens Pörnbacher*: Modellgetriebene Entwicklung der Steuerungssoftware automatisierter Fertigungssysteme  
280 Seiten - ISBN 978-3-8316-4108-6
- 249 *Alexander Lindworsky*: Teilautomatische Generierung von Simulationsmodellen für den entwicklungs begleitenden Steuerungstest  
294 Seiten - ISBN 978-3-8316-4125-3
- 250 *Michael Mauderer*: Ein Beitrag zur Planung und Entwicklung von rekonfigurierbaren mechatronischen Systemen – am Beispiel von starren Fertigungssystemen  
220 Seiten - ISBN 978-3-8316-4126-0
- 251 *Roland Mork*: Qualitätsbewertung und -regelung für die Fertigung von Karosserie teilen in Presswerkten auf Basis Neuronaler Netze  
228 Seiten - ISBN 978-3-8316-4127-7
- 252 *Florian Reichl*: Methode zum Management der Kooperation von Fabrik- und Technologieplanung  
224 Seiten - ISBN 978-3-8316-4128-4
- 253 *Paul Gebhard*: Dynamisches Verhalten von Werkzeugmaschinen bei Anwendung für das Röhrebschweißen  
220 Seiten - ISBN 978-3-8316-4129-1
- 254 *Michael Heinz*: Modellunterstützte Auslegung berührungsloser Ultraschallgrefsysteme für die Mikrosystemtechnik  
302 Seiten - ISBN 978-3-8316-4147-5
- 255 *Pascal Krebs*: Bewertung vernetzter Produktionsstandorte unter Berücksichtigung multidimensionaler Unsicherheiten  
244 Seiten - ISBN 978-3-8316-4156-7
- 256 *Gerhard Straßer*: Greiftechnologie für die automatisierte Handhabung von technischen Textilien in der Faserverbundfertigung  
290 Seiten - ISBN 978-3-8316-4161-1
- 257 *Frédéric-Felix Lacur*: Modellbildung für die physikbasierte Virtuelle Inbetriebnahme materialflussintensiver Produktionsanlagen  
222 Seiten - ISBN 978-3-8316-4162-8
- 258 *Thomas Hensel*: Modellbasierter Entwicklungsprozess für Automatisierungslösungen  
184 Seiten - ISBN 978-3-8316-4167-3
- 259 *Sherif Zaidan*: A Work-Piece Based Approach for Programming Cooperating Industrial Robots  
212 Seiten - ISBN 978-3-8316-4175-8
- 260 *Hendrik Schellmann*: Bewertung kundenspezifischer Mengenflexibilität im Wertschöpfungsnetz  
224 Seiten - ISBN 978-3-8316-4189-5
- 261 *Marwan Radj*: Workspace scaling and haptic feedback for industrial telepresence and teleaction systems with heavy-duty teleoperators  
172 Seiten - ISBN 978-3-8316-4195-6
- 262 *Markus Rührstorfer*: Röhrebschweißen von Rohren  
206 Seiten - ISBN 978-3-8316-4197-0
- 263 *Rüdiger Daub*: Erhöhung der Nahttiefe beim Laserstrahl-Wärmeleitungsschweißen von Stählen  
182 Seiten - ISBN 978-3-8316-4199-4
- 264 *Michael Ott*: Multimaterialverarbeitung bei der additiven strahl- und pulververbettbasierte Fertigung  
220 Seiten - ISBN 978-3-8316-4201-4
- 265 *Markus Ostgathe*: System zur produktbasierten Steuerung von Abläufen in der auftragsbezogenen Fertigung und Montage  
278 Seiten - ISBN 978-3-8316-4206-9
- 266 *Imke Nora Kellner*: Materialsysteme für das pulververbettbasierte 3D-Drucken  
208 Seiten - ISBN 978-3-8316-4223-6
- 267 *Florian Oefele*: Remote-Laserstrahlschweißen mit brillanten Laserstrahlquellen  
238 Seiten - ISBN 978-3-8316-4224-3
- 268 *Claudia Anna Ehinger*: Automatisierte Montage von Faserverbund-Vorformlingen  
252 Seiten - ISBN 978-3-8316-4233-5
- 269 *Tobias Zeilinger*: Laserbasierte Bauteilellagebestimmung bei der Montage optischer Mikrokomponenten  
220 Seiten - ISBN 978-3-8316-4234-2
- 270 *Stefan Krug*: Automatische Konfiguration von Robotersystemen (Plug&Produce)  
208 Seiten - ISBN 978-3-8316-4243-4
- 271 *Marc Lotz*: Erhöhung der Fertigungsgenauigkeit beim Schwunggrad-Reibscheiben durch modellbasierte Regelungsverfahren  
220 Seiten - ISBN 978-3-8316-4245-8
- 272 *William Brice Tekouo Moutchivo*: A New Programming Approach for Robot-based Flexible Inspection systems  
232 Seiten - ISBN 978-3-8316-4247-2
- 273 *Matthias Waibel*: Aktive Zusatzsysteme zur Schwingungsreduktion an Werkzeugmaschinen  
158 Seiten - ISBN 978-3-8316-4250-2
- 274 *Christian Eschey*: Maschinenspezifische Erhöhung der Prozessfähigkeit in der additiven Fertigung  
216 Seiten - ISBN 978-3-8316-4270-0
- 275 *Florian Aull*: Modell zur Ableitung effizienter Implementierungsstrategien für Lean-Production-Methoden  
270 Seiten - ISBN 978-3-8316-4283-0
- 276 *Marcus Henauer*: Entwicklungsbegleitende Prognose der mechatronischen Eigenschaften von Werkzeugmaschinen  
214 Seiten - ISBN 978-3-8316-4306-6

- 277 *Alexander Götzfried*: Analyse und Vergleich fertigungstechnischer Prozessketten für Flugzeugtriebwerks-Rotoren  
220 Seiten · ISBN 978-3-8316-4310-3
- 278 *Saskia Reinhardt*: Bewertung der Ressourceneffizienz in der Fertigung  
232 Seiten · ISBN 978-3-8316-4317-2
- 279 *Fabian J. Meling*: Methodik für die Rekombination von Anlagentechnik  
192 Seiten · ISBN 978-3-8316-4319-6
- 280 *Jörg Egbers*: Identifikation und Adaption von Arbeitsplätzen für leistungsgewandelte Mitarbeiter entlang des Montageplanungsprozesses  
192 Seiten · ISBN 978-3-8316-4328-8
- 281 *Max von Bredow*: Methode zur Bewertung der Wirtschaftlichkeit und des Risikos unternehmensübergreifender Wertschöpfungskonfigurationen in der Automobilindustrie  
204 Seiten · ISBN 978-3-8316-4337-0
- 282 *Tobias Philipp*: RFID-gestützte Produktionssteuerungsverfahren für die Herstellung von Bauteilen aus Faserverbundkunststoffen  
142 Seiten · ISBN 978-3-8316-4346-2
- 283 *Stefan Rainer Johann Braunreuther*: Untersuchungen zur Lasersicherheit für Materialbearbeitungsanwendungen mit brillanten Laserstrahlquellen  
232 Seiten · ISBN 978-3-8316-4348-6
- 284 *Johannes Pohl*: Adaption von Produktionsstrukturen unter Berücksichtigung von Lebenszyklen  
202 Seiten · ISBN 978-3-8316-4358-7
- 285 *Matthey Wiesbeck*: Struktur zur Repräsentation von Montagesequenzen für die situationsorientierte Workerföhrung  
194 Seiten · ISBN 978-3-8316-4369-1
- 286 *Sonja Huber*: In-situ-Legierungsbestimmung beim Laserstrahlschweißen  
206 Seiten · ISBN 978-3-8316-4370-7
- 287 *Robert Wiedemann*: Prozessmodell und Systemtechnik für das laserunterstützte Fräsen  
220 Seiten · ISBN 978-3-8316-4384-4
- 288 *Thomas Irenhauser*: Bewertung der Wirtschaftlichkeit von RFID im Wertschöpfungsnetz  
242 Seiten · ISBN 978-3-8316-4404-9
- 289 *Jens Hatwig*: Automatisierte Bahnanplanung für Industrieroboter und Scanneroptiken bei der Remote-Laserstrahlbearbeitung  
196 Seiten · ISBN 978-3-8316-4405-6
- 290 *Matthias Baur*: Aktives Dämpfungssystem zur Ratterunterdrückung an spanenden Werkzeugmaschinen  
210 Seiten · ISBN 978-3-8316-4408-7
- 291 *Alexander Schöber*: Eine Methode zur Wärmequellenkalibrierung in der Schweißstruktursimulation  
198 Seiten · ISBN 978-3-8316-4415-5
- 292 *Matthias Glonegger*: Berücksichtigung menschlicher Leistungsschwankungen bei der Planung von Variantenfiletmontagesystemen  
214 Seiten · ISBN 978-3-8316-4419-3
- 293 *Markus Kahnert*: Scanstrategien zur verbesserten Prozessführung beim Elektronenstrahl schmelzen (EBM)  
228 Seiten · ISBN 978-3-8316-4416-2
- 294 *Sebastian Schindler*: Strategische Planung von Technologieketten für die Produktion  
220 Seiten · ISBN 978-3-8316-4443-6
- 295 *Tobias Föcker*: Methode zur rechnergestützten Prozessgestaltung des Schleifhärtens  
128 Seiten · ISBN 978-3-8316-4448-3
- 296 *Rüdiger Spiller*: Einsatz und Planung von Roboterassistenz zur Berücksichtigung von Leistungswandlungen in der Produktion  
286 Seiten · ISBN 978-3-8316-4450-6
- 297 *Daniel Schmid*: Röhrengusschweißen von Aluminiumlegierungen mit Stählen für die Automobilindustrie  
300 Seiten · ISBN 978-3-8316-4452-0
- 298 *Florian Karl*: Bedarfsermittlung und Planung von Rekonfigurationen an Betriebsmitteln  
222 Seiten · ISBN 978-3-8316-4458-2
- 299 *Philipp Ronald Engelhardt*: System für die RFID-gestützte situationsbasierte Produktionssteuerung in der auftragsbezogenen Fertigung  
246 Seiten · ISBN 978-3-8316-4472-8
- 300 *Markus Graßl*: Bewertung der Energieflexibilität in der Produktion  
202 Seiten · ISBN 978-3-8316-4476-6
- 301 *Thomas Kirchmeier*: Methode zur Anwendung der berührungslosen Handhabung mittels Ultraschall im automatisierten Montageprozess  
196 Seiten · ISBN 978-3-8316-4478-0
- 302 *Oliver Rösch*: Steigerung der Arbeitsgenauigkeit bei der Fräsbearbeitung metallischer Werkstoffe mit Industrierobotern  
214 Seiten · ISBN 978-3-8316-4486-5
- 303 *Christoph Sieben*: Entwicklung eines Prognosemodells zur prozessbegleitenden Beurteilung der Montagequalität von Kolbendichtungen  
194 Seiten · ISBN 978-3-8316-4510-7
- 304 *Philipp Alexander Schmidt*: Laserstrahlschweißen elektrischer Kontakte von Lithium-Ionen-Batterien in Elektro- und Hybridfahrzeugen  
190 Seiten · ISBN 978-3-8316-4519-0
- 305 *Yi Shen*: System für die Mensch-Roboter-Koexistenz in der Fließmontage  
230 Seiten · ISBN 978-3-8316-4520-6
- 306 *Thomas Bonin*: Moderne Ordnungsreduktionsverfahren für die Simulation des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen  
274 Seiten · ISBN 978-3-8316-4522-0



